# Vektoralgebra II

**Wolfgang STRÖHER**

# Vektoralgebra II

## Quaternionen

Die *Quaternionen* wurden 1840 von Sir William Rowan HAMILTON (1805-1865) eingeführt, finden sich aber im wesentlichen bereits 1748 bei Leonhard EULER (1707-1783).

Es sei $\Re$ der Körper der reellen Zahlen, ferner sei $\mathbf{V}$ der dreidimensionale euklidische Vektorraum, bezogen auf die orthonormale Basis $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$. Dann heißen die Elemente der Menge

$$Q := \Re \times \mathbf{V}$$

(HAMILTONsche) *Quaternionen*. Für eine Quaternion $\mathbf{A}$ gilt dann

$\mathbf{A} \in Q \Rightarrow \mathbf{A} = (a, \mathbf{a}), \quad a \in \Re, \mathbf{a} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3 \in \mathbf{V}$

$a$ heißt ***Skalarteil*** der Quaternion $\mathbf{A}$

$\mathbf{a}$ heißt ***Vektorteil*** oder ***Achse*** der Quaternion $\mathbf{A}$

Spezielle Quaternionen sind

$(a, \mathbf{o})$ ***skalare Quaternion***

$(0, \mathbf{a})$ ***vektorielle Quaternion***

$(0, \mathbf{o}) =: \mathbf{O}$ ***Nullquaternion***

$(-a, -\mathbf{a}) =: -\mathbf{A}$ die zu $\mathbf{A}$ ***entgegengesetzte Quaternion***

### Das Rechnen mit Quaternionen

**Gleichheit zweier Quaternionen**

$\mathbf{A} = (a, \mathbf{a}), \quad \mathbf{B} = (b, \mathbf{b})$

$\mathbf{A} = \mathbf{B} \Leftrightarrow a = b \wedge \mathbf{a} = \mathbf{b}$

**Summe zweier Quaternionen**

$\mathbf{A} + \mathbf{B} = (a, \mathbf{a}) + (b, \mathbf{b}) := (a + b, \mathbf{a} + \mathbf{b}) = (c, \mathbf{c}) = \mathbf{C}$

$\mathbf{A} + (-\mathbf{B}) = (a, \mathbf{a}) + (-b, -\mathbf{b}) = (a + (-b), \mathbf{a} + (-\mathbf{b})) := (a - b, \mathbf{a} - \mathbf{b}) =: \mathbf{A} - \mathbf{B}$

Speziell:

$\mathbf{A} - \mathbf{A} = (a, \mathbf{a}) + (-a, -\mathbf{a}) = (0, \mathbf{o}) = \mathbf{O}$

**Skalares Vielfaches einer Quaternion**

$\lambda \in \Re$

$\lambda\mathbf{A} = \lambda(a, \mathbf{a}) := (\lambda a, \lambda\mathbf{a})$

Speziell

$\lambda = -1 \ldots (-1)(a, \mathbf{a}) := -(a, \mathbf{a}) = (-a, -\mathbf{a}) \Rightarrow (-1)\mathbf{A} = -\mathbf{A}$

### Konjugierte einer Quaternion

$\mathbf{A} = (a, \mathbf{a}), \quad \tilde{\mathbf{A}} := (a, -\mathbf{a})$

### Rechnen mit speziellen Quaternionen

$\mathbf{A} = (a, \mathbf{a}) = (a, \mathbf{o}) + (0, \mathbf{a})$

Jede Quaternion ist Summe einer skalaren und einer vektoriellen Quaternion

### Rechnen mit skalaren Quaternionen

$(a, \mathbf{o}) + (b, \mathbf{o}) = (a + b, \mathbf{o})$

$\lambda(a, \mathbf{o}) = (\lambda a, \mathbf{o})$

Es besteht daher ein *Isomorphismus* zwischen den skalaren Quaternionen und den reellen Zahlen. Es ist daher naheliegend, zu identifizieren

$(a, \mathbf{o}) \equiv a$

### Rechnen mit vektoriellen Quaternionen

$(0, \mathbf{a}) + (0, \mathbf{b}) = (0, \mathbf{a} + \mathbf{b})$

$\lambda(0, \mathbf{a}) = (0, \lambda \mathbf{a})$

Es besteht wieder ein *Isomorphismus* zwischen den vektoriellen Quaternionen und den Vektoren. Es ist daher naheliegend, zu identifizieren:

$(0, \mathbf{a}) \equiv \mathbf{a}$

Zukünftig werden wir daher schreiben

$$\boxed{\mathbf{A} = (a, \mathbf{a}) = (a, \mathbf{o}) + (0, \mathbf{a}) = a + \mathbf{a}}$$

Es gilt daher

$\mathbf{A} = a + \mathbf{a}, \quad \mathbf{B} = b + \mathbf{b}$

$\mathbf{A} + \mathbf{B} = (a + \mathbf{a}) + (b + \mathbf{b}) = (a + b) + (\mathbf{a} + \mathbf{b})$

$\lambda \mathbf{A} = \lambda(a + \mathbf{a}) = \lambda a + \lambda \mathbf{a}$

Aus

$\mathbf{A} = a + \mathbf{a}$

$\underline{\tilde{\mathbf{A}} = a - \mathbf{a}}$

folgt sofort

$\mathbf{A} + \tilde{\mathbf{A}} = 2a$

$\mathbf{A} - \tilde{\mathbf{A}} = 2\mathbf{a}$

Für spezielle Quaternionen gilt

$\mathbf{A} = \mathbf{a}, \quad \tilde{\mathbf{A}} = \tilde{\mathbf{a}} = -\mathbf{a}, \quad \mathbf{A} + \tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{O}$

$\mathbf{A} = a, \quad \tilde{\mathbf{A}} = \tilde{a} = \quad a, \quad \mathbf{A} - \tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{O}$

Daher gilt

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathbf{A} + \tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{O} \Leftrightarrow \mathbf{A} \text{ ist vektorielle Quaternion} \\ \mathbf{A} - \tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{O} \Leftrightarrow \mathbf{A} \text{ ist skalare Quaternion} \end{array}}$$

Setzt man
$\mathbf{e}_0 := 1, \quad a_0 := a, \quad \mathbf{a} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3$
so folgt
$\mathbf{A} = a + \mathbf{a} = a_0\mathbf{e}_0 + a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3$
Die Menge der Quaternionen mit der Addition als innerer Verknüpfung und der Skalarmultiplikation als äußerer Verknüpfung bildet einen *vierdimensionalen Vektorraum* über $\Re$

**Produkt zweier Quaternionen**

$\mathbf{A} \circ \mathbf{B} = (a + \mathbf{a}) \circ (b + \mathbf{b})$
Für das Quaternionenprodukt fordern wir *Distributivität*, aber *keine Kommutativität*:
$\mathbf{A} \circ \mathbf{B} = (a + \mathbf{a}) \circ (b + \mathbf{b}) := a \circ b + \mathbf{a} \circ b + a \circ \mathbf{b} + \mathbf{a} \circ \mathbf{b}$
Es gelten folgende Definitionen:

$$\boxed{\begin{aligned} &a \circ b := ab = ba = b \circ a \\ &\mathbf{a} \circ b = \mathbf{a}b = b\mathbf{a} = b \circ \mathbf{a} \\ &\mathbf{a} \circ \mathbf{b} = -\mathbf{ab} + \mathbf{a} \times \mathbf{b} \end{aligned}}$$

Das Quaternionenprodukt zweier vektorieller Quaternionen ist eine volle Quaternion mit Skalar- und Vektorteil[1].
Man kann umgekehrt das Skalar- und Vektorprodukt zweier Vektoren durch deren Quaternionenprodukt ausdrücken:

$$\mathbf{a} \circ \mathbf{b} = -\mathbf{ab} + \mathbf{a} \times \mathbf{b}$$
$$\mathbf{b} \circ \mathbf{a} = -\mathbf{ba} + \mathbf{b} \times \mathbf{a} = -\mathbf{ab} - \mathbf{a} \times \mathbf{b}$$

Daher

$$\boxed{\begin{aligned} &\mathbf{ab} = -\frac{1}{2}(\mathbf{a} \circ \mathbf{b} + \mathbf{b} \circ \mathbf{a}) \\ &\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \frac{1}{2}(\mathbf{a} \circ \mathbf{b} - \mathbf{b} \circ \mathbf{a}) \end{aligned}}$$

Das Quaternionenprodukt allgemeiner Quaternionen lautet nunmehr

$$\boxed{\mathbf{A} \circ \mathbf{B} = (a + \mathbf{a}) \circ (b + \mathbf{b}) = (ab - \mathbf{ab}) + (a\mathbf{b} + b\mathbf{a} + \mathbf{a} \times \mathbf{b})}$$

Das Quaternionenprodukt ist *nicht kommutativ*. Es ist aber *distributiv*:

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \circ \mathbf{C} = \mathbf{A} \circ \mathbf{B} + \mathbf{B} \circ \mathbf{C}, \quad \mathbf{C} \circ (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \mathbf{C} \circ \mathbf{A} + \mathbf{C} \circ \mathbf{B}$$

Diese Beziehung ist klar, denn das Quaternionenprodukt wurde auf das Skalar- und Vektorprodukt zurückgeführt, die beide distributiv sind.

[1] Das negative Vorzeichen des Skalarproduktes bei der Definition des Quaternionenproduktes zweier vektorieller Quaternionen ist erforderlich, da ansonsten dieses Produkt nicht assoziativ wäre.

Dagegen ist das *assoziative Gesetz* nach zuweisen: :

$$\boxed{(\mathbf{A} \circ \mathbf{B}) \circ \mathbf{C} = \mathbf{A} \circ (\mathbf{B} \circ \mathbf{C})}$$

$$(\mathbf{A} \circ \mathbf{B}) \circ \mathbf{C} = [(ab - \mathbf{ab}) + (a\mathbf{b} + b\mathbf{a} + \mathbf{a} \times \mathbf{b})] \circ (c + \mathbf{c}) =$$
$$= abc - (\mathbf{ab})c + (ac)\mathbf{b} + (bc)\mathbf{a} + c(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) + (ab)\mathbf{c} - (\mathbf{ab})\mathbf{c} - a(\mathbf{bc}) + a(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) - b(\mathbf{ac}) + b(\mathbf{a} \times \mathbf{c}) -$$
$$-(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}) + (\mathbf{ac})\mathbf{b} - (\mathbf{bc})\mathbf{a}$$
$$\mathbf{A} \circ (\mathbf{B} \circ \mathbf{C}) = (a + \mathbf{a}) \circ [(bc - \mathbf{bc}) + (b\mathbf{c} + c\mathbf{b} + \mathbf{b} \times \mathbf{c})] =$$
$$= abc - (\mathbf{bc})a + (ab)\mathbf{c} + (ac)\mathbf{b} + a(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + (bc)\mathbf{a} - (\mathbf{bc})\mathbf{a} - b(\mathbf{ac}) + b(\mathbf{a} \times \mathbf{c}) - c(\mathbf{ab}) + c(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) -$$
$$-(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}) + (\mathbf{ac})\mathbf{b} - (\mathbf{ab})\mathbf{c}$$

Speziell gilt

$$\boxed{(\mathbf{a} \circ \mathbf{b}) \circ \mathbf{c} = \mathbf{a} \circ (\mathbf{b} \circ \mathbf{c}) = -(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}) - (\mathbf{bc})\mathbf{a} + (\mathbf{ca})\mathbf{b} - (\mathbf{ab})\mathbf{c}}$$

**Koaxiale Quaternionen**

Zwei Quaternionen heißen *koaxial*, wenn ihre Vektorteile linear abhängig sind

$$\boxed{\mathbf{A} \circ \mathbf{B} = \mathbf{B} \circ \mathbf{A} \Leftrightarrow \mathbf{A},\mathbf{B} \ \textit{koaxial}}$$

$$\mathbf{A} \circ \mathbf{B} = \mathbf{B} \circ \mathbf{A} \Rightarrow (ab - \mathbf{ab}) + (a\mathbf{b} + b\mathbf{a} + \mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (ba - \mathbf{ba}) + (b\mathbf{a} + a\mathbf{b} + \mathbf{b} \times \mathbf{a}) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{b} \times \mathbf{a} = -\mathbf{a} \times \mathbf{b} \Rightarrow 2\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{o} \Leftrightarrow \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{o} \Rightarrow \mathbf{a},\mathbf{b} \text{ linear abhä ngig}$$

$$\mathbf{A},\mathbf{B} \text{ koaxial} \Rightarrow \mathbf{b} = \lambda\mathbf{a} \Rightarrow \mathbf{A} \circ \mathbf{B} = \left(ab - \lambda|\mathbf{a}|^2\right) + (\lambda a\mathbf{a} + b\mathbf{a}) = \mathbf{B} \circ \mathbf{A}$$

**Norm einer Quaternion**

Unter der Norm einer Quaternion $\mathbf{A} = a + \mathbf{a}$ versteht man die reelle, nichtnegative Zahl

$$\boxed{\begin{array}{c} A^2 := \mathbf{A} \circ \widetilde{\mathbf{A}} = \widetilde{\mathbf{A}} \circ \mathbf{A} = a^2 + |\mathbf{a}|^2 \geq 0 \\ A^2 = 0 \Leftrightarrow \mathbf{A} = \mathbf{O} \end{array}}$$

Eine Quaternion mit der Norm 1 heißt *Einheitsquaternion* oder *normierte Quaternion*.
Man kann jede Quaternion normieren:

$$\mathbf{A}^\circ = \frac{\mathbf{A}}{A}, \quad A = \sqrt[+]{A^2}, \quad \mathbf{A}^\circ \circ \widetilde{\mathbf{A}}^\circ = 1$$

**Sonderfälle:**

Skalare Quaternion:

$A^2 = a \circ \tilde{a} = a^2$

Skalare Einheitsquaternion $a^2 = 1 \Rightarrow a = \pm 1$

# Quaternionen

Vektorielle Quaternion:

$$A^2 = \mathbf{a} \circ \tilde{\mathbf{a}} = \mathbf{a} \circ (-\mathbf{a}) = -\mathbf{a} \circ \mathbf{a} = -\left(-|\mathbf{a}|^2\right) = |\mathbf{a}|^2$$

Vektorielle Einheitsquaternion $|\mathbf{a}|^2 = 1 \Rightarrow \mathbf{a}$ ist Einheitsvektor

**Konjugium eines Quaternionenproduktes**

$$\boxed{(\mathbf{A} \circ \mathbf{B})^{\sim} = \tilde{\mathbf{B}} \circ \tilde{\mathbf{A}}}$$

$$(\mathbf{A} \circ \mathbf{B})^{\sim} = [(ab - a\mathbf{b}) + (a\mathbf{b} + b\mathbf{a} + \mathbf{a} \times \mathbf{b})]^{\sim} = [(ab - a\mathbf{b}) + (-a\mathbf{b} - b\mathbf{a} + \mathbf{b} \times \mathbf{a})] = \tilde{\mathbf{B}} \circ \tilde{\mathbf{A}}$$

**Inverse einer Quaternion**

Die Quaternion $\mathbf{X}$ heißt zu $\mathbf{A}$ *invers*, wenn gilt

$\mathbf{X} \circ \mathbf{A} = 1 \quad |\circ\tilde{\mathbf{A}}$

$(\mathbf{X} \circ \mathbf{A}) \circ \tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{X} \circ \left(\mathbf{A} \circ \tilde{\mathbf{A}}\right) = \mathbf{X} \circ A^2 = A^2\mathbf{X} = \tilde{\mathbf{A}}$

Daher

$$\boxed{\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} = \frac{\tilde{\mathbf{A}}}{A^2} \quad \textit{inverse Quaternion}}$$

Da $\mathbf{A}$ und $\mathbf{A}^{-1}$ koaxial sind, gilt

$$\boxed{\mathbf{A}^{-1} \circ \mathbf{A} = \mathbf{A} \circ \mathbf{A}^{-1} = 1}$$

Zu jeder Quaternion $\mathbf{A} \neq \mathbf{O}$ gibt es also eine inverse Quaternion.

**Spezialfälle:**

Skalare Quaternion

$$a^{-1} = \frac{\tilde{a}}{a^2} = \frac{a}{a^2} = \frac{1}{a}$$

Vektorielle Quaternion $\mathbf{a} \neq \mathbf{o}$

$$\boxed{\mathbf{a}^{-1} = \frac{\tilde{\mathbf{a}}}{|\mathbf{a}|^2} = -\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|^2}}$$

Inverse eines Einheitsvektors $|\mathbf{e}| = 1$

$$\boxed{\mathbf{e}^{-1} = -\mathbf{e}}$$

**Inverse eines Quaternionenproduktes**

$$\boxed{(\mathbf{A} \circ \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{B}^{-1} \circ \mathbf{A}^{-1}}$$

$$(\mathbf{A} \circ \mathbf{B}) \circ \left(\mathbf{B}^{-1} \circ \mathbf{A}^{-1}\right) = \mathbf{A} \circ \left(\mathbf{B} \circ \mathbf{B}^{-1}\right) \circ \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A} \circ \mathbf{A}^{-1} = 1$$

**Der Normensatz**

Es seien $A^2, B^2, C^2$ die Normen der Quaternionen $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$. Dann gilt

$$\boxed{\mathbf{C} = \mathbf{A} \circ \mathbf{B} \Rightarrow C^2 = A^2 B^2}$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \circ \mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{C}^{-1} = \mathbf{B}^{-1} \circ \mathbf{A}^{-1} \Rightarrow \frac{\tilde{\mathbf{C}}}{C^2} = \frac{\tilde{\mathbf{B}}}{B^2} \circ \frac{\tilde{\mathbf{A}}}{A^2} = \frac{(\mathbf{A} \circ \mathbf{B})^{\sim}}{A^2 B^2} = \frac{\tilde{\mathbf{C}}}{A^2 B^2} \Rightarrow C^2 = A^2 B^2$$

Die Menge der Quaternionen Q mit den inneren Verknüpfungen "+" und "○" bildet einen nichtkommutativen Körper (Schiefkörper), den *Quaternionenkörper*.

## Die Quaternionengruppe

Es sei $\mathbf{e}_0 = 1$ und $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ eine Orthonormalbasis von $\mathbf{V}$. Dann gilt

$$\mathbf{e}_0 \circ \mathbf{e}_i = \mathbf{e}_i \quad i = 1,2,3 \quad \mathbf{e}_i \circ \mathbf{e}_j = \mathbf{e}_k \quad (i,j,k) = (1,2,3), \quad \mathbf{e}_i \circ \mathbf{e}_i = -\mathbf{e}_0$$

| o | $e_0$ | $e_1$ | $e_2$ | $e_3$ | $-e_0$ | $-e_1$ | $-e_2$ | $-e_3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $e_0$ | $e_0$ | $e_1$ | $e_2$ | $e_3$ | $-e_0$ | $-e_1$ | $-e_2$ | $-e_3$ |
| $e_1$ | $e_1$ | $-e_0$ | $e_3$ | $-e_2$ | $-e_1$ | $e_0$ | $-e_3$ | $e_2$ |
| $e_2$ | $e_2$ | $-e_3$ | $-e_0$ | $e_1$ | $-e_2$ | $e_3$ | $e_0$ | $-e_1$ |
| $e_3$ | $e_3$ | $e_2$ | $-e_1$ | $-e_0$ | $-e_3$ | $-e_2$ | $e_1$ | $e_0$ |
| $-e_0$ | $-e_0$ | $-e_1$ | $-e_2$ | $-e_3$ | $e_0$ | $e_1$ | $e_2$ | $e_3$ |
| $-e_1$ | $-e_1$ | $e_0$ | $-e_3$ | $e_2$ | $e_1$ | $-e_0$ | $e_3$ | $-e_2$ |
| $-e_2$ | $-e_2$ | $e_3$ | $e_0$ | $-e_1$ | $e_2$ | $-e_3$ | $-e_0$ | $e_1$ |
| $-e_3$ | $-e_3$ | $-e_2$ | $e_1$ | $e_0$ | $e_3$ | $e_2$ | $-e_1$ | $-e_0$ |

Die Elemente $\mathbf{e}_i$ bilden mit der Verknüpfung „o" eine achtgliedrige Gruppe, die Quaternionengruppe. Sie besitzt folgende Untergruppen:

$\{\mathbf{e}_0, -\mathbf{e}_0\}$

$\{\mathbf{e}_0, -\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, -\mathbf{e}_1\}$

$\{\mathbf{e}_0, -\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_2, -\mathbf{e}_2\}$

$\{\mathbf{e}_0, -\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_3, -\mathbf{e}_3\}$

Alle Untergruppen sind *Normalteiler*. Eine nichtkommutative Gruppe, deren sämtliche Untergruppen Normalteiler sind, heißt HAMILTONsche Gruppe. Die Quaternionengruppe ist der einfachste Falle einer HAMILTONschen Gruppe.

# Geometrische Deutung der Quaternionen

Das Quaternionenprodukt zweier vektoriellen Quaternionen ist eine volle Quaternion mit Skalar- und Vektorteil. Läßt sich jede beliebig vorgegebene Quaternion als Produkt zweier vektoriellen Quaternionen darstellen?. Dies ist tatsächlich der Fall, wie im Folgenden bewiesen werden soll.

Gegeben seien zwei Vektoren $\mathbf{v}$ und $\mathbf{u}$. Wir bilden die Quaternion

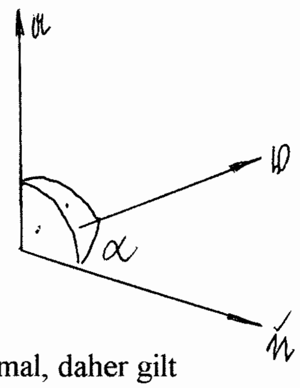
$$\mathbf{A} := \mathbf{v} \circ \mathbf{u}^{-1} = \mathrm{a} + \mathbf{a}$$

Wegen

$$\mathbf{u}^{-1} = -\frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|^2} \text{ gilt}$$

$$\mathbf{A} = -\frac{\mathbf{v} \circ \mathbf{u}}{|\mathbf{u}|^2} = -\frac{-\mathbf{vu} + \mathbf{v} \times \mathbf{u}}{|\mathbf{u}|^2} = \frac{\mathbf{uv} + \mathbf{u} \times \mathbf{v}}{|\mathbf{u}|^2} = \mathrm{a} + \mathbf{a}$$

Es ist also




$$\boxed{\begin{aligned} \mathrm{a} &= \frac{\mathbf{uv}}{|\mathbf{u}|^2} && (1) \\ \mathbf{a} &= \frac{\mathbf{u} \times \mathbf{v}}{|\mathbf{u}|^2} && (2) \end{aligned}}$$

Die Achse der resultierenden Quaternion steht demnach auf $\mathbf{u}$ und $\mathbf{v}$ normal, daher gilt

$$\boxed{\mathbf{au} = 0, \quad \mathbf{av} = 0 \qquad (3)}$$

Ferner gilt

$$\boxed{\begin{aligned} \mathrm{a} &= \frac{\mathbf{uv}}{|\mathbf{u}|^2} = \frac{|\mathbf{u}|.|\mathbf{v}|.\cos\alpha}{|\mathbf{u}|^2} = \frac{|\mathbf{v}|}{|\mathbf{u}|}.\cos\alpha && (4) \\ |\mathbf{a}| &= \frac{|\mathbf{u}|.|\mathbf{v}|.\sin\alpha}{|\mathbf{u}|^2} = \frac{|\mathbf{v}|}{|\mathbf{u}|}.\sin\alpha && (5) \\ \mathrm{A}^2 &= \mathrm{a}^2 + |\mathbf{a}|^2 = \frac{|\mathbf{v}|^2}{|\mathbf{u}|^2}, \quad \mathrm{A} = \frac{|\mathbf{v}|}{|\mathbf{u}|} && (6) \end{aligned}}$$

Daraus folgt

$$\boxed{\mathrm{a} = \mathrm{A}\cos(\alpha), \quad |\mathbf{a}| = \mathrm{A}\sin(\alpha) \qquad (7)}$$

umgekehrt läßt sich jede vorgegebene Quaternion $\mathbf{A} = \mathrm{a} + \mathbf{a}$ auf unendlich viele Arten in der Gestalt $\mathbf{A} = \mathbf{v}\mathrm{o}\mathbf{u}^{-1}$ mit geeignet gewählten Vektoren darstellen.

Wir wählen $\mathbf{u} \perp \mathbf{a}$, aber sonst beliebig. Dann ist $\mathbf{v}$ in eindeutiger Weise bestimmt. Denn aus (2) folgt

$$\mathbf{a} \times \mathbf{u} = \frac{(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{u}}{|\mathbf{u}|^2} = \frac{|\mathbf{u}|^2.\mathbf{v} - (\mathbf{uv})\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|^2} = \mathbf{v} - \frac{(\mathbf{uv})}{|\mathbf{u}|^2}\mathbf{u}$$

Wegen (1) folgt

$$\boxed{\mathbf{v} = a\mathbf{u} + \mathbf{a} \times \mathbf{u} \qquad (8)}$$

Probe: Tatsächlich gilt

$$\mathbf{v} \circ \mathbf{u}^{-1} = [a\mathbf{u} + \mathbf{a} \times \mathbf{u}] \circ \frac{-\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|^2} = -\frac{a}{|\mathbf{u}|^2}\Big(-|\mathbf{u}|^2 + \underbrace{\mathbf{u} \times \mathbf{u}}_{\mathbf{o}}\Big) - \frac{1}{|\mathbf{u}|^2}\left[-\underbrace{(\mathbf{a},\mathbf{u},\mathbf{u})}_{0} + \underbrace{(\mathbf{a} \times \mathbf{u}) \times \mathbf{u}}_{\mathbf{u}\underbrace{(\mathbf{a}\mathbf{u})}_{\perp} - \mathbf{a}|\mathbf{u}|^2}\right] = a + \mathbf{a}$$

Ferner folgt aus (4-6)

$$\boxed{|\mathbf{v}| = A|\mathbf{u}|, \quad \cos\alpha = \frac{a}{A}, \quad \sin\alpha = \frac{|\mathbf{a}|}{A} \qquad (9)}$$

Bei vorgegebener Quaternion $\mathbf{A} = a + \mathbf{a}$ und vorgegebenem Vektor $\mathbf{u} \perp \mathbf{a}$ ist der Vektor $\mathbf{v}$ eindeutig bestimmt, sodaß gilt

$$\mathbf{A} = \mathbf{v} \circ \mathbf{u}^{-1}$$

Daraus folgt

$$\mathbf{A} \circ \mathbf{u} = \mathbf{v}$$

d.h. die Quaternion $\mathbf{A}$ ordnet jedem zu ihrer Achse normalen Vektor $\mathbf{u}$ den Vektor $\mathbf{v}$ eindeutig zu:

$$\mathbf{A}: \quad \mathbf{u} \mapsto \mathbf{v} \quad \textit{lineare Abbildung}$$

Jede Quaternion $\mathbf{A}$ bewirkt in jeder zu ihrer Achse normalen Ebene eine Drehstreckung, wobei jeder dieser Ebene angehörige Vektor $\mathbf{u}$ vermöge

$$\mathbf{A} \circ \mathbf{u} = \mathbf{v}$$

in einen gleichfalls dieser Ebene angehörigen Vektor $\mathbf{v}$ übergeht. Der Faktor der Drehstrek-kung ist A, der Drehwinkel ist durch

$$\cos\alpha = \frac{a}{A}$$

festgelegt. Die Drehung erscheint von der Spitze des Vektors $\mathbf{a}$ aus gesehen positiv.
Umgekehrt ist jener Drehstreckung, welche den gegebenen Vektor $\mathbf{u}$ in den gegebenen Vektor $\mathbf{v}$ überführt, die Quaternion

$$\mathbf{A} = \mathbf{v} \circ \mathbf{u}^{-1}$$

zugeordnet.

Setzen wir

$$\mathbf{e} := \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} \Rightarrow \mathbf{a} = |\mathbf{a}|\mathbf{e}$$

so folgt mit

$|\mathbf{a}| = A\sin(\alpha)$ und $a = A\cos(\alpha)$

$$\boxed{\mathbf{A} = A(\cos\alpha + \mathbf{e}\sin\alpha) = A\mathbf{A}^\circ}$$

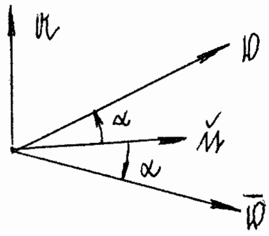
Man kann also jede Quaternion A in das Produkt eines Skalarfaktors

$$\mathsf{A} = \sqrt[+]{\mathbf{A}\tilde{\mathbf{A}}}$$

den *Streckungsanteil* ("*Tensor*"), und die Einheitsquaternion $\mathbf{A}°$, die den *Drehungsanteil* ("*Versor*") bestimmt, zerlegen.

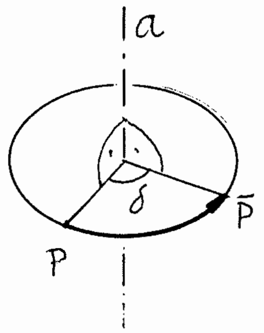
Die zu $\mathbf{A} = \mathsf{A}(\cos\alpha + \mathbf{e}\sin\alpha)$ konjugierte Quaternion $\tilde{\mathbf{A}} = \mathsf{A}(\cos\alpha - \mathbf{e}\sin\alpha)$ bewirkt dieselbe Streckung, aber Drehung um den entgegengesetzten Winkel $-\alpha$.

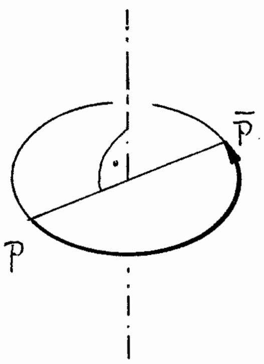
Die Vektoren $\mathbf{v}$ und $\bar{\mathbf{v}}$ sind daher bezüglich $\mathbf{u}$ spiegelbildlich.



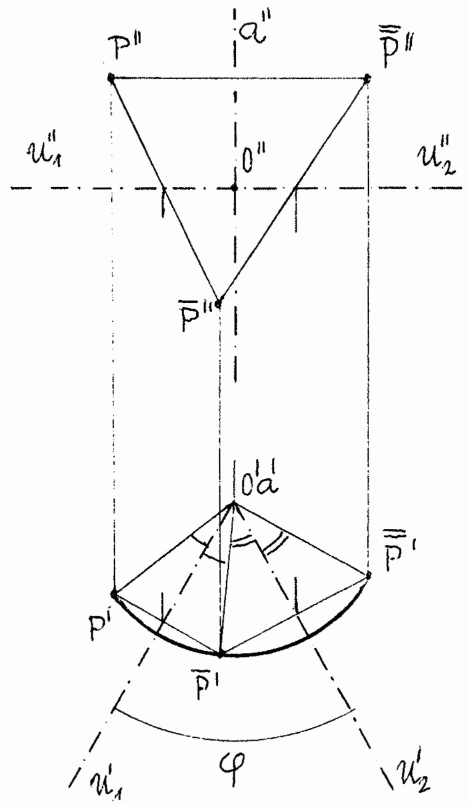

## Drehungen des Raumes

Eine *Drehung* ist eine gleichsinnig kongruente Selbstabbildung des Raumes, bei der eine Gerade, die *Drehachse*, punktweise fest bleibt.




Sonderfall: *Umwendung*: $\delta = \pi$. Eine Umwendung ist äquivalent der Spiegelung an der Umwendungsachse

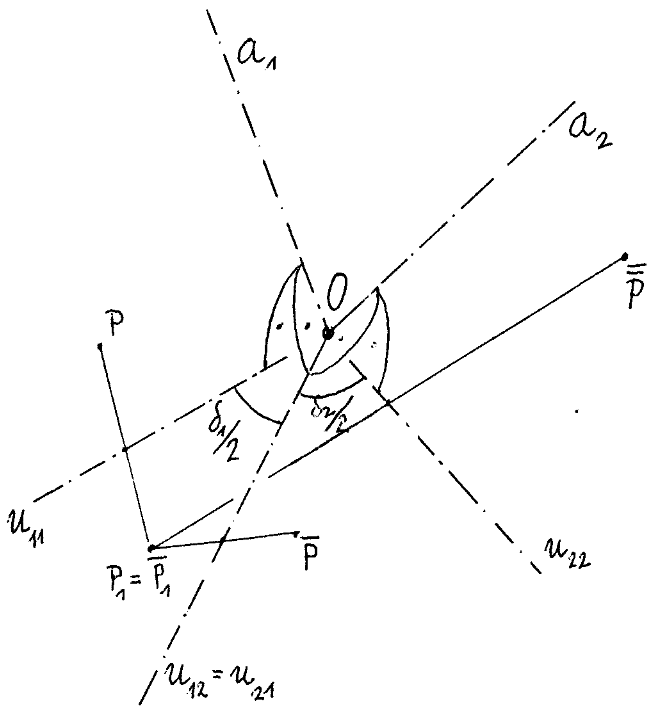



Die Zusammensetzung zweier Umwendungen mit *schneidenden Achsen* äquivalent einer Drehung, deren Achse durch den Schnittpunkt der Umwendungsachsen geht und auf beide Umwendungsachsen normal steht. Der Drehwinkel ist gleich dem doppelten Winkel der Umwendungsachsen.

Umgekehrt kann man jede Drehung auf unendlich viele Arten in zwei Umwendungen zerlegen. Die erste (oder zweite) der Umwendungsachsen kann beliebig, aber die Drehachse orthogonal schneidend gewählt werden. Die zweite (erste) Umwendungsachse ist dann durch Drehsinn und Drehwinkel eindeutig bestimmt.

# Drehungen

Die Zusammensetzung zweier Drehungen mit schneidenden Achsen ist äquivalent einer Drehung um eine Achse, die durch deren Schnittpunkt geht.




1. Drehung: $a_1, \delta_1$
   zerlegt in $u_{11}, u_{12}$
   $u_{12} \perp a_1$, $u_{12} \perp a_1$

2. Drehung: $a_2, \delta_2$
   zerlegt in $u_{21}, u_{22}$
   $u_{21} = u_{12} \perp a_2$, $u_{22} \perp a_2$

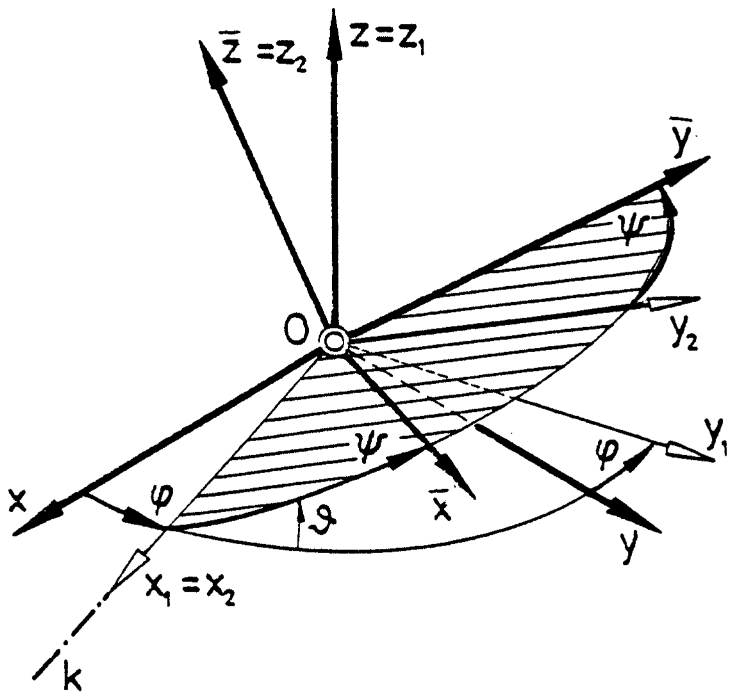
$$\underbrace{P \xrightarrow{u_{11}} P_1 \xrightarrow{u_{12}} \overline{P}}_{a_1} \overbrace{\xrightarrow{u_{21}} \overline{P}_1 \xrightarrow{u_{22}} \overline{\overline{P}}}^{a_2}$$

Wegen $u_{12} = u_{21}$ gilt $P_1 = \overline{P}_1$, daher ist

$$P \xrightarrow{u_{11}} P_1 = \overline{P}_1 \xrightarrow{u_{22}} \overline{\overline{P}}$$

Die Zusammensetzung der beiden Drehungen um $a_1$ und $a_2$ ist äquivalent der Zusammensetzung der Umwendungen um die Achsen $u_{11}$, $u_{22}$

Jede Gleichsinnig kongruente Abbildung des Raumes, welche einen Punkt festläßt, ist äquivalent einer Drehung.



1. Drehung: $a_1 = z$, Drehwinkel $\varphi = \angle xk$

Dreibein $(x, y, z) \rightarrow$ Dreibein $(x_1, y_1, z_1)$

2. Drehung: $a_2 = k$, Drehwinkel $\vartheta = \angle z\bar{z}$

Dreibein $(x_1, y_1, z_1) \rightarrow$ Dreibein $(x_2, y_2, z_2)$

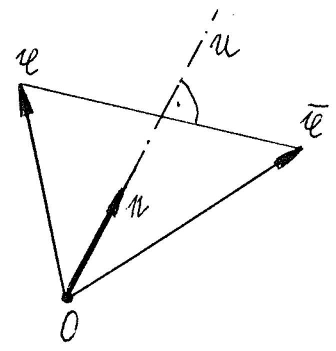
3. Drehung: $a_3 = z_2 = \bar{z}$, Drehwinkel $\psi = \angle kx$

Dreibein $(x_2, y_2, z_2) \rightarrow$ Dreibein $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$

Die Zusammensetzung dieser *EULERschen Drehungen* ergibt eine einzige Drehung.
Die Winkel $\varphi$, $\vartheta$, $\psi$ heißen *EULERsche Winkel*

| |
|---|
| Die Drehungen um einen festen Punkt O bilden eine (nichtkommutative) Gruppe mit den Umwendungen als erzeugenden Elementen. |

## Rechnerische Behandlungen der Drehungen um einen festen Punkt




Sei $\mathbf{e}$ ein Einheitsvektor. Dann gilt

$$|\mathbf{e}|^2 = 1, \quad \tilde{\mathbf{e}} = \mathbf{e}^{-1} = -\mathbf{e}, \quad \mathbf{e} \circ \mathbf{e} = -\mathbf{1}, \quad \mathbf{e} \circ \tilde{\mathbf{e}} = \mathbf{1}$$

Wir betrachten die Drehstreckung,welche $\mathbf{e}$ in den beliebigen Vektor $\mathbf{x}$ überführt. Ihr entspricht die Quaternion

$$\mathbf{A} = \mathbf{x} \circ \mathbf{e}^{-1} = -\mathbf{x} \circ \mathbf{e} \qquad (*)$$

Ist $u$ die von $\mathbf{e}$ aufgespannte Gerade und $\bar{\mathbf{x}}$ der zu $\mathbf{x}$ bezüglich $u$ symmetrische Vektor, so entspricht der Drehstreckung, die $\mathbf{e}$ nach $\bar{\mathbf{x}}$ überführt, die zu $\mathbf{A}$ konjugierte Quaternion

$$\tilde{\mathbf{A}} = \bar{\mathbf{x}} \circ \mathbf{e}^{-1} = -\bar{\mathbf{x}} \circ \mathbf{e} \qquad (**)$$

Anderseits folgt aus $(*)$

$$\tilde{\mathbf{A}} = (-\mathbf{x} \circ \mathbf{e})^{\sim} = -\tilde{\mathbf{e}} \circ \tilde{\mathbf{x}} = -\mathbf{e} \circ \mathbf{x}$$

Vergleich mit $(**)$ ergibt

$$\bar{\mathbf{x}} \circ \mathbf{e} = \mathbf{e} \circ \mathbf{x} \quad |\circ\tilde{\mathbf{e}}$$

also

$$\boxed{\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{e} \circ \mathbf{x} \circ \tilde{\mathbf{e}}}$$

# Rechnerische Behandlung der Drehungen

Jeder Umwendung um eine durch O gehende Achse u lassen sich zwei Einheitsvektoren $\pm \mathbf{e}$ zuordnen. Durch jeden dieser Einheitsvektoren ist die Umwendung durch

$$\overline{\mathbf{x}} = \mathbf{e} \circ \mathbf{x} \circ \tilde{\mathbf{e}}$$

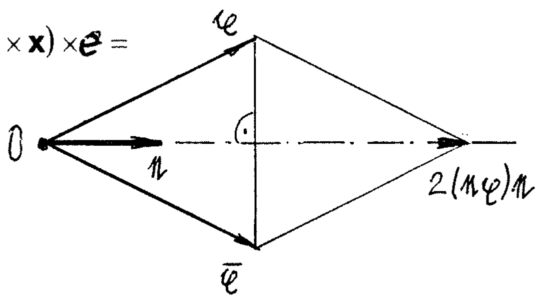
eindeutig bestimmt

**Vektordarstellung der Umwendung**

$\overline{\mathbf{x}} = \mathbf{e} \circ \mathbf{x} \circ \tilde{\mathbf{e}} = -[-(\mathbf{ex}) + \mathbf{e} \times \mathbf{x}] \circ \mathbf{e} = (\mathbf{ex})\mathbf{e} + (\mathbf{e},\mathbf{x},\mathbf{e}) - (\mathbf{e} \times \mathbf{x}) \times \mathbf{e} =$

$= (\mathbf{ex})\mathbf{e} - |\mathbf{e}|^2 \mathbf{x} + (\mathbf{ex})\mathbf{e}$

daher



$$\boxed{\overline{\mathbf{x}} = 2(\mathbf{ex})\mathbf{e} - \mathbf{x}}$$

**Zusammensetzung zweier Umwendungen**

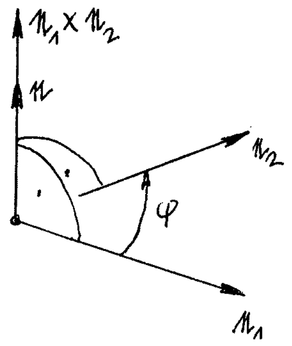
$\mathbf{x_1} = \mathbf{e_1} \circ \mathbf{x} \circ \tilde{\mathbf{e}}_1$

$\overline{\mathbf{x}} = \mathbf{e_2} \circ \mathbf{x}_1 \circ \tilde{\mathbf{e}}_2$

Daher

$\overline{\mathbf{x}} = \mathbf{e_2} \circ (\mathbf{e}_1 \circ \mathbf{x} \circ \tilde{\mathbf{e}}_1) \circ \tilde{\mathbf{e}}_2 = (\mathbf{e}_2 \circ \mathbf{e}_1) \circ \mathbf{x} \circ (\tilde{\mathbf{e}}_1 \circ \tilde{\mathbf{e}}_2) = (\mathbf{e}_2 \circ \mathbf{e}_1) \circ \mathbf{x} \circ (\mathbf{e}_2 \circ \mathbf{e}_1)^{\sim}$

Setzen wir



$$\boxed{\mathbf{D} := -\mathbf{e}_2 \circ \mathbf{e}_1}$$

So gilt

$$\boxed{\overline{\mathbf{x}} = \mathbf{D} \circ \mathbf{x} \circ \tilde{\mathbf{D}} \quad \textit{Drehung}}$$

Dann ist

$$\mathbf{D} = -\mathbf{e}_2 \circ \mathbf{e}_1 = -(-\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2$$

Wegen $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 = \cos\varphi$, $|\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2| = \sin\varphi$ mit $\mathbf{e} := \dfrac{\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2}{\sin\varphi}$

und dem ***Drehwinkel*** $\delta := 2\varphi$

können wir setzen

$$\boxed{\mathbf{D} = \cos\frac{\delta}{2} + \mathbf{e}\sin\frac{\delta}{2}, \quad \mathbf{D} \circ \tilde{\mathbf{D}} = 1}$$

Die Einheitsquaternion **D** heißt *Drehquaternion*. Sie legt die Drehung durch den halben Drehwinkel $\delta/2$ und die Drehachse **e** durch O fest. Die Drehung erfolgt, von der Spitze von **e** aus gesehen, im positiven Sinn.

Man nennt

$$\boxed{\mathbf{d} := \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}\, sin\frac{\delta}{2}}$$

den *Drehvektor*. Mit dieser Bezeichnung gilt

$$\boxed{\mathbf{D} = cos\frac{\delta}{2} + \mathbf{d}}$$

> Jeder durch Drehachse $\mathbf{e}$, Drehwinkel $\delta$ und Drehsinn gegebenen Drehung um eine Achse durch O lassen sich zwei Einheitsquaternionen $\pm\,\mathbf{D}$ zuordnen. Jeder Einheitsquaternion entspricht umgekehrt in eindeutiger Weise eine Drehung um eine Achse durch O.

**Zerlegung einer Drehung in zwei Umwendungen**

Gegeben sei die Einheitsquaternion $\mathbf{D} = cos\,(\delta/2) + \mathbf{e}\,\sin\,(\delta/2)$.

1. $\mathbf{e}_1$ werde $\perp \mathbf{e}$ vorgegeben $(\mathbf{e}\mathbf{e}_1 = 0)$

Dann ist

$$\mathbf{e}_2 \circ \mathbf{e}_1 = -\mathbf{D} \Rightarrow -\mathbf{D} \circ \mathbf{e}_1^{-1} = \mathbf{D} \circ \mathbf{e}_1 = \left( cos\frac{\delta}{2} + \mathbf{e}\, sin\frac{\delta}{2} \right) \circ \mathbf{e}_1 =$$

$$= \mathbf{e}_1\, cos\frac{\delta}{2} + sin\frac{\delta}{2}\left(-\mathbf{e}\mathbf{e}_1 + \mathbf{e} \times \mathbf{e}_1\right), \text{ daher}$$

$$\underline{\mathbf{e}_2 = \mathbf{D} \circ \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_1\, cos\frac{\delta}{2} + \mathbf{e} \times \mathbf{e}_1\, sin\frac{\delta}{2}}$$

2. $\mathbf{e}_2$ werde $\perp \mathbf{e}$ vorgegeben $(\mathbf{e}\mathbf{e}_2 = 0)$

$$\mathbf{e}_2 \circ \mathbf{e}_1 = -\mathbf{D} \Rightarrow \mathbf{e}_1 = -\mathbf{e}_2^{-1} \circ \mathbf{D} = \mathbf{e}_2 \circ \mathbf{D} = \mathbf{e}_2 \circ \left( cos\frac{\delta}{2} + \mathbf{e}\, sin\frac{\delta}{2} \right) =$$

$$= \mathbf{e}_2\, cos\frac{\delta}{2} + \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}\, sin\frac{\delta}{2} \Rightarrow \underline{\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2\, cos\frac{\delta}{2} - \mathbf{e} \times \mathbf{e}_2\, sin\frac{\delta}{2}}$$

Ist $\delta = \pi$, so liegt eine Umwendung vor und die Drehquaternion reduziert sich auf

$$\boxed{\mathbf{D} = \mathbf{e} \quad \textit{Umwendung}}$$

**Vektordarstellung der Drehungen um O**

$$\overline{\mathbf{x}} = \mathbf{D} \circ \mathbf{x} \circ \tilde{\mathbf{D}} = \left( cos\frac{\delta}{2} + \mathbf{e}\, sin\frac{\delta}{2} \right) \circ \mathbf{x} \circ \tilde{\mathbf{D}} = \left( \mathbf{x}\, cos\frac{\delta}{2} - (\mathbf{e}\mathbf{x})\, sin\frac{\delta}{2} + \mathbf{e} \times \mathbf{x}\, sin\frac{\delta}{2} \right) \circ \left( cos\frac{\delta}{2} - \mathbf{e}\, sin\frac{\delta}{2} \right) =$$

$$= \mathbf{x}\, cos^2\frac{\delta}{2} - (\mathbf{e}\mathbf{x})\, cos\frac{\delta}{2}.sin\frac{\delta}{2} + (\mathbf{e} \times \mathbf{x})\, cos\frac{\delta}{2}.sin\frac{\delta}{2} + (\mathbf{e}\mathbf{x})\, cos\frac{\delta}{2}.sin\frac{\delta}{2} - (\mathbf{x} \times \mathbf{e})\, cos\frac{\delta}{2}.sin\frac{\delta}{2} +$$

$$+ (\mathbf{e}\mathbf{x})\mathbf{e}\, sin^2\frac{\delta}{2} + 0 - \mathbf{x}|\mathbf{e}|^2\, sin^2\frac{\delta}{2} + \mathbf{e}(\mathbf{e}\mathbf{x})\, sin^2\frac{\delta}{2}$$

Also

$$\overline{\mathbf{x}} = \mathbf{x}\left(\cos^2\frac{\delta}{2} - \sin^2\frac{\delta}{2}\right) + 2(\mathbf{e}\times\mathbf{x})\cos\frac{\delta}{2}\sin\frac{\delta}{2} + 2(\mathbf{ex})\mathbf{e}\sin^2\frac{\delta}{2}$$

Nun gilt

$$2\sin^2\frac{\delta}{2} = 1-\cos\delta,\quad \cos^2\frac{\delta}{2} - \sin^2\frac{\delta}{2} = \cos\delta,\quad 2\sin\frac{\delta}{2}\cos\frac{\delta}{2} = \sin\delta$$

daher

$$\underline{\overline{\mathbf{x}} = \mathbf{x}\cos\delta + (\mathbf{e}\times\mathbf{x})\sin\delta + \mathbf{e}(\mathbf{ex})(1-\cos\delta)}$$

**Koordinatendarstellung der Drehungen um eine Achse durch O**

Man kann jede beliebige Quaternion $\mathbf{A}$ zu einer Einheitsquaternion normieren. Dann gilt

$$\mathbf{D} = \frac{\mathbf{A}}{A},\quad A = \sqrt{\mathbf{A}\circ\widetilde{\mathbf{A}}} = \sqrt{a^2 + |\mathbf{a}|^2}$$

Dann gilt

$$\boxed{\overline{\mathbf{x}} = \mathbf{D}\circ\mathbf{x}\circ\widetilde{\mathbf{D}} = \frac{\mathbf{A}}{A}\circ\mathbf{x}\circ\frac{\widetilde{\mathbf{A}}}{A} = \mathbf{A}\circ\mathbf{x}\circ\frac{\widetilde{\mathbf{A}}}{A^2} = \mathbf{A}\circ\mathbf{x}\circ\mathbf{A}^{-1}}$$

Diese Formel soll in Koordinatenschreibweise dargestellt werden:

$$\mathbf{A} = a_0 + \mathbf{a},\quad \mathbf{A}^{-1} = \frac{\widetilde{\mathbf{A}}}{A^2} = \frac{a_0 - \mathbf{a}}{A^2},\quad \mathbf{a}\ldots\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix},\quad \mathbf{x}\ldots\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix},\quad \overline{\mathbf{x}}\ldots\begin{Bmatrix} \overline{x}_1 \\ \overline{x}_2 \\ \overline{x}_3 \end{Bmatrix}$$

$$A^2 = a_0^2 + |\mathbf{a}|^2 = a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$$

$$A^2\overline{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\circ\mathbf{x}\circ\widetilde{\mathbf{A}} = (a_0 + \mathbf{a})\circ\mathbf{x}\circ\widetilde{\mathbf{A}} = (a_0\mathbf{x} - \mathbf{ax} + \mathbf{a}\times\mathbf{x})\circ(a_0 - \mathbf{a}) =$$

$$= a_0^2\mathbf{x} - (\mathbf{ax})a_0 + (\mathbf{a}\times\mathbf{x})a_0 + a_0(\mathbf{ax}) - a_0(\mathbf{x}\times\mathbf{a}) + (\mathbf{ax})\mathbf{a} + 0 - \mathbf{x}|\mathbf{a}|^2 + \mathbf{a}(\mathbf{ax})$$

$$A^2\overline{\mathbf{x}} = \left(a_0^2 - |\mathbf{a}|^2\right)\mathbf{x} + 2a_0(\mathbf{a}\times\mathbf{x}) + 2(\mathbf{ax})\mathbf{a}$$

In Koordinatenschreibweise ergibt sich damit

$$\mathbf{a}\times\mathbf{x}\ldots\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix}\times\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a_2x_3 - a_3x_2 \\ a_3x_1 - a_1x_3 \\ a_1x_2 - a_2x_1 \end{Bmatrix},\quad \mathbf{ax} = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3$$

$$A^2\begin{Bmatrix} \overline{x}_1 \\ \overline{x}_2 \\ \overline{x}_3 \end{Bmatrix} = \left(a_0^2 - a_1^2 - a_2^2 - a_3^2\right)\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} + 2a_0\begin{Bmatrix} a_2x_3 - a_3x_2 \\ a_3x_1 - a_1x_3 \\ a_1x_2 - a_2x_1 \end{Bmatrix} + 2(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3)\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix}$$

Koordinatenweise folgt daraus

$$\overline{x}_1 = \frac{1}{A^2}\left[\left(a_0^2 + a_1^2 - a_2^2 - a_3^2\right)x_1 + 2\left(a_1a_2 - a_0a_3\right)x_2 + 2\left(a_0a_2 + a_1a_3\right)x_3\right]$$
$$\overline{x}_2 = \frac{1}{A^2}\left[2\left(a_0a_3 + a_1a_2\right)x_1 + \left(a_0^2 - a_1^2 + a_2^2 - a_3^2\right)x_2 + 2\left(a_2a_3 - a_0a_1\right)x_3\right]$$
$$\overline{x}_3 = \frac{1}{A^2}\left[2\left(a_1a_3 - a_0a_2\right)x_1 + 2\left(a_0a_1 + a_2a_3\right)x_2 + \left(a_0^2 - a_1^2 - a_2^2 + a_3^2\right)x_3\right]$$
$$A^2 = a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$$

Dies ist die Darstellung der Drehungen um O mit Hilfe der *homogenen Drehparameter* $a_0 : a_1 : a_2 : a_3$ von EULER (1776).
Normiert man die Quaternion, indem man $\lambda_i := a_i/A$ setzt, so liegen die *inhomogenen* (*normierten*) *Drehparameter* von EULER vor.:

$$\lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 1$$

Die der Quaternion **A** entsprechende Drehung ist durch

$$\mathbf{d} = \frac{\mathbf{a}}{A} = \mathbf{e}\,sin\frac{\delta}{2} \ldots \frac{1}{A}\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{Bmatrix} \quad \text{und} \quad cos\frac{\delta}{2} = \frac{a_0}{A} = \lambda_0$$

festgelegt.

**Zusammensetzung von Drehungen**

$$\overline{\mathbf{x}} = \mathbf{D}_1 \circ \mathbf{x} \circ \widetilde{\mathbf{D}}_1 \quad \mathbf{D}_1 = cos\frac{\delta_1}{2} + \mathbf{e}_1\, sin\frac{\delta_1}{2}$$
$$\overline{\overline{\mathbf{x}}} = \mathbf{D}_2 \circ \overline{\mathbf{x}} \circ \widetilde{\mathbf{D}}_2 \quad \mathbf{D}_2 = cos\frac{\delta_2}{2} + \mathbf{e}_2\, sin\frac{\delta_2}{2}$$
$$\overline{\overline{\mathbf{x}}} = \mathbf{D}_2 \circ \left(\mathbf{D}_1 \circ \mathbf{x} \circ \widetilde{\mathbf{D}}_1\right) \circ \widetilde{\mathbf{D}}_2 = \left(\mathbf{D}_2 \circ \mathbf{D}_1\right) \circ \mathbf{x} \circ \left(\mathbf{D}_2 \circ \mathbf{D}_1\right)^{\sim}$$

Setzen wir

$$\mathbf{D} := \mathbf{D_2} \circ \mathbf{D_1}$$

so ist diese Quaternion nach dem Normensatz wieder eine Einheitsquaternion und

$$\overline{\overline{\mathbf{x}}} = \mathbf{D} \circ \mathbf{x} \circ \widetilde{\mathbf{D}}$$

stellt die zur Abfolge der gegebenen Drehungen äquivalente Drehung dar. Es gilt

$$\mathbf{D} = \mathbf{D_2} \circ \mathbf{D_1} = \left[cos\frac{\delta_2}{2} + \mathbf{e}_2\, sin\frac{\delta_2}{2}\right] \circ \left[cos\frac{\delta_1}{2} + \mathbf{e}_1\, sin\frac{\delta_1}{2}\right] =$$
$$= cos\frac{\delta_1}{2} cos\frac{\delta_2}{2} + \mathbf{e}_2\, cos\frac{\delta_1}{2} sin\frac{\delta_2}{2} + \mathbf{e}_1\, sin\frac{\delta_1}{2} cos\frac{\delta_2}{2} - \left(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\right) sin\frac{\delta_1}{2} sin\frac{\delta_2}{2} + \left(\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_1\right) sin\frac{\delta_1}{2} sin\frac{\delta_2}{2} =$$
$$= \left[cos\frac{\delta_1}{2} cos\frac{\delta_2}{2} - \left(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\right) sin\frac{\delta_1}{2} sin\frac{\delta_2}{2}\right] + \left[\mathbf{e}_1\, sin\frac{\delta_1}{2} cos\frac{\delta_2}{2} + \mathbf{e}_2\, cos\frac{\delta_1}{2} sin\frac{\delta_2}{2} + \left(\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_1\right) sin\frac{\delta_1}{2} sin\frac{\delta_2}{2}\right] =$$
$$= cos\frac{\delta}{2} + \mathbf{e}\, sin\frac{\delta}{2}$$

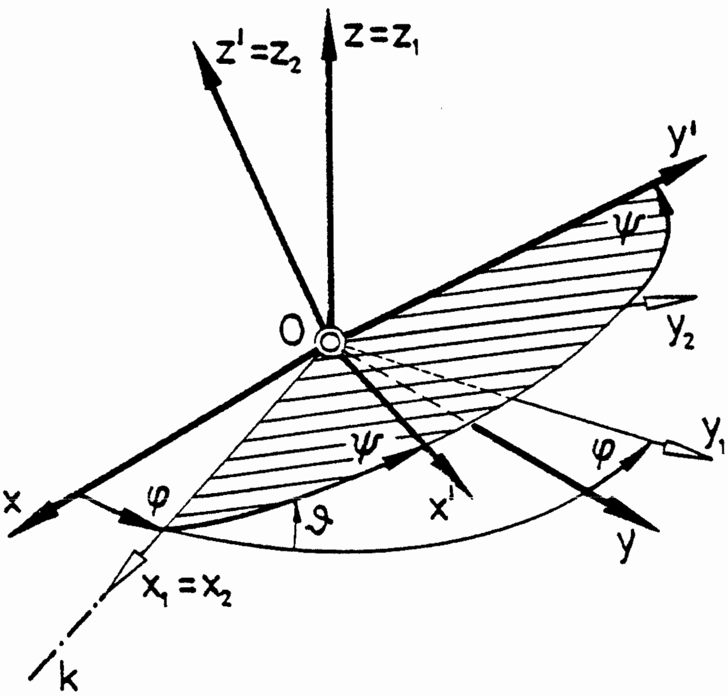
Daher gilt für die Drehquaternion

$$\boxed{\begin{aligned}
&\mathbf{D} = \cos\frac{\delta}{2} + \mathbf{e}\sin\frac{\delta}{2}\\
&\cos\frac{\delta}{2} = \cos\frac{\delta_1}{2}\cos\frac{\delta_2}{2} - (\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2)\sin\frac{\delta_1}{2}\sin\frac{\delta_2}{2}\\
&\mathbf{e}\sin\frac{\delta}{2} = \mathbf{e}_1\sin\frac{\delta_1}{2}\cos\frac{\delta_2}{2} + \mathbf{e}_2\cos\frac{\delta_1}{2}\sin\frac{\delta_2}{2} + (\mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_1)\sin\frac{\delta_1}{2}\sin\frac{\delta_2}{2}
\end{aligned}}$$

**Zusammensetzung der EULERschen Drehungen**

Wir haben das Bezugssystem(x,y,z) über die Zwischenlagen $(x_1,y_1,z_1)$, $(x_2,y_2,z_2)$ in die Endlage (x',y',z') übergeführt. Die Schnittlinie der (x,y)-Ebene mit der (x',y')- Ebene heißt Knotenlinie k. Ein mit dem bewegten System starr verbundener Punkt wird in der Anfangslage durch den Orstvektor **x**, in der Endlage durch den Ortsvektor **x'** festgelegt, die bezüglich des Ausgangssystem (x,y,z) die Koordinaten

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} \text{ bzw. } \begin{Bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{Bmatrix} \text{ haben}$$




1. Drehung um die $z_1$ - Achse

$$\mathbf{D_1} = \cos\frac{\varphi}{2} + \mathbf{e_3}\sin\frac{\varphi}{2} \qquad \mathbf{e}_3 \ldots \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

2. Drehung um die Knotenlinie k

$$\mathbf{D_2} = \cos\frac{\vartheta}{2} + \mathbf{k}^\circ \sin\frac{\vartheta}{2}, \quad \mathbf{k}^\circ = \begin{Bmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{Bmatrix}$$

3. Drehung um die $z_2 = z'$ - Achse

$$\mathbf{D_3} = \cos\frac{\psi}{2} + \mathbf{e}_3' \sin\frac{\psi}{2}$$

Der gewünschte Vektor $\mathbf{e}_3'$ geht aus $\mathbf{e}_3$ durch Drehung um die Knotenlinie k durch den Winkel $\vartheta$ hervor. Wir können daher $\mathbf{D}_2$ auf $\mathbf{e}_3$ anwenden:

$$\mathbf{e}_3' = \mathbf{D_2} \circ \mathbf{e_3} \circ \tilde{\mathbf{D}}_2$$

Einfacher ist es aber, die Quaternion

$$\mathbf{A} = \cos\vartheta + \mathbf{k}^\circ \sin\vartheta$$

zu verwenden. Dann gilt:

$$\mathbf{e}_3' = \mathbf{A} \circ \mathbf{e_3} = (\cos\vartheta + \mathbf{k}^\circ \sin\vartheta) \circ \mathbf{e}_3 = \mathbf{e_3} \cos\vartheta - (\mathbf{e}_3\mathbf{k}^\circ) \sin\vartheta + (\mathbf{k}^\circ \times \mathbf{e}_3) \sin\vartheta$$

$$\mathbf{e_3} \ldots \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{k}^\circ \times \mathbf{e}_3 \ldots \begin{Bmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sin\varphi \\ -\cos\varphi \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{e}_3' \ldots \cos\vartheta . \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} + \sin\vartheta . \begin{Bmatrix} \sin\varphi \\ -\cos\varphi \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sin\vartheta \sin\varphi \\ -\sin\vartheta \cos\varphi \\ \cos\vartheta \end{Bmatrix}$$

**Zusammensetzung von EULERschen Drehungen:**

$$\mathbf{x}' = \mathbf{D_3} \circ \mathbf{D_2} \circ \mathbf{D_1} \circ \mathbf{x} \circ \tilde{\mathbf{D}}_1 \circ \tilde{\mathbf{D}}_2 \circ \tilde{\mathbf{D}}_3 = \mathbf{D} \circ \mathbf{x} \circ \tilde{\mathbf{D}}, \qquad \mathbf{D} = \mathbf{D}_3 \circ \mathbf{D}_2 \circ \mathbf{D}_1$$

$$\mathbf{D} \ldots \left[ \cos\frac{\psi}{2} + \sin\frac{\psi}{2} \begin{Bmatrix} \sin\vartheta \sin\varphi \\ -\sin\vartheta \cos\varphi \\ \cos\vartheta \end{Bmatrix} \right] \circ \left[ \cos\frac{\vartheta}{2} + \sin\frac{\vartheta}{2} \begin{Bmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{Bmatrix} \right] \circ \mathbf{D}_1 =$$

$$= \left[ \begin{array}{l} \cos\frac{\psi}{2}\cos\frac{\vartheta}{2} + \sin\frac{\psi}{2}\cos\frac{\vartheta}{2} \begin{Bmatrix} \sin\vartheta \sin\varphi \\ -\sin\vartheta \cos\varphi \\ \cos\vartheta \end{Bmatrix} + \cos\frac{\psi}{2}\sin\frac{\vartheta}{2} \begin{Bmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{Bmatrix} - \\ -\sin\frac{\psi}{2}\sin\frac{\vartheta}{2}\left(\underline{\sin\vartheta \sin\varphi \cos\varphi} - \underline{\sin\vartheta \cos\varphi \sin\varphi} + 0\right) + \sin\frac{\psi}{2}\sin\frac{\vartheta}{2} \begin{Bmatrix} -\cos\vartheta \sin\varphi \\ \cos\vartheta \cos\varphi \\ \sin\vartheta \end{Bmatrix} \end{array} \right] \circ \mathbf{D}_1 =$$

$$=\left[\cos\frac{\psi}{2}\cos\frac{\vartheta}{2}+\left\{\begin{matrix}\underline{\sin\frac{\psi}{2}}\cos\frac{\vartheta}{2}\sin\vartheta\,\underline{\sin\varphi}+\cos\frac{\psi}{2}\sin\frac{\vartheta}{2}\cos\varphi-\underline{\sin\frac{\psi}{2}}\sin\frac{\vartheta}{2}\cos\vartheta\,\underline{\sin\varphi}\\ \underline{-\sin\frac{\psi}{2}}\cos\frac{\vartheta}{2}\sin\vartheta\,\underline{\cos\varphi}+\cos\frac{\psi}{2}\sin\frac{\vartheta}{2}\sin\varphi+\underline{\sin\frac{\psi}{2}}\sin\frac{\vartheta}{2}\cos\vartheta\,\underline{\cos\varphi}\\ \underline{\sin\frac{\psi}{2}}\cos\frac{\vartheta}{2}\cos\vartheta\qquad\qquad\qquad+\underline{\sin\frac{\psi}{2}}\sin\frac{\vartheta}{2}\sin\vartheta\end{matrix}\right\}\right]\circ\mathbf{D}_1=$$

$$=\left[\cos\frac{\psi}{2}\cos\frac{\vartheta}{2}+\left\{\begin{matrix}\sin\frac{\psi}{2}\sin\varphi\sin\frac{\vartheta}{2}+\cos\frac{\psi}{2}\sin\frac{\vartheta}{2}\cos\varphi\\ -\sin\frac{\psi}{2}\cos\varphi\sin\frac{\vartheta}{2}+\cos\frac{\psi}{2}\sin\frac{\vartheta}{2}\sin\varphi\\ \sin\frac{\psi}{2}\cos\frac{\vartheta}{2}\end{matrix}\right\}\right]\circ\mathbf{D}_1=$$

$$=\left[\cos\frac{\psi}{2}\cos\frac{\vartheta}{2}+\left\{\begin{matrix}\sin\frac{\vartheta}{2}\cos\left(\varphi-\frac{\psi}{2}\right)\\ \sin\frac{\vartheta}{2}\sin\left(\varphi-\frac{\psi}{2}\right)\\ \cos\frac{\vartheta}{2}\sin\frac{\psi}{2}\end{matrix}\right\}\right]\circ\left[\cos\frac{\varphi}{2}+\sin\frac{\varphi}{2}\left\{\begin{matrix}0\\0\\1\end{matrix}\right\}\right]=$$

$$=\cos\frac{\psi}{2}\cos\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\varphi}{2}+\cos\frac{\varphi}{2}\left\{\begin{matrix}\sin\frac{\vartheta}{2}\cos\left(\varphi-\frac{\psi}{2}\right)\\ \sin\frac{\vartheta}{2}\sin\left(\varphi-\frac{\psi}{2}\right)\\ \cos\frac{\vartheta}{2}\sin\frac{\psi}{2}\end{matrix}\right\}+\cos\frac{\psi}{2}\cos\frac{\vartheta}{2}\sin\frac{\varphi}{2}\left\{\begin{matrix}0\\0\\1\end{matrix}\right\}-$$

$$-\sin\frac{\psi}{2}\cos\frac{\vartheta}{2}\sin\frac{\varphi}{2}+\sin\frac{\varphi}{2}\left\{\begin{matrix}\sin\frac{\vartheta}{2}\sin\left(\varphi-\frac{\psi}{2}\right)\\ -\sin\frac{\vartheta}{2}\cos\left(\varphi-\frac{\psi}{2}\right)\\ 0\end{matrix}\right\}=$$

$$=\cos\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\varphi+\psi}{2}+\left\{\begin{matrix}\cos\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\vartheta}{2}\cos\left(\varphi-\frac{\psi}{2}\right)+\sin\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\vartheta}{2}\sin\left(\varphi-\frac{\psi}{2}\right)\\ \cos\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\vartheta}{2}\sin\left(\varphi-\frac{\psi}{2}\right)-\sin\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\vartheta}{2}\cos\left(\varphi-\frac{\psi}{2}\right)\\ \cos\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\vartheta}{2}\sin\frac{\psi}{2}+\cos\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\vartheta}{2}\sin\frac{\varphi}{2}\end{matrix}\right\}$$

Daher ist

$$\boxed{\mathbf{D}\ldots cos\frac{\vartheta}{2}cos\frac{\varphi+\psi}{2}+\begin{Bmatrix} sin\frac{\vartheta}{2}cos\frac{\varphi-\psi}{2} \\ sin\frac{\vartheta}{2}sin\frac{\varphi-\psi}{2} \\ cos\frac{\vartheta}{2}sin\frac{\varphi+\psi}{2}\end{Bmatrix}}$$

Aus $\mathbf{x}' = \mathbf{D}\circ\mathbf{x}\circ\widetilde{\mathbf{D}}$ folgt weiter

$$\begin{Bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{Bmatrix} = \left[ cos\frac{\vartheta}{2}cos\frac{\varphi+\psi}{2}+\begin{Bmatrix} cos\frac{\vartheta}{2}cos\frac{\varphi-\psi}{2} \\ sin\frac{\vartheta}{2}sin\frac{\varphi-\psi}{2} \\ cos\frac{\vartheta}{2}sin\frac{\varphi+\psi}{2}\end{Bmatrix}\right]\circ\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}\circ\widetilde{\mathbf{D}} =$$

$$=\left[\begin{matrix} cos\frac{\vartheta}{2}cos\frac{\varphi+\psi}{2}\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}-\left(x\,sin\frac{\vartheta}{2}cos\frac{\varphi-\psi}{2}+y\,sin\frac{\vartheta}{2}sin\frac{\varphi-\psi}{2}+z\,cos\frac{\vartheta}{2}sin\frac{\varphi+\psi}{2}\right)+ \\ +\begin{Bmatrix} z\,sin\frac{\vartheta}{2}sin\frac{\varphi-\psi}{2}-y\,cos\frac{\vartheta}{2}sin\frac{\varphi+\psi}{2} \\ x\,cos\frac{\vartheta}{2}sin\frac{\varphi+\psi}{2}-z\,sin\frac{\vartheta}{2}cos\frac{\varphi-\psi}{2} \\ y\,sin\frac{\vartheta}{2}cos\frac{\varphi-\psi}{2}-x\,sin\frac{\vartheta}{2}sin\frac{\varphi-\psi}{2} \end{Bmatrix}\end{matrix}\right]\circ\widetilde{\mathbf{D}} =$$

$$=\left[\begin{matrix} -\left(x\,sin\frac{\vartheta}{2}cos\frac{\varphi-\psi}{2}+y\,sin\frac{\vartheta}{2}sin\frac{\varphi-\psi}{2}+z\,cos\frac{\vartheta}{2}sin\frac{\varphi+\psi}{2}\right)+ \\ +\begin{Bmatrix} x\,cos\frac{\vartheta}{2}cos\frac{\varphi+\psi}{2}-y\,cos\frac{\vartheta}{2}sin\frac{\varphi+\psi}{2}+z\,sin\frac{\vartheta}{2}sin\frac{\varphi-\psi}{2} \\ x\,cos\frac{\vartheta}{2}sin\frac{\varphi+\psi}{2}+y\,cos\frac{\vartheta}{2}cos\frac{\varphi+\psi}{2}-z\,sin\frac{\vartheta}{2}cos\frac{\varphi-\psi}{2} \\ -x\,sin\frac{\vartheta}{2}sin\frac{\varphi-\psi}{2}+y\,sin\frac{\vartheta}{2}cos\frac{\varphi-\psi}{2}+z\,cos\frac{\vartheta}{2}cos\frac{\varphi+\psi}{2} \end{Bmatrix}\end{matrix}\right]\circ$$

$$\circ\left[ cos\frac{\vartheta}{2}cos\frac{\varphi+\psi}{2}-\begin{Bmatrix} sin\frac{\vartheta}{2}cos\frac{\varphi-\psi}{2} \\ cos\frac{\vartheta}{2}sin\frac{\varphi-\psi}{2} \\ cos\frac{\vartheta}{2}sin\frac{\varphi+\psi}{2}\end{Bmatrix}\right] =$$

$$= -x\sin\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\varphi-\psi}{2}\cos\frac{\varphi+\psi}{2} - y\sin\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\vartheta}{2}\sin\frac{\varphi-\psi}{2}\cos\frac{\varphi+\psi}{2} - z\cos^2\frac{\vartheta}{2}\sin\frac{\varphi+\psi}{2}\cos\frac{\varphi+\psi}{2} +$$

$$+\left\{\begin{array}{l}
x\cos^2\frac{\vartheta}{2}\cos^2\frac{\varphi+\psi}{2} - y^2\cos\frac{\vartheta}{2}\sin\frac{\varphi+\psi}{2}\cos\frac{\varphi+\psi}{2} + z\sin\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\vartheta}{2}\sin\frac{\varphi-\psi}{2}\cos\frac{\varphi+\psi}{2} \\
x\cos^2\frac{\vartheta}{2}\sin\frac{\varphi+\psi}{2}\cos\frac{\varphi+\psi}{2} + y\cos^2\frac{\vartheta}{2}\cos^2\frac{\varphi+\psi}{2} - z\sin\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\varphi-\psi}{2}\cos\frac{\varphi+\psi}{2} \\
-x\sin\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\vartheta}{2}\sin\frac{\varphi-\psi}{2}\cos\frac{\varphi+\psi}{2} + y\sin\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\varphi-\psi}{2}\cos\frac{\varphi+\psi}{2} + z\cos^2\frac{\vartheta}{2}\cos^2\frac{\varphi+\psi}{2}
\end{array}\right\} +$$

$$+\left\{\begin{array}{l}
x\sin^2\frac{\vartheta}{2}\cos^2\frac{\varphi-\psi}{2} + y\sin^2\frac{\vartheta}{2}\sin\frac{\varphi-\psi}{2}\cos\frac{\varphi-\psi}{2} + z\sin\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\varphi-\psi}{2}\sin\frac{\varphi+\psi}{2} \\
x\sin^2\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\varphi-\psi}{2}\sin\frac{\varphi-\psi}{2} + y\sin^2\frac{\vartheta}{2}\sin^2\frac{\varphi-\psi}{2} + z\sin\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\vartheta}{2}\sin\frac{\varphi+\psi}{2}\sin\frac{\varphi-\psi}{2} \\
x\sin\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\varphi-\psi}{2}\sin\frac{\varphi+\psi}{2} + y\sin\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\vartheta}{2}\sin\frac{\varphi-\psi}{2}\sin\frac{\varphi+\psi}{2} + z\cos^2\frac{\vartheta}{2}\sin^2\frac{\varphi+\psi}{2}
\end{array}\right\} +$$

$$+x\sin\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\varphi-\psi}{2}\cos\frac{\varphi+\psi}{2} - y\sin\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\vartheta}{2}\sin\frac{\varphi+\psi}{2}\cos\frac{\varphi-\psi}{2} + z\sin^2\frac{\vartheta}{2}\sin\frac{\varphi-\psi}{2}\cos\frac{\varphi-\psi}{2} +$$

$$+x\sin\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\vartheta}{2}\sin\frac{\varphi+\psi}{2}\sin\frac{\varphi-\psi}{2} + y\sin\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\vartheta}{2}\sin\frac{\varphi-\psi}{2}\cos\frac{\varphi+\psi}{2} - z\sin^2\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\varphi-\psi}{2}\sin\frac{\varphi-\psi}{2} -$$

$$-x\sin\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\vartheta}{2}\sin\frac{\varphi-\psi}{2}\sin\frac{\varphi+\psi}{2} + y\sin\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\varphi-\psi}{2}\sin\frac{\varphi+\psi}{2} + z\cos^2\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\varphi+\psi}{2}\sin\frac{\varphi+\psi}{2} +$$

$$+\left\{\begin{array}{l}
\left[\begin{array}{l}
-x\sin^2\frac{\vartheta}{2}\sin^2\frac{\varphi-\psi}{2} + y\sin^2\frac{\vartheta}{2}\sin\frac{\varphi-\psi}{2}\cos\frac{\varphi-\psi}{2} + z\cos\frac{\vartheta}{2}\sin\frac{\vartheta}{2}\sin\frac{\varphi-\psi}{2}\cos\frac{\varphi+\psi}{2} \\
-x\cos^2\frac{\vartheta}{2}\sin^2\frac{\varphi+\psi}{2} - y\cos^2\frac{\vartheta}{2}\sin\frac{\varphi+\psi}{2}\cos\frac{\varphi+\psi}{2} + z\cos\frac{\vartheta}{2}\sin\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\varphi-\psi}{2}\sin\frac{\varphi+\psi}{2}
\end{array}\right] \\
\left[\begin{array}{l}
x\cos^2\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\varphi+\psi}{2}\sin\frac{\varphi+\psi}{2} - y\cos^2\frac{\vartheta}{2}\sin^2\frac{\varphi+\psi}{2} + z\cos\frac{\vartheta}{2}\sin\frac{\vartheta}{2}\sin\frac{\varphi-\psi}{2}\sin\frac{\varphi+\psi}{2} \\
+x\sin^2\frac{\vartheta}{2}\sin\frac{\varphi-\psi}{2}\cos\frac{\varphi-\psi}{2} - y\sin^2\frac{\vartheta}{2}\cos^2\frac{\varphi-\psi}{2} - z\cos\frac{\vartheta}{2}\sin\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\varphi+\psi}{2}\cos\frac{\varphi-\psi}{2}
\end{array}\right] \\
\left[\begin{array}{l}
x\cos\frac{\vartheta}{2}\sin\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\varphi-\psi}{2}\sin\frac{\varphi+\psi}{2} + y\cos\frac{\vartheta}{2}\sin\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\varphi+\psi}{2}\cos\frac{\varphi-\psi}{2} - z\sin^2\frac{\vartheta}{2}\cos^2\frac{\varphi-\psi}{2} \\
-x\cos\frac{\vartheta}{2}\sin\frac{\vartheta}{2}\sin\frac{\varphi-\psi}{2}\cos\frac{\varphi+\psi}{2} + y\cos\frac{\vartheta}{2}\sin\frac{\vartheta}{2}\sin\frac{\varphi-\psi}{2}\sin\frac{\varphi+\psi}{2} - z\sin^2\frac{\vartheta}{2}\sin^2\frac{\varphi-\psi}{2}
\end{array}\right]
\end{array}\right\}$$

Für den Skalarteil der Quaternion **x**' ergibt sich das selbstverständliche Resultat: x' = y' = z' = 0.
Für den *Vektorteil* folgt:

**1.Koordinate**

Koeffizient von x:

$$\cos^2\frac{\vartheta}{2}\cos^2\frac{\varphi+\psi}{2} + \sin^2\frac{\vartheta}{2}\cos^2\frac{\varphi-\psi}{2} - \sin^2\frac{\vartheta}{2}\sin^2\frac{\varphi-\psi}{2} - \cos^2\frac{\vartheta}{2}\sin^2\frac{\varphi+\psi}{2} =$$

$$= \cos^2\frac{\vartheta}{2}\cos(\varphi+\psi) + \sin^2\frac{\vartheta}{2}\cos(\varphi-\psi) =$$

$$= \cos^2\frac{\vartheta}{2}(\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi) + \sin^2\frac{\vartheta}{2}(\cos\varphi\cos\psi + \sin\varphi\sin\psi) = \underline{\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\cos\vartheta}$$

Koeffizient von y:

$$-\cos^2\frac{\vartheta}{2}\sin\frac{\varphi+\psi}{2}\cos\frac{\varphi+\psi}{2}+\sin^2\frac{\vartheta}{2}\sin\frac{\varphi-\psi}{2}\cos\frac{\varphi-\psi}{2}+\sin^2\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\varphi-\psi}{2}\sin\frac{\varphi-\psi}{2}-$$

$$-\cos^2\frac{\vartheta}{2}\sin\frac{\varphi+\psi}{2}\cos\frac{\varphi+\psi}{2}=-\cos^2\frac{\vartheta}{2}\sin(\varphi+\psi)+\sin^2\frac{\vartheta}{2}\sin(\varphi-\psi)=$$

$$=-\cos^2\frac{\vartheta}{2}(\sin\varphi\cos\psi+\sin\varphi\cos\psi)+\sin^2\frac{\vartheta}{2}(\sin\varphi\cos\psi-\sin\varphi\cos\psi)=$$

$$=\underline{-\sin\varphi\cos\psi-\sin\varphi\cos\psi\cos\vartheta}$$

Koeffizient von z:

$$\sin\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\vartheta}{2}\sin\frac{\varphi-\psi}{2}\cos\frac{\varphi+\psi}{2}+\sin\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\vartheta}{2}\sin\frac{\varphi+\psi}{2}\cos\frac{\varphi-\psi}{2}+\sin\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\vartheta}{2}\sin\frac{\varphi-\psi}{2}\cos\frac{\varphi+\psi}{2}+$$

$$+\sin\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\varphi-\psi}{2}\sin\frac{\varphi+\psi}{2}=\sin\vartheta\sin\frac{\varphi-\psi}{2}\cos\frac{\varphi+\psi}{2}+\sin\vartheta\sin\frac{\varphi+\psi}{2}\cos\frac{\varphi-\psi}{2}==\underline{\sin\vartheta\sin\varphi}$$

**2.Koordinate**:

Koeffizient von x:

$$\cos^2\frac{\vartheta}{2}\sin\frac{\varphi+\psi}{2}\cos\frac{\varphi+\psi}{2}+\sin^2\frac{\vartheta}{2}\sin\frac{\varphi-\psi}{2}\cos\frac{\varphi-\psi}{2}+\cos^2\frac{\vartheta}{2}\sin\frac{\varphi+\psi}{2}\cos\frac{\varphi+\psi}{2}+$$

$$+\sin^2\frac{\vartheta}{2}\sin\frac{\varphi-\psi}{2}\cos\frac{\varphi-\psi}{2}=\cos^2\frac{\vartheta}{2}\sin(\varphi+\psi)+\sin^2\frac{\vartheta}{2}\sin(\varphi-\psi)=$$

$$=\cos^2\frac{\vartheta}{2}(\sin\varphi\cos\psi+\cos\varphi\sin\psi)+\sin^2\frac{\vartheta}{2}(\sin\varphi\cos\psi-\cos\varphi\sin\psi)=\underline{\sin\varphi\cos\psi+\cos\varphi\sin\psi\cos\vartheta}$$

Koeffizient von y:

$$\cos^2\frac{\vartheta}{2}\cos^2\frac{\varphi+\psi}{2}+\sin^2\frac{\vartheta}{2}\sin^2\frac{\varphi-\psi}{2}-\cos^2\frac{\vartheta}{2}\sin^2\frac{\varphi+\psi}{2}-\sin^2\frac{\vartheta}{2}\cos^2\frac{\varphi-\psi}{2}=$$

$$=\cos^2\frac{\vartheta}{2}\cos(\varphi+\psi)-\sin^2\frac{\vartheta}{2}\cos(\varphi-\psi)=\cos^2\frac{\vartheta}{2}(\cos\varphi\cos\psi-\sin\varphi\sin\psi)-$$

$$-\sin^2\frac{\vartheta}{2}(\cos\varphi\cos\psi+\sin\varphi\sin\psi)=\underline{-\sin\varphi\sin\psi+\cos\varphi\cos\psi\cos\vartheta}$$

Koeffizient von z:

$$-\sin\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\varphi-\psi}{2}\cos\frac{\varphi+\psi}{2}+\sin\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\vartheta}{2}\sin\frac{\varphi-\psi}{2}\sin\frac{\varphi+\psi}{2}+\sin\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\vartheta}{2}\sin\frac{\varphi-\psi}{2}\sin\frac{\varphi+\psi}{2}-$$

$$-\sin\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\varphi-\psi}{2}\cos\frac{\varphi+\psi}{2}=-\sin\vartheta\cos\frac{\varphi-\psi}{2}\cos\frac{\varphi+\psi}{2}+\sin\vartheta\sin\frac{\varphi-\psi}{2}\sin\frac{\varphi+\psi}{2}=$$

$$=\underline{-\sin\vartheta\cos\varphi}$$

**3.Koordinate:**

Koeffizient von x:

$$-\sin\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\vartheta}{2}\sin\frac{\varphi-\psi}{2}\cos\frac{\varphi+\psi}{2}+\sin\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\vartheta}{2}\sin\frac{\varphi+\psi}{2}\cos\frac{\varphi-\psi}{2}+\sin\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\varphi-\psi}{2}\sin\frac{\varphi+\psi}{2}-$$

$$-\sin\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\vartheta}{2}\sin\frac{\varphi-\psi}{2}\cos\frac{\varphi+\psi}{2}=-\sin\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\vartheta}{2}\sin\frac{\varphi-\psi}{2}\cos\frac{\varphi+\psi}{2}+\sin\vartheta\cos\frac{\varphi-\psi}{2}\sin\frac{\varphi+\psi}{2}=$$

$$=\underline{\sin\vartheta\sin\psi}$$

Koeffizient von y:

$$\sin\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\varphi-\psi}{2}\cos\frac{\varphi+\psi}{2}+\sin\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\vartheta}{2}\sin\frac{\varphi-\psi}{2}\sin\frac{\varphi+\psi}{2}+\sin\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\varphi-\psi}{2}\cos\frac{\varphi+\psi}{2}+$$

$$+\sin\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\vartheta}{2}\sin\frac{\varphi-\psi}{2}\sin\frac{\varphi+\psi}{2}=\sin\vartheta\cos\frac{\varphi-\psi}{2}\cos\frac{\varphi+\psi}{2}+\sin\vartheta\sin\frac{\varphi-\psi}{2}\sin\frac{\varphi+\psi}{2}=$$

$$=\underline{\sin\vartheta\cos\varphi}$$

Koeffizient von z

$$\cos^2\frac{\vartheta}{2}\cos^2\frac{\varphi+\psi}{2}+\cos^2\frac{\vartheta}{2}\sin^2\frac{\varphi+\psi}{2}-\sin^2\frac{\vartheta}{2}\cos^2\frac{\varphi-\psi}{2}-\sin^2\frac{\vartheta}{2}\sin^2\frac{\varphi-\psi}{2}=$$

$$=\cos^2\frac{\vartheta}{2}-\sin^2\frac{\vartheta}{2}=\underline{\cos\vartheta}$$

Für die Zusammensetzung der EULERschen Drehungen ergibt sich daher:

$$\boxed{\begin{array}{lll}
x'=(\cos\varphi\cos\psi-\sin\varphi\sin\psi\cos\vartheta)x & -(\cos\varphi\sin\psi+\sin\varphi\cos\psi\cos\vartheta)y & +(\sin\varphi\sin\vartheta)z\\
y'=(\sin\varphi\cos\psi+\cos\varphi\sin\psi\cos\vartheta)x & -(\sin\varphi\sin\psi-\cos\varphi\cos\psi\cos\vartheta)y & -(\cos\varphi\sin\vartheta)z\\
z'=\qquad(\sin\psi\sin\vartheta)x & +(\cos\psi\sin\vartheta)y & +(\cos\vartheta)z
\end{array}}$$

Aus dieser Darstellung folgt,daß sich die Koordinaten einer Drehung um O in folgender Weise transformieren:

$$\begin{aligned}
x' &= c_{11}x+c_{12}y+c_{13}z\\
y' &= c_{21}x+c_{22}y+c_{23}z \qquad\qquad (\Delta)\\
z' &= c_{31}x+c_{32}y+c_{33}z
\end{aligned}$$

Wie sind die $c_{ij}$ zu wählen, daß durch dieses System eine gleichsinnige Kongruenz dargestellt wird? Dann gelten folgende Forderungen:

1: Die *Kongruenz* muß die Länge und Winkel der transformierten Vektoren erhalten: $|\mathbf{x}| = |\mathbf{x}'|$; $\angle(\mathbf{xy}) = \angle(\mathbf{x}'\mathbf{y}')$
2. Die *Gleichsinnigkeit* folgt aus der Forderung, daß das Volumen des von drei Vektoren aufgespannten Parallelepipeds der Größe und dem Vorzeichen nach erhalten bleibt: $(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}) = (\mathbf{x}',\mathbf{y}',\mathbf{z}')$

Anwendung dieser Forderung auf die Basivektoren:

1. Forderung: $\mathbf{e}_1\to\mathbf{e}_1'\ldots\begin{Bmatrix}1\\0\\0\end{Bmatrix}\to\begin{Bmatrix}c_{11}\\c_{21}\\c_{31}\end{Bmatrix},\quad \mathbf{e}_2\to\mathbf{e}_2'\ldots\begin{Bmatrix}0\\1\\0\end{Bmatrix}\to\begin{Bmatrix}c_{12}\\c_{22}\\c_{32}\end{Bmatrix},\quad \mathbf{e}_3\to\mathbf{e}_3'\ldots\begin{Bmatrix}0\\0\\1\end{Bmatrix}\to\begin{Bmatrix}c_{13}\\c_{23}\\c_{33}\end{Bmatrix}$

allgemein: $\mathbf{e}_i\to\mathbf{e}_i'\cdots\begin{Bmatrix}c_{1i}\\c_{2i}\\c_{3i}\end{Bmatrix}$

Es muß also gelten

$$\boxed{\begin{aligned}&|\mathbf{e}_i|^2 = |\mathbf{e}_i'|^2 = c_{1i}^2 + c_{2i}^2 + c_{3i}^2 = 1, \quad i = 1,2,3 \\ &\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j = \mathbf{e}_i'\mathbf{e}_j' = c_{1i}c_{1j} + c_{2i}c_{2j} + c_{3i}c_{3j} = 0, \quad i \neq j, \quad i,j = 1\,2\,3\end{aligned}} \qquad (*)$$

eine Matrix mit der Eigenschaft (*) heißt orthogonale Matrix

$$\boxed{\text{2. Forderung:} \quad (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = (\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2', \mathbf{e}_3') = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix} = +1}$$

$M^{-1} = M^T$

Die 2.Forderung folgt nicht aus (*), denn daraus würde bloß folgen

$$(\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2', \mathbf{e}_3')^2 = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)^2 = \begin{vmatrix} |\mathbf{e}_1|^2 & \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_1\mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 & |\mathbf{e}_2|^2 & \mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}_3\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_3\mathbf{e}_2 & |\mathbf{e}_3|^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Da umgekehrt die EULERsche Darstellung diesen Bedingungen genügt, sind Die Forderungen 1. und 2. *notwendig* und *hinreichend* für eine Drehung um O
Vergleicht man die Darstellung ($\Delta$) mit der Darstellung durch inhomogene EULERsche Parameter

$$x' = (\lambda_o^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2 - \lambda_3^2)x + 2(\lambda_1\lambda_2 - \lambda_0\lambda_3)y + 2(\lambda_0\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3)z$$
$$y' = 2(\lambda_0\lambda_3 + \lambda_1\lambda_2)x + (\lambda_o^2 - \lambda_1^2 + \lambda_2^2 - \lambda_3^2)y + 2(\lambda_2\lambda_3 - \lambda_0\lambda_1)z$$
$$z' = 2(\lambda_1\lambda_3 - \lambda_0\lambda_2)x + 2(\lambda_0\lambda_1 + \lambda_2\lambda_3)y + (\lambda_o^2 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2 + \lambda_3^2)z$$

$$\lambda_o^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 1, \quad \lambda_0 = \cos\frac{\delta}{2}, \quad d\ldots\begin{Bmatrix}\lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3\end{Bmatrix}$$

so findet man

$$c_{11} = (\lambda_o^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2 - \lambda_3^2), \quad c_{12} = 2(\lambda_1\lambda_2 - \lambda_0\lambda_3), \quad c_{13} = 2(\lambda_0\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3)$$
$$c_{21} = 2(\lambda_0\lambda_3 + \lambda_1\lambda_2), \quad c_{22} = (\lambda_o^2 - \lambda_1^2 + \lambda_2^2 - \lambda_3^2), \quad c_{23} = 2(\lambda_2\lambda_3 - \lambda_0\lambda_1)$$
$$c_{31} = 2\quad(\lambda_1\lambda_3 - \lambda_0\lambda_2), \quad c_{12} = 2(\lambda_0\lambda_1 + \lambda_2\lambda_3), \quad c_{33} = (\lambda_o^2 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2 + \lambda_3^2)$$

Daraus ergibt sich

$$4\lambda_o^2 = c_{11} + c_{22} + c_{33} + 1, \quad 4\lambda_2^2 = -c_{11} + c_{22} - c_{33} + 1$$
$$4\lambda_1^2 = c_{11} - c_{22} - c_{33} + 1, \quad 4\lambda_3^2 = -c_{11} - c_{22} + c_{33} + 1$$

wobei die Vorzeichen so zu wählen sind, daß gilt

$$c_{21} - c_{12} = 4\lambda_0\lambda_3, \quad c_{21} + c_{12} = 4\lambda_1\lambda_2$$
$$c_{32} - c_{23} = 4\lambda_0\lambda_1, \quad c_{32} + c_{23} = 4\lambda_2\lambda_3$$
$$c_{13} - c_{31} = 4\lambda_0\lambda_2, \quad c_{13} + c_{31} = 4\lambda_1\lambda_3$$

Durch diese Beziehungen sind die $\lambda i$ bis auf den gemeinsamen Faktor $\pm 1$ bestimmt.

**Berechnung der EULERschen Winkel**

Gegeben sei das Gleichungssystem $(\Delta)$.

Es war $\mathbf{e}_i' \ldots \begin{Bmatrix} c_{1i} \\ c_{2i} \\ c_{3i} \end{Bmatrix}$. Dann gilt für die Knotenlinie $\mathbf{k} = \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_3' \ldots \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} c_{13} \\ c_{23} \\ c_{33} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -c_{23} \\ c_{13} \\ 0 \end{Bmatrix}$

$$\mathbf{k}^\circ \ldots \frac{1}{\sqrt{c_{13}^2 + c_{23}^2}} \begin{Bmatrix} -c_{23} \\ c_{13} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Für die 1.EULERsche Drehung gilt dann

$$\mathbf{A_1} = \mathbf{k}^\circ \circ \mathbf{e}_1^{-1} = -\mathbf{k}^\circ \circ \mathbf{e}_1 = \cos\varphi + \mathbf{e}_3 \sin\varphi$$

$$-\frac{1}{\sqrt{c_{13}^2 + c_{23}^2}} \begin{Bmatrix} -c_{23} \\ c_{13} \\ 0 \end{Bmatrix} \circ \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = -\frac{1}{\sqrt{c_{13}^2 + c_{23}^2}} \left[ c_{23} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -c_{13} \end{Bmatrix} \right] = -\frac{c_{23}}{\sqrt{c_{13}^2 + c_{23}^2}} + \frac{c_{13}}{\sqrt{c_{13}^2 + c_{23}^2}} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Daher

$$\boxed{\cos\varphi = -\frac{c_{23}}{\sqrt{c_{13}^2 + c_{23}^2}}, \quad \sin\varphi = \frac{c_{13}}{\sqrt{c_{13}^2 + c_{23}^2}}}$$

Für die 2.EULERsche Drehung gilt

$$\mathbf{A_2} = \mathbf{e}_3' \circ \mathbf{e}_3^{-1} = -\mathbf{e}_3' \circ \mathbf{e}_3 = \cos\vartheta + \mathbf{k}^\circ \sin\vartheta$$

$$-\begin{Bmatrix} c_{13} \\ c_{23} \\ c_{33} \end{Bmatrix} \circ \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} = c_{33} - \begin{Bmatrix} c_{23} \\ -c_{13} \\ 0 \end{Bmatrix} = c_{33} + \begin{Bmatrix} -c_{23} \\ c_{13} \\ 0 \end{Bmatrix} = c_{33} + \sqrt{c_{13}^2 + c_{23}^2}\,.\mathbf{k}^\circ$$

$$\boxed{\cos\vartheta = c_{33}, \quad \sin\vartheta = \sqrt{c_{13}^2 + c_{23}^2}}$$

Für die 3.EULERsche Drehung gilt

$$\mathbf{A_3} = \mathbf{e}_1' \circ \left(\mathbf{k}^\circ\right)^{-1} = -\mathbf{e}_1' \circ \mathbf{k}^\circ = \cos\psi + \mathbf{e}_3' \sin\psi$$

$$-\begin{Bmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ c_{31} \end{Bmatrix} \circ \frac{1}{\sqrt{c_{13}^2 + c_{23}^2}} \begin{Bmatrix} -c_{23} \\ c_{13} \\ 0 \end{Bmatrix} = -\frac{1}{\sqrt{c_{13}^2 + c_{23}^2}} \left[ \left(c_{11}c_{23} - c_{21}c_{13}\right) + \begin{Bmatrix} -c_{13}c_{31} \\ -c_{23}c_{31} \\ c_{11}c_{13} + c_{21}c_{23} \end{Bmatrix} \right]$$

Nun gilt

$$\mathbf{e}_1'\mathbf{e}_3' = c_{11}c_{13} + c_{21}c_{23} + c_{31}c_{33} = 0 \Rightarrow c_{11}c_{13} + c_{21}c_{23} = -c_{31}c_{33}$$

Daher läßt sich obiger Ausdruck folgender maßen umformen

$$= -\frac{1}{\sqrt{c_{13}^2 + c_{23}^2}}\left[\left(c_{11}c_{23} - c_{21}c_{13}\right) + \begin{Bmatrix} -c_{13}c_{31} \\ -c_{23}c_{31} \\ -c_{31}c_{33} \end{Bmatrix}\right] = \frac{c_{21}c_{13} - c_{11}c_{23}}{\sqrt{c_{13}^2 + c_{23}^2}} + \frac{c_{31}}{\sqrt{c_{13}^2 + c_{23}^2}}\begin{Bmatrix} c_{13} \\ c_{23} \\ c_{33} \end{Bmatrix}$$

$$\boxed{\cos\psi = \frac{c_{21}c_{13} - c_{11}c_{23}}{\sqrt{c_{13}^2 + c_{23}^2}}, \quad \sin\psi = \frac{c_{31}}{\sqrt{c_{13}^2 + c_{23}^2}}}$$

## Koaxiale Quaternionen

Wir betrachten jetzt nur Quaternionen mit linear abhängigen Achsen. O.B.d.A. können wir voraussetzen, daß alle Achsen vom Vektor $\mathbf{e}_3$ einer orthonormierten Basis abhängig sind. Dann gilt

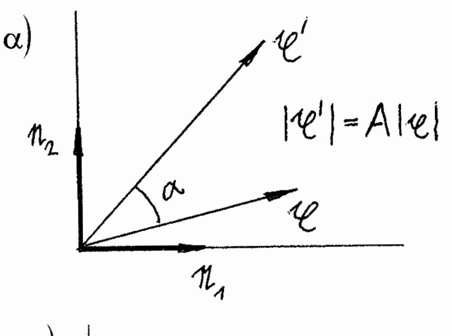
$$\mathbf{A} = a_0 + a_1\mathbf{e}_3$$

Das Produkt koaxialer Quaternionen ist kommutativ. Es gilt also

$$\mathbf{A} \circ \mathbf{B} = \mathbf{B} \circ \mathbf{A} = \left(a_0 + a_1\mathbf{e}_3\right) \circ \left(b_0 + b_1\mathbf{e}_3\right) = \left(a_0b_0 - a_1b_1\right) + \left(a_0b_1 + a_1b_0\right)\mathbf{e}_3.$$

Es ergibt sich also wieder eine mit den gegebenen Quaternionen koaxiale Quaternion. Jede Quaternion erzeugt in der zu ihrer Achse normalen Ebene eine *Drehstreckung*, speziell eine Drehung. Zerlegen wir die Quaternion **A** in den Streckungsanteil A und den Drehungsanteil, so bewirkt die Quaternion

$$\mathbf{A} = A\left(\cos\alpha + \mathbf{e}_3 \sin\alpha\right)$$




in der $\mathbf{e}_1$-$\mathbf{e}_2$-Ebene. eine Drehstreckung. Setzen wir

$$\mathbf{x} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2$$
$$\mathbf{x}' = x'\mathbf{e}_1 + y'\mathbf{e}_2$$

so folgt

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A} \circ \mathbf{x} \Rightarrow x'\mathbf{e}_1 + y'\mathbf{e}_2 = A\left(\cos\alpha + \mathbf{e}_3 \sin\alpha\right) \circ \left(x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2\right) \quad |\circ\mathbf{e}_1$$

Multipliziert man diese Beziehung von rechts mit $\mathbf{e}_1$, so ergibt sich

$$x'\mathbf{e}_1 \circ \mathbf{e}_1 + y'\mathbf{e}_2 \circ \mathbf{e}_1 = A\left(\cos\alpha + \mathbf{e}_3 \sin\alpha\right) \circ \left(x\mathbf{e}_1 \circ \mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 \circ \mathbf{e}_1\right)$$

das ergibt

$$-\mathbf{x}' - \mathbf{y}'\mathbf{e}_3 = \mathbf{A}(\cos\alpha + \mathbf{e}_3 \sin\alpha) \circ (-\mathbf{x} - \mathbf{y}\mathbf{e}_3)$$

also

$$\mathbf{x}' + \mathbf{y}'\mathbf{e}_3 = \mathbf{A}(\cos\alpha + \mathbf{e}_3 \sin\alpha) \circ (\mathbf{x} + \mathbf{y}\mathbf{e}_3)$$

Diese Formel ist insoferne bemerkenswert, als in ihr nur $\mathbf{e}_3$ vorkommt, wobei nur mehr auf die Rechenregel

$$\boxed{\mathbf{e}_3 \circ \mathbf{e}_3 = -1}$$

zu achten ist. Nun gilt aber

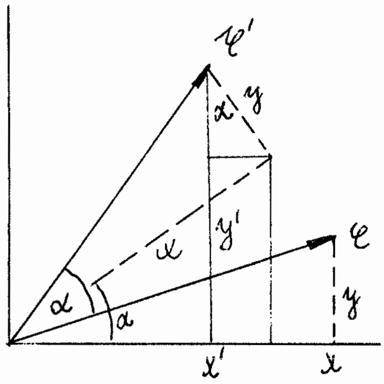
$$i.i = -1$$

Identifizieren wir daher

$$\mathbf{e}_3 \equiv i$$

so kann man schreiben

$$\boxed{x' + i\,y' = A(\cos\alpha + i.\sin\alpha)(x + i\,y)}$$




Das ist aber die komplexe Schreibweise für eine Drehstreckung in der GAUSSschen Zahlenebene. Speziell gilt für die Drehung

$$x' + i\,y' = (\cos\alpha + i.\sin\alpha)(x + i\,y)$$

Trennung von Real- und Imaginärteil liefert die bekannte *Drehungsformel* der Ebene um O:

$$\boxed{\begin{aligned} x' &= x\cos\alpha - y\sin\alpha \\ y' &= x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{aligned}}$$

Man kann die Quaternionen als Verallgemeinerungen der komplexen Zahlen betrachten. Die Elemente

$$\mathbf{A} = a_0\mathbf{e}_0 + a_1\mathbf{e}_1 + a_2\,\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3 \qquad a_1 \in \Re, \qquad \mathbf{e}_0 := 1$$

sind also *höhere komplexe Zahlen* (*hyperkomplexe Zahlen*, *R-Algebra*) mit den Einheiten $\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$.

Die Teilmenge mit $a_2 = a_3 = 0$ ist isomorph zur Menge der komplexen Zahlen. Die Elemente $\mathbf{e}_0 \equiv 1$, $\mathbf{e} \equiv i$, $-\mathbf{e}_0$, $-\mathbf{e}$ bilden eine viergliedrige zyklische Gruppe. Die *Verknüpfungstafel* für die Einheite $\mathbf{e}_0$, $\mathbf{e}$ $-\mathbf{e}_0$, $-\mathbf{e}_1$ lautet

| o | $\mathbf{e}_0$ | $\mathbf{e}_1$ | $-\mathbf{e}_0$ | $-\mathbf{e}_1$ |
|---|---|---|---|---|
| $\mathbf{e}_0$ | $\mathbf{e}_0$ | $\mathbf{e}_1$ | $-\mathbf{e}_0$ | $-\mathbf{e}_1$ |
| $\mathbf{e}_1$ | $\mathbf{e}_1$ | $-\mathbf{e}_0$ | $-\mathbf{e}_1$ | $\mathbf{e}_0$ |
| $-\mathbf{e}_0$ | $-\mathbf{e}_0$ | $-\mathbf{e}_1$ | $\mathbf{e}_0$ | $\mathbf{e}_1$ |
| -el | $-\mathbf{e}_1$ | $\mathbf{e}_0$ | $\mathbf{e}_1$ | $-\mathbf{e}_0$ |

Wegen $\mathbf{e}_1^1 = \mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_1^2 = -\mathbf{e}_0$, $\mathbf{e}_1^3 = -\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_1^4 = \mathbf{e}_0$ ist die Gruppe zyklisch.

# Der Ring dualer Zahlen

Wir betrachten die Menge $\Re\times\Re$. Dann gilt für zwei Elemente

$$(a,\hat{a}),(b,\hat{b})\in\Re\times\Re:$$

$$(a,\hat{a})=(b,\hat{b})\Leftrightarrow a=b\wedge\hat{a}=\hat{b}$$

In $\Re\times\Re$ führen wir folgende Verknüpfungen ein:

1. Addition

$$(a,\hat{a})+(b,\hat{b}):=(a+b,\hat{a}+\hat{b})=(b,\hat{b})+(a,\hat{a})$$

$(0,0)\ldots$Nullelement, Neutrales Element der Addition

$-(a,\hat{a}):=(-a,-\hat{a})\ldots$zu $(a,\hat{a})$ entgegengesetztes Element

Die Addition erfüllt demnach die Axiome einer *kommutativen Gruppe*. Jedes Element läßt sich in folgender Weise als Summe zweier spezieller Elemente darstellen:

$$(a,\hat{a})=(a,0)+(0,\hat{a})$$

2. Multiplikation

$$(a,\hat{a}).(b,\hat{b}):=(ab,a\hat{b}+\hat{a}b)=(b,\hat{b}).(a,\hat{a})$$

$(1,0)\ldots$Einselement, neutrales Element der Multiplikation

$$(1,0).(a,\hat{a})=(a,\hat{a})$$

Das so definierte Produkt ist *kommutativ*; es ist auch *assoziativ*:

$$\underline{[(a,\hat{a}).(b,\hat{b})].(c,\hat{c})}=(ab,a\hat{b}+\hat{a}b).(c,\hat{c})=\underline{((ab)c,(ab)\hat{c}+(a\hat{b}+\hat{a}b)c)}$$

$$\underline{(a,\hat{a}).[(b,\hat{b}).(c,\hat{c})]}=(a,\hat{a}).(bc,b\hat{c}+\hat{b}c)=\underline{(a(bc),a(b\hat{c}+\hat{b}c)+\hat{a}(bc))}$$

Das Produkt ist auch bezüglich der Addition *distributiv*

$$\underline{[(a,\hat{a})+(b,\hat{b})].(c,\hat{c})}=(a+b,\hat{a}+\hat{b}).(c,\hat{c})=((a+b)c,(a+b)\hat{c}+(\hat{a}+\hat{b})c)=(ac+bc,(a\hat{c}+\hat{a}c)+(b\hat{c}+\hat{b}c))=$$

$$=(ac,a\hat{c}+\hat{a}c)+(bc,b\hat{c}+\hat{b}c)=\underline{(a,\hat{a}).(c,\hat{c})+(b,\hat{b}).(c,\hat{c})}$$

Die Menge $\Re\times\Re$, versehen mit diesen beiden Verknüpfungen, bezeichnen wir mit $\mathbb{D}$ und nennen sie die Menge der *dualen Zahlen*
Die Menge der dualen Zahlen bildent einen *kommutativen Ring mit Einselement.*

**Spezielle Ringelemente**

$$(a,0)+(b,0)=(a+b,0)$$

$$(a,0).(b,0)=(ab,0)$$

Die Menge der speziellen dualen Zahlen der Gestalt $(a,0)$ ist *isomorph* zu $\Re$. Wir werden daher identifizieren:

$$(a,0)\equiv a$$

Ferner gilt

$$\underline{(a,0).(b,\hat{b})}=(ab,a\hat{b})=\underline{a(b,\hat{b})}$$

Für das Produkt einer reellen Zahl $\lambda$ mit einer dualen Zahl gilt demnach

$$\lambda(a,\hat{a}) = (\lambda a, \lambda\hat{a})$$

Wir können daher jede spezielle duale Zahl der Form $(a,0)$ in der Gestalt $(a,0) = a(1,0)$ schreiben und identifizieren

$$\boxed{(1,0) \equiv 1 \ldots \textit{\textbf{reelle Einheit}}}$$

Analog gilt

$(0,\hat{a}) = \hat{a}(0,1)$

Wir setzen

$\varepsilon := (0,1) \ldots$ ***duale Einheit***

Für die *duale Einheit* $\varepsilon$ gilt

$$\boxed{\varepsilon^2 = (0,1).(0,1) = (0,0) \equiv 0}$$

Jedes Element von $\mathbb{D}$ kann daher dargestellt werden in der Gestalt

$$\boxed{\begin{array}{c} (a,\hat{a}) = \underline{a} = (a,0) + (0,\hat{a}) = a + \hat{a}\varepsilon, \quad \varepsilon^2 = 0 \\ a \ldots \textit{\textbf{Realteil}} \\ \hat{a} \ldots \textit{\textbf{Dualteil}} \end{array}}$$

Mit dieser Schreibweise gilt

$$\underline{a} + \underline{b} = (a + \hat{a}\varepsilon) + (b + \hat{b}\varepsilon) = (a + b) + (\hat{a} + \hat{b})\varepsilon$$

$$\underline{a}.\underline{b} = (a + \hat{a}\varepsilon).(b + \hat{b}\varepsilon) = ab + (a\hat{b} + \hat{a}b)\varepsilon$$

Elemente der Bauart $\underline{a} = \hat{a}\varepsilon$ **heißen** *rein dual.* Für sie gilt

$$\underline{a}.\underline{b} = (\hat{a}\varepsilon)(\hat{b}\varepsilon) = \hat{a}\hat{b}\varepsilon^2 = 0$$

Der Ring $\mathbb{D}$ enthält also *Nullteiler*. Die Menge $\mathbf{I} \in \mathbb{D}$ der Nullteiler wird also von den *rein dualen Zahlen* gebildet. $\mathbb{D}$ ist demnach kein Integritätsring Daher ist $\mathbb{D}$ auch kein *Körper*. In einem Körper muß die Gleichung $\underline{a}.\underline{x} = \underline{b}$ für jedes $\underline{a} \neq 0$ lösbar sein. Bei uns hingegen gilt

$$(a + \hat{a}\varepsilon).(x + \hat{x}\varepsilon) = b + \hat{b}\varepsilon \Rightarrow ax + \varepsilon(a\hat{x} + \hat{a}x) = b + \hat{b}\varepsilon \Rightarrow ax = b \wedge a\hat{x} + \hat{a}x = \hat{b}$$

$x = \dfrac{b}{a}$ existiert also stets, wenn $a \neq 0$ ist. In diesem Falle gilt

$$a\hat{x} + \hat{a}x = a\hat{x} + \frac{b\hat{a}}{a} = \hat{b} \Rightarrow \hat{x} = \frac{\hat{b}}{a} - \frac{\hat{a}b}{a^2} = \frac{a\hat{b} - \hat{a}b}{a^2}$$

Daher

$$x + \varepsilon\hat{x} = \frac{b}{a} + \varepsilon\frac{a\hat{b} - \hat{a}b}{a^2}$$

Dieses Resultat kann man auch formal durch folgende Rechnung erhalten

$$(a + \varepsilon\hat{a}).(x + \varepsilon\hat{x}) = (b + \varepsilon\hat{b}) \Rightarrow x + \varepsilon\hat{x} = \frac{b + \varepsilon\hat{b}}{a + \varepsilon\hat{a}} = \frac{(b + \varepsilon\hat{b}).(a - \varepsilon\hat{a})}{(a + \varepsilon\hat{a}).(a - \varepsilon\hat{a})} = \frac{ab + \varepsilon(a\hat{b} - \hat{a}b)}{a^2} =$$

$$= \underline{\frac{b}{a} + \varepsilon\frac{a\hat{b} - \hat{a}b}{a^2}}$$

Speziell gibt es zu jedem $a + \varepsilon\hat{a}$ mit $a \neq 0$ eine reziproke duale Zahl

$$\frac{1}{a + \varepsilon\hat{a}} = \frac{a - \varepsilon\hat{a}}{a^2} = \frac{1}{a} - \varepsilon\frac{\hat{a}}{a}$$

Die Menge $\mathbb{D}\backslash\mathbb{I}$ bildet die *Einheitengruppe* von $\mathbb{D}$. Sie umfaßt jene Elemente, zu denen es reziproke Elemente gibt (die sogenannten *Einheiten* von $\mathbb{D}$).
Wir nennen

$$\boxed{\underline{a}_\varepsilon := a - \varepsilon\hat{a}}$$

die $\varepsilon$-*Konjugierte* von $\underline{a}$. ($\varepsilon$-*Konjugium*). Es gilt

$$\boxed{(\underline{a}+\underline{b})_\varepsilon = \underline{a}_\varepsilon + \underline{b}_\varepsilon, \quad (\underline{a}.\underline{b})_\varepsilon = \underline{a}_\varepsilon.\underline{b}_\varepsilon, \quad \left(\frac{\underline{a}}{\underline{b}}\right)_\varepsilon = \frac{\underline{a}_\varepsilon}{\underline{b}_\varepsilon}}$$

**Algebraische Anmerkung**

Die Menge $\mathbb{I} \in \mathbb{D}$ der reindualen Zahlen hat folgende Eigenschaften. Sie ist

Ideal von $\mathbb{D}$ $\Leftrightarrow \{\underline{a},\underline{b} \in \mathbb{I} \Rightarrow (\underline{a}-\underline{b} \in \mathbb{I}) \wedge (\underline{a} \in \mathbb{I}, \underline{r} \in \mathbb{D} \Rightarrow \underline{a}\,\underline{r} \in \mathbb{I}$

Teilerloses Ideal $\equiv$ maximales Ideal von $\mathbb{D}$ $\Leftrightarrow$ Größte Ideal in $\mathbb{I}$

a Erz. Elem von $\mathbb{I}$ $\Rightarrow$ $\mathbb{I}$ besteht aus allen Ele. Hauptideal von $\mathbb{D}$ der Gestalt $\Leftrightarrow$ $a$ ist, $ra + n\cdot a \in \mathbb{I}$, $r \in \mathbb{D}$, $n \in \mathbb{Z}$

Primideal von $\mathbb{D}$ *

Die dualen Zahlen wurden von William Kingdon CLIFFORD (1845-1879) 1873 eingeführt.

* Restklassenring von $\mathbb{D}/\mathbb{I}$ ist ein Integritätsring

## Synektische Funktionen

Wir übertragen den Begriff der durch Potenzreihen

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad (*)$$

darstellbaren Funktionen ins Duale:

$$\underline{f}(\underline{x})=\sum_{n=0}^{\infty} \underline{a}_n \underline{x}^n \qquad (**)$$

Dabei ist

$$\underline{x}=x+\varepsilon\,\hat{x},\quad \underline{a}_n=a_n+\varepsilon\,\hat{a}_n$$

Anwendung des binomischen Lehrsatzes ergibt

$$\underline{x}^n=(x+\varepsilon\hat{x})^n=x^n+nx^{n-1}\hat{x}\varepsilon$$

Daher gilt

$$\underline{f}(\underline{x})=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+\varepsilon\hat{a}_n)(x^n+nx^{n-1}\hat{x}\varepsilon)=\sum_{n=0}^{\infty}\left[a_n x^n+\varepsilon(na_n\hat{x}x^{n-1}+\hat{a}_n x^n)\right]$$

Daher gilt

$$\boxed{\underline{f}(\underline{x})=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n+\varepsilon\left[\hat{x}\sum_{n=0}^{\infty}na_n x^{n-1}+\sum_{n=0}^{\infty}\hat{a}_n x^n\right] \qquad (***)}$$

Wir nennen (**) konvergent, wenn in (***) alle reellen Potenzreihen konvergieren. Dann gelten die Differentiationsregeln

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n \Rightarrow f'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}na_n x^{n-1}$$

Setzen wir noch

$$\varphi(x):=\sum_{n=0}^{\infty}\hat{a}_n x^n$$

so gilt

$$\boxed{\begin{array}{l}\underline{f}(\underline{x})=f(x)+\varepsilon[\hat{x}\,f'(x)+\varphi(x)]\\ \underline{x}=x+\varepsilon\hat{x},\quad f(x),\varphi(x)\ldots\text{reelle Funktionen}\end{array}}$$

Die so definierten Funktionen heißen *synektische Funktionen*. Sie wurden von Eduard STUDY (1862-1939) eingeführt.

**Erweiterung einer reellen Funktion ins Duale**

Es sollen in gegebenen *reellen Funktionen* duale Argumente zugelassen werden. In diesem Falle haben wir in (**) $\hat{a}_n\equiv 0$ zu setzen, was $\varphi(x)\equiv 0$ zur Folge hat. Für die reelle Funktion $f(x)$ ergibt daher die Erweiterung ins Duale

$$\boxed{f(\underline{x})=f(x)+\varepsilon\,\hat{x}\,f'(x),\quad \underline{x}=x+\varepsilon\,\hat{x}}$$

**Beispiele**:

$$\boxed{\begin{array}{l} \underline{x}^n = x^n + \varepsilon\hat{x}.nx^{n-1} \\ \sqrt{\underline{x}} = \sqrt{x} + \varepsilon\dfrac{\hat{x}}{2\sqrt{x}} \\ \sin\underline{x} = \sin x + \varepsilon\hat{x}\cos x \\ \cos\underline{x} = \cos x - \varepsilon\hat{x}\sin x \end{array}}$$

Die im Reellen gültigen Formeln der Trigonometrie gelten auch für duale Argumente. Im Reellen gilt z.B.:

$$\sin(x+y) = \sin x.\cos y + \cos x.\sin y$$

Die Übertragung ins Duale ergibt:

$$\sin(\underline{x}+\underline{y}) = \sin[(x+y)+\varepsilon(\hat{x}+\hat{y})] = \sin(x+y)+\varepsilon(\hat{x}+\hat{y})\cos(x+y) = \sin x\cos y + \cos x\sin y +$$

$$+\varepsilon(\hat{x}+\hat{y})(\cos x\cos y - \sin x\sin y) = \sin x\cos y + \cos x\sin y +$$

$$+\varepsilon[\hat{x}\cos x\cos y - \hat{x}\sin x\sin y + \hat{y}\cos x\cos y - \hat{y}\sin x\sin y] =$$

$$= (\sin x + \varepsilon\ \hat{x}\cos x)\cos y + (\cos x - \varepsilon\ \hat{x}\sin x)\sin y + \varepsilon\ \hat{y}(\cos x\cos y - \sin x\sin y) -$$

$$-\varepsilon^2\ \hat{x}\hat{y}(\sin x\cos y + \cos x\sin y) =$$

$$= \sin\underline{x}.\cos y + \cos\underline{x}.\sin y + \varepsilon\ \hat{y}[(\cos x - \varepsilon\ \hat{x}\sin x)\cos y - (\sin x + \varepsilon\ \hat{x}\cos x)\sin y] =$$

$$= \sin\underline{x}.\cos y + \cos\underline{x}.\sin y + \varepsilon\ \hat{y}\cos\underline{x}.\cos y - \varepsilon\ \hat{y}\sin\underline{x}.\sin y = \sin\underline{x}.[\cos y - \varepsilon\ \hat{y}\sin y] +$$

$$+\cos\underline{x}.[\sin y + \varepsilon\ \hat{y}\cos y] = \sin\underline{x}\cos\underline{y} + \cos\underline{x}\sin\underline{y}$$

Es gilt also

$$\boxed{\sin(\underline{x}+\underline{y}) = \sin\underline{x}\cos\underline{y} + \cos\underline{x}\sin\underline{y}}$$

Analoges gilt für die anderen Formeln. Speziell gilt

$$\boxed{\sin^2\underline{x} + \cos^2\underline{x} = 1}$$

## Exkurs in die Funktionentheorie

Wir betrachten Ringe R, deren Elemente folgende Bauart aufweisen

$$z = \lambda + \eta\mu \qquad \lambda,\mu \in \Re$$

**1.Fall**

$\eta^2 = -1 \ldots \eta = i$

$R = \lambda + i\mu$, R ist der Körper der komplexen Zahlen

**2.Fall**

$\eta^2 = +1 \qquad (\eta \neq \pm 1) \qquad \eta = j$

$z = \lambda + j\mu \qquad j^2 = +1$

R ist ein *kommutativer Ring mit Einselement* und *Nullteilern*. R kann daher *kein Körper* sein. Es gilt

$(1+j)(1-j) = 1 - j^2 = 0 \Rightarrow 1 \pm j \ldots$ Nullteiler

Wir suchen die *Einheiten* (*invertierbare Elemente*) von R:

$$\frac{1}{\lambda + j\mu} = \frac{\lambda - j\mu}{(\lambda + j\mu)(\lambda - j\mu)} = \frac{\lambda - j\mu}{\lambda^2 - \mu^2}$$

$z = \lambda + j\mu$ ist also eine Einheit, wenn $\lambda \neq \pm\mu$ ist

**3.Fall**

$\eta^2 = 0 \quad (\eta \neq 0) \quad \eta = \varepsilon \ldots$ R ist der Ring der dualen Zahlen

Wie bereits gezeigt, ist $z = \lambda + \varepsilon\mu$ eine Einheit, wenn $\lambda \neq 0$ ist

**Deutung der Elemente z $\in$R in der reellen Zahlenebene**

$z = x + \eta y, \qquad x, y \in \Re$

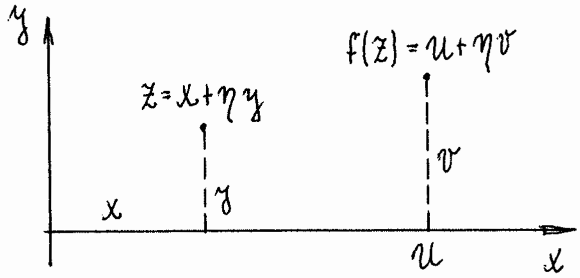
Es sei $f \in Abb(\mathrm{R}, \mathrm{R})$

$f\colon \ \mathrm{R} \to \mathrm{R}$

$\qquad z \mapsto f(z)$

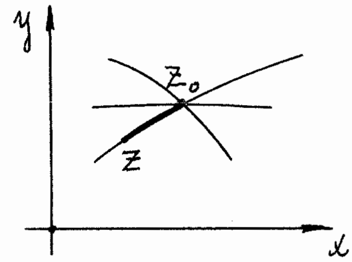
$z = x + \eta y, \quad f(z) = u + \eta v$

$u = u(x, y), \quad v = v(x, y)$




**Definition der Ableitung an der Stelle $z_0$**

$$f'(z_0) := \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$




Der Wert $f'(z_0)$ soll unabhängig von der Art des Grenzüberganges sein. Es soll also gleichgültig sein, auf welchem Wege z in der reellen Zahlenebene nach $z_0$ rückt.

Es genügt, z auf geraden Linien nach $z_0$ rücken zu lassen, da man jede Kurve in $z_0$ durch ihre Tangente approximieren kann. Es muß also $f'(z_0)$ unabhängig von der Größe des Winkels $\varphi$ sein.

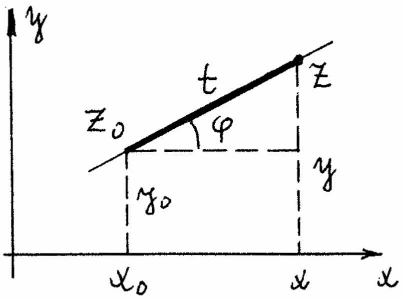
$z_0 = x_0 + \eta y_0$

$z = x + \eta y$

$x - x_0 = t\cos\varphi, \quad y - y_0 = t\sin\varphi$

$x = x_0 + t\cos\varphi, \quad y = y_0 + t\sin\varphi$

$z - z_0 = (x - x_0) + \eta(y - y_0) = t[\cos\varphi + \eta\sin\varphi]$




Daher gilt

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{t \to 0} \frac{[u(x,y) + \eta v(x,y)] - [u(x_0, y_0) + v(x_0, y_0)]}{t(\cos\varphi + \eta\sin\varphi)} =$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{\cos\varphi - \eta\sin\varphi}{\cos^2\varphi - \eta^2\sin^2\varphi} \cdot \frac{u(x_0 + t\cos\varphi, y_0 + t\sin\varphi) + \eta v(x_0 + t\cos\varphi, y_0 + t\sin\varphi) - (u_0 + \eta v_0)}{t} =$$

$$= \frac{\cos\varphi - \eta\sin\varphi}{\cos^2\varphi - \eta^2\sin^2\varphi} \cdot \lim_{t \to 0} \left[ \frac{u(x_0 + t\cos\varphi, y_0 + t\sin\varphi) - u_0}{t} + \eta \frac{v(x_0 + t\cos\varphi, y_0 + t\sin\varphi) - v_0}{t} \right] =$$

$$= \frac{\cos\varphi - \eta\sin\varphi}{\cos^2\varphi - \eta^2\sin^2\varphi} \cdot \left[ (u_x\cos\varphi + u_y\sin\varphi) + \eta(v_x\cos\varphi + v_y\sin\varphi) \right] =$$

$$= \frac{1}{\cos^2\varphi - \eta^2 \sin\varphi} \cdot \left\{ \begin{array}{l} (u_x \cos\varphi + u_y \sin\varphi)\cos\varphi + \eta\left[(v_x \cos\varphi + v_y \sin\varphi)\cos\varphi - (u_x \cos\varphi + u_y \sin\varphi)\sin\varphi\right] - \\ -\eta^2\left[v_x \cos\varphi + v_y \sin\varphi\right]\sin\varphi \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{1}{\cos^2\varphi - \eta^2 \sin\varphi} \cdot \left\{ \cos^2\varphi(u_x + \eta v_x) + \underbrace{\sin^2\varphi}_{1-\cos^2\varphi}\left(-\eta u_y - \eta^2 v_y\right) + \sin\varphi\cos\varphi\left[u_y + \eta(v_y - u_x) - \eta^2 v_x\right] \right\}$$

Demnach soll folgender Ausdruck von $\varphi$ unabhängig sein

$$\boxed{f'(z) = \frac{1}{\cos^2\varphi - \eta^2 \sin^2\varphi} \left\{ \begin{array}{l} -(\eta u_y + \eta^2 v_y) + \cos^2\varphi\left[u_x + \eta(v_x + u_y) + \eta^2 v_y\right] + \\ + \sin\varphi\cos\varphi\left[u_y + \eta(v_y - u_x) - \eta^2 v_x\right] \end{array} \right\}}$$

**1.Fall**

$\eta = i$ Körper der komplexen Zahlen

$\cos^2\varphi - i^2 \sin\varphi = \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$

$f'(z) = -(i u_y - v_y) + \cos^2\varphi\left[u_x - v_y + i(v_x + u_y)\right] + \sin\varphi\cos\varphi\left[u_y + v_x + i(y_y - u_x)\right]$ Bei Unabhängigkeit von $\varphi$ müssen die Koeffizienten der Winkelfunktionen verschwinden:

$$\left. \begin{array}{l} u_x - v_y + i(v_x + u_y) = 0 \Rightarrow u_x = v_y \wedge u_y = -v_x \\ u_y + v_x + i(v_y - u_x) = 0 \Rightarrow u_y = -v_x \wedge u_x = v_y \end{array} \right\}$$

Die Beziehungen

$$\boxed{\begin{array}{l} u_x - v_y = 0 \\ u_y + v_x = 0 \end{array}}$$

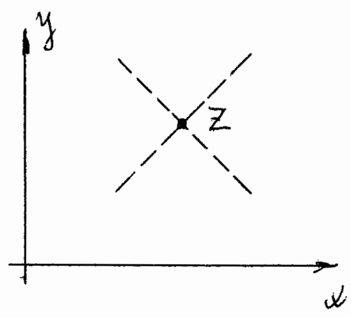
sind die Differentialgleichungen von CAUCHY-RIEMANN. Funktionen über dem komplexen Zahlkörper, für welchen diese Gleichungen gelten, heißen *holomorph* oder *regulär*. Für die Ableitung dieser Funktionen gilt

$$\boxed{f'(z) = v_y - i u_y = u_x + i v_x}$$

**2.Fall**

$\eta = j$, $\cos^2\varphi - j^2 \sin^2\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi$

Da dieser Ausdruck im Nenner auftritt, darf er nicht verschwinden. Wäre $\cos^2\varphi = \sin^2\varphi$, also $\varphi = \pm \pi/4$, so gäbe es zwei *Ausnahmerichtungen*. Beim Grenzübergang in diesen Richtungen existiert *keine Ableitung*.




Sei also

$$\varphi \neq \frac{\pi}{4}$$

Dann gilt wegen

$$\cos^2\varphi - \sin^2\varphi = \cos 2\varphi,\quad \cos^2\varphi = \frac{1+\cos 2\varphi}{2} \text{ und } \cos\varphi\sin\varphi = \frac{1}{2}\sin 2\varphi$$

$$f'(z) = \frac{1}{\cos 2\varphi}\left\{-\left(ju_y + v_y\right) + \frac{1+\cos 2\varphi}{2}\left[u_x + v_y + j\left(v_x + u_y\right)\right] + \frac{\sin 2\varphi}{2}\left[u_y - v_x + j\left(v_y - u_x\right)\right]\right\} \Rightarrow$$

$$f'(z) = \frac{1}{2}\left[\left(u_x + v_y\right) + j\left(u_y + v_x\right)\right] + \frac{1}{2\cos 2\varphi}\left[\left(u_x + v_y - 2v_y\right) + j\left(v_x + u_y - 2u_y\right)\right] +$$

$$+\frac{1}{2}\tan 2\varphi\left[\left(u_y - v_x\right) + j\left(v_y - u_x\right)\right]$$

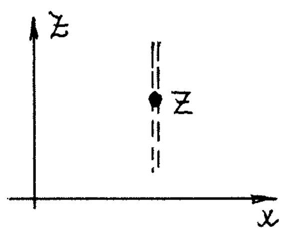
Die Forderung nach der Unabhängigkeit vom Winkel $\varphi$ ergibt:

$$\boxed{u_x - v_y = 0,\quad u_y - v_x = 0,\quad f'(z) = u_x + jv_x = v_y + ju_y}$$

**3.Fall**

$\eta = \varepsilon,\ \cos^2 - \varepsilon^2\sin^2\varphi = \cos^2\varphi$ darf nicht verschwinden. Es gibt daher nur eine Ausnahmerichtung für

$\cos\varphi = 0 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}$. Sei $\varphi \neq \frac{\pi}{2}$. Dann gilt




$$f'(z) = \frac{1}{\cos^2\varphi}\left\{-\varepsilon u_y + \cos^2\varphi\left[u_x + \varepsilon\left(u_y + v_x\right)\right] + \sin\varphi\cos\varphi\left[u_y + \varepsilon\left(v_y - u_x\right)\right]\right\} =$$

$$= u_x + \varepsilon\left(u_y + v_x\right) - \varepsilon\frac{u_y}{\cos^2\varphi} + \tan\varphi\left[u_y + \varepsilon\left(v_y - u_x\right)\right]$$

Es gilt also

$$\boxed{u_y = 0,\quad u_x - v_y = 0,\quad f'(z) = u_x + \varepsilon v_x = v_y + \varepsilon v_x}$$

Diese drei Ergebnisse können in folgender Weise zusammengefaßt werden:

Im Ring

$$R = \left\{x + \eta y \mid x, y \in \Re,\quad \eta^2 = 0, \mp 1\right\}$$

ist die Ableitung der Funktion

$$f(x + \eta y) = u(x,y) + \eta v(x,y)$$

(abgesehen von Ausnahmerichtungen) genau dann richtungsunabhängig wenn die Differentialgleichungen

$$u_x - v_y = 0$$

$$u_y - \eta^2 v_x = 0$$

erfüllt sind. Dann gilt

$$f'(x + \eta y) = u_x + \eta v_y$$

Literatur:

Karl FABER: Begründung der Potential- und Funktionentheorie mit Einschluß gewisser Erweiterungen. Jahres.Ber.61 (1958) 32-56

Wolfgang EICHHORN: Eine aus Fragen der Verallgemeinerung der Funktionentheorie erwachsende Charakterisierung der Algebra der komplexen Zahlen. Jahres.Ber. DMV 71 (1969) 123-137

# Der $\mathbb{D}$-Modul

<u>Definition:</u> R sei ein kommutativer Ring mit *Einselement* $1_R$, (M,+) eine *kommutative Gruppe* und $\bullet$ : $R\times M \to M$ eine *äußere Verknüpfung.* Dann heißt das Quadrupel $(M,+,R,\bullet)$ *R-Modul,* wenn folgende *Verträglichkeitsbedingungen* zwischen den beiden Verknüpfungern erfüllt sind

a) $(\forall a \in R)(\forall x,y \in M)\ a\bullet(x+y) = a\bullet x + a\bullet y$

b) $(\forall a,b \in R)(\forall x \in M)\ (a+b)\bullet x = a\bullet x + b\bullet x$

c) $(\forall a,b, \in R)(\forall x \in M)\ \ a\bullet(b\bullet x) = (ab)\bullet x$

d) $(\forall x \in M)\ 1_R \bullet x = x$

Wir setzen $R = \mathbb{D}$, $M =: \underline{\mathbf{V}}$ und nennen die Elemente von $\underline{\mathbf{V}}$ *duale Vektoren* und bezeichnen sie mit $\underline{\mathbf{a}}$, $\underline{\mathbf{b}}$. ... $\underline{\mathbf{x}}$, $\underline{\mathbf{y}}$,...

Da $\Re \subset \mathbb{D}$ ist, können wir den dreidimensionalen Vektorraum $\mathbf{V}$ als Teilmenge von $\underline{\mathbf{V}}$ betrachten.

**Einbettung von V in den $\mathbb{D}$-Modul $\underline{\mathbf{V}}$**

Wir betrachten die Menge $\mathbf{V}\times\mathbf{V}$ und wollen ihr die Struktur eines $\mathbb{D}$-Moduls geben, den wir wie oben mit $\underline{\mathbf{V}}$ bezeichnen.
Es sei

$$(\mathbf{a},\hat{\mathbf{a}}),(\mathbf{b},\hat{\mathbf{b}}) \in \mathbf{V}\times\mathbf{V}$$

Dann definieren wir eine <u>Addition</u>

$$\underline{(\mathbf{a},\hat{\mathbf{a}}) + (\mathbf{b},\hat{\mathbf{b}}) := (\mathbf{a}+\mathbf{b},\hat{\mathbf{a}}+\hat{\mathbf{b}})}$$

und eine <u>Multiplikation</u> mit

$$\underline{c} = c + \varepsilon\,\hat{c} \in \mathbb{D}$$

$$\underline{c}(\mathbf{a},\hat{\mathbf{a}}) := (c\mathbf{a}, \hat{c}\mathbf{a} + c\hat{\mathbf{a}})$$

Mit diesen Verknüpfungsvorschriften stellt $\underline{\mathbf{V}} = \mathbf{V}\times\mathbf{V}$ einen $\mathbb{D}$-Modul dar und wir können $\underline{\mathbf{a}}$ = $(\mathbf{a},\hat{\mathbf{a}})$ als *duale Vektoren* bezeichnen.

**Spezielle duale Vektoren**

Nach den aufgestellen Rechenregeln gilt

$$\underline{\mathbf{a}} = (\mathbf{a},\hat{\mathbf{a}}) = (\mathbf{a},\mathbf{o}) + (\mathbf{o},\hat{\mathbf{a}})$$

$$(\mathbf{a},\mathbf{o}) + (\mathbf{b},\mathbf{o}) = (\mathbf{a}+\mathbf{b},\mathbf{o})$$

$\lambda \in \Re$ können wir in der Gestalt $\underline{\lambda} = \lambda + 0.\varepsilon$ $(\hat{\lambda} = 0)$ als Element von $\mathbb{D}$ auffassen. Dann gilt

$$\underline{\lambda}(\mathbf{a},\mathbf{o}) = (\lambda\mathbf{a}, \hat{\lambda}\mathbf{a} + \lambda\mathbf{o}) = (\lambda\mathbf{a},\mathbf{o}) = \lambda(\mathbf{a},\mathbf{o})$$

Die speziellen dualen Vektoren sind also isomorph zu den reellen Vektoren aus $\mathbf{V}$. Wir können daher identifizieren

$$(\mathbf{a},\mathbf{o}) \equiv \mathbf{a}$$

Anderseits gilt

$$\underline{\varepsilon(\hat{\mathbf{a}},\mathbf{o})} = (0,1)(\hat{\mathbf{a}},\mathbf{o}) = (\mathbf{o},\hat{\mathbf{a}}) = \underline{\varepsilon\,\hat{\mathbf{a}}}$$

Daher gilt

$$\underline{\mathbf{a}} = (\mathbf{a},\hat{\mathbf{a}}) = (\mathbf{a},\mathbf{o}) + (\mathbf{o},\hat{\mathbf{a}}) = (\mathbf{a},\mathbf{o}) + \varepsilon(\hat{\mathbf{a}},\mathbf{o}) = \mathbf{a} + \varepsilon\,\hat{\mathbf{a}}$$

| |
|---|
| Jeder Vektor $\underline{\mathbf{a}} \in \underline{\mathbf{V}}$ des einbettenden $\mathbb{D}$-Moduls kann in der Form $$\underline{\mathbf{a}} = \mathbf{a} + \varepsilon\,\hat{\mathbf{a}}, \qquad \mathbf{a}, \hat{\mathbf{a}} \in \mathbf{V}$$ dargestellt werden. $$\left.\begin{matrix} \mathbf{a}\ldots \textit{Realteil} \\ \hat{\mathbf{a}}\ldots \textit{Dualteil} \end{matrix}\right\} \text{ von } \underline{\mathbf{a}}$$ |

In dieser Schreibweise gilt

$$\underline{\mathbf{a}} + \underline{\mathbf{b}} = (\mathbf{a} + \varepsilon\,\hat{\mathbf{a}}) + (\mathbf{b} + \varepsilon\,\hat{\mathbf{b}}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \varepsilon(\hat{\mathbf{a}} + \hat{\mathbf{b}})$$

$$\underline{c}\,\underline{\mathbf{a}} = (c + \varepsilon\,\hat{c})(\mathbf{a} + \varepsilon\,\hat{\mathbf{a}}) = c\mathbf{a} + \varepsilon(\hat{c}\mathbf{a} + c\hat{\mathbf{a}})$$

**Das Skalarprodukt dualer Vektoren**

$$\boxed{\underline{\mathbf{a}}\,\underline{\mathbf{b}} = (\mathbf{a} + \varepsilon\,\hat{\mathbf{a}})(\mathbf{b} + \varepsilon\,\hat{\mathbf{b}}) = \mathbf{ab} + \varepsilon(\mathbf{a}\hat{\mathbf{b}} + \hat{\mathbf{a}}\mathbf{b})}$$

Das Skalarprodukt stellt eine symmetrische Bilinearform dar. Es gilt speziell

$$\underline{\mathbf{a}}\,\underline{\mathbf{a}} = (\mathbf{a} + \varepsilon\,\hat{\mathbf{a}})(\mathbf{a} + \varepsilon\,\hat{\mathbf{a}}) = |\mathbf{a}|^2 + 2\varepsilon\,\mathbf{a}\hat{\mathbf{a}}$$

Wir definieren den *Betrag* von $\underline{\mathbf{a}}$

$$\boxed{|\underline{\mathbf{a}}| = \sqrt{\underline{\mathbf{a}}\,\underline{\mathbf{a}}} = |\mathbf{a}| + \varepsilon\frac{\mathbf{a}\hat{\mathbf{a}}}{|\mathbf{a}|}}$$

Der Betrag eines dualen Vektors ist i.a. eine duale Zahl. Ein dualer Vektor $\underline{\mathbf{a}}°$ heißt *dualer Einheitsvektor*, wenn gilt

$$|\underline{\mathbf{a}}|^2 = 1$$

Wann hat ein dualer Vektor ($\underline{\mathbf{a}} \neq \underline{\mathbf{o}}$) einen verschwindenden Betrag? In diesem Falle müßte gelten

$$|\underline{\mathbf{a}}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + 2\varepsilon\,\mathbf{a}\hat{\mathbf{a}} = 0 \Rightarrow |\mathbf{a}|^2 \Rightarrow \mathbf{a} = \mathbf{o} \Rightarrow \mathbf{a}\hat{\mathbf{a}} \text{ verschwindet automatisch}$$

$$\boxed{|\underline{\mathbf{a}}| = 0 \Leftrightarrow \underline{\mathbf{a}} = \varepsilon\,\hat{\mathbf{a}} \quad \textit{rein dual}}$$

Wir nenn~~t~~en zwei duale Vektoren *orthogonal*, wenn gilt

$$\boxed{\underline{\mathbf{a}}\,\underline{\mathbf{b}} = 0 \Leftrightarrow \underline{\mathbf{a}} \perp \underline{\mathbf{b}}}$$

## $\mathbb{D}$-Modul und Raumgerade

Es seien

$$(\lambda\mathbf{a}, \lambda\mathbf{a}^*) \qquad \mathbf{aa}^* = 0, \quad 0 \neq \lambda \in \Re$$

die PLÜCKER-Vektoren der Geraden a. dann bilden wir den dualen Vektor

$$\lambda\underline{\mathbf{a}} = \lambda\mathbf{a} + \varepsilon\,\lambda\mathbf{a}^*$$

Es gilt dann

$$|\lambda\underline{\mathbf{a}}|^2 = \lambda^2|\mathbf{a}|^2 + 2\lambda^2\varepsilon\,\mathbf{aa}^* = \lambda^2|\mathbf{a}|^2 \ldots \text{reell}$$

Es sei umgekehrt $\underline{\mathbf{a}} = \mathbf{a} + \varepsilon\hat{\mathbf{a}}$ ein dualer Vektor, dessen Betrag reell ist. Dann gilt

$$|\underline{\mathbf{a}}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + 2\varepsilon\,\mathbf{a}\hat{\mathbf{a}} \in \Re \Leftrightarrow \mathbf{a}\hat{\mathbf{a}} = 0 \Rightarrow \mathbf{a} \perp \hat{\mathbf{a}}$$

Wir können daher ($\mathbf{a}$, $\hat{\mathbf{a}} = \mathbf{a}^*$) als PLÜCKER-Vektoren einer Geraden auffassen.

| |
|---|
| Durch einen bis auf einen *reellen Faktor* bestimmten dualen Vektor mit *reellem Betrag* ist eine Gerade eindeutig bestimmt und umgekehrt. |

Es seien $(\mathbf{a}, \mathbf{a}^*)$ die PLÜCKER-Vektoren einer Geraden a. Durch Normierung

$$\mathbf{a}^\circ = \pm\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|},\quad \mathbf{a}^+ = \pm\frac{\mathbf{a}^*}{|\mathbf{a}|}$$

zeichnen wir einen der beiden von der Geraden getragenen *Speere* (*Orientierungen*) aus.

$\boxed{\begin{array}{l}\mathbf{a}^\circ,\mathbf{a}^+ \quad |\mathbf{a}^\circ| = 1,\ \mathbf{a}^\circ\mathbf{a}^+ = 0\ldots\textit{\textbf{Speerkoordinaten der Geraden}} \\ -\mathbf{a}^\circ,-\mathbf{a}^+\ldots\textit{\textbf{entgegengesetzter Speer}}\end{array}}$

Die Speerkoordinaten sind *inhomogen*. Der entsprechende duale Vektor

$$\underline{\mathbf{a}}^\circ = \mathbf{a}^\circ + \varepsilon\,\mathbf{a}^+$$

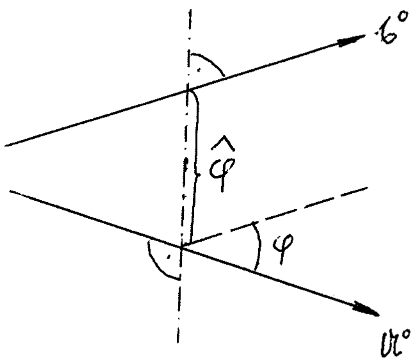
ist ein *dualer Einheitsvektor*, denn es gilt

$$|\underline{\mathbf{a}}^\circ|^2 = |\mathbf{a}^\circ|^2 + 2\varepsilon\,\mathbf{a}^\circ\mathbf{a}^+ = 1$$

| |
|---|
| Die Speere (orientierte Geraden) des Raumes werden auf die dualen Einheitsvektoren bijektiv abgebildet. |

Gegeben seien die beiden Speere

$$\underline{\mathbf{a}}^\circ = \mathbf{a}^\circ + \varepsilon\,\mathbf{a}^+$$
$$\underline{\mathbf{b}}^\circ = \mathbf{b}^\circ + \varepsilon\,\mathbf{b}^+$$




Dann gilt

$$\cos\varphi = \mathbf{a}^\circ\mathbf{b}^\circ,\quad \hat{\varphi} = -\frac{\mathbf{a}^\circ\mathbf{b}^+ + \mathbf{a}^+\mathbf{b}^\circ}{\sin\varphi}$$

Daraus

$$\underline{\mathbf{a}}^\circ\,\underline{\mathbf{b}}^\circ = (\mathbf{a}^\circ + \varepsilon\,\mathbf{a}^+)(\mathbf{b}^\circ + \varepsilon\,\mathbf{b}^+) = \mathbf{a}^\circ\mathbf{b}^\circ + \varepsilon(\mathbf{a}^\circ\mathbf{b}^+ + \mathbf{a}^+\mathbf{b}^\circ) = \cos\varphi - \varepsilon\hat{\varphi}\sin\varphi = \cos(\varphi + \varepsilon\hat{\varphi})$$

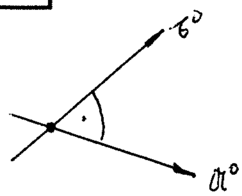
$\boxed{\begin{array}{l}\underline{\mathbf{a}}^\circ\,\underline{\mathbf{b}}^\circ = \cos(\varphi+\varepsilon\hat{\varphi}) = \cos\underline{\varphi} \\ \underline{\varphi} = \varphi + \varepsilon\hat{\varphi}\ldots\textit{\textbf{dualer Winkel der beiden Speere}}\end{array}}$

Daraus folgt

Es sei

$$\underline{\mathbf{a}}^\circ\,\underline{\mathbf{b}}^\circ = 0 = \cos(\varphi+\varepsilon\hat{\varphi}) = \cos\varphi - \varepsilon\hat{\varphi}\sin\varphi = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos\varphi = 0 \wedge \hat{\varphi} = 0 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}$$

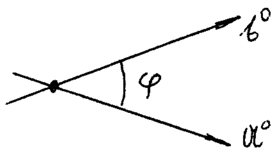



| |
|---|
| Das Skalarpodukt zweier dualen Einheitsvektoren verschwindet genau dann, wenn die beiden entsprechenden Speere einander orthogonal schneiden |

Schneiden die Speere einander unter einem beliebigen Winkel, so ist

$$\hat{\varphi} = 0$$

und es gilt




| |
|---|
| Das Skalarprodukt der schneidenden Speeren entsprechenden dualen Vektoren ist reell. Ist das Skalarprodukt zweier dualen Einheitsvektoren reell, so liegen die entsprechenden Speere in derselben Ebene |

Es sei nämlich:

$\cos\varphi - \varepsilon\hat{\varphi}\sin\varphi = \lambda \in \Re$

<u>1.Fall:</u> $\lambda \neq \pm 1 \quad \cos\varphi \neq \pm 1 \Rightarrow \varphi \neq 0,\pi \wedge \sin\varphi \neq 0 \Rightarrow \hat{\varphi} = 0$

<u>2.Fall:</u> $\lambda = \pm 1 \quad \cos\varphi = \pm 1 \Rightarrow \varphi = 0,\pi \wedge \sin\varphi = 0 \Rightarrow \hat{\varphi}$ unbestimmt

$$\boxed{\underline{\mathbf{a}} \times \underline{\mathbf{b}} = (\mathbf{a} + \varepsilon\hat{\mathbf{a}}) \times (\mathbf{b} + \varepsilon\hat{\mathbf{b}}) := \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \varepsilon(\mathbf{a} \times \hat{\mathbf{b}} + \mathbf{a} \times \hat{\mathbf{b}})}$$

**Das Vektorprodukt dualer Vektoren**

Das Vektorprodukt zweier dualen Einheitvektoren

$$\underline{\mathbf{c}} = \underline{\mathbf{a}}^\circ \times \underline{\mathbf{b}}^\circ = \mathbf{a}^\circ \times \mathbf{b}^\circ + \varepsilon(\mathbf{a}^\circ \times \mathbf{b}^+ + \mathbf{a}^+ \times \mathbf{b}^\circ)$$

ist i.a. kein dualer Einheitsvektor. Der Betrag lautet nämlich

$$|\underline{\mathbf{c}}|^2 = |\underline{\mathbf{a}}^\circ \times \underline{\mathbf{b}}^\circ|^2 = |\mathbf{a}^\circ \times \mathbf{b}^\circ|^2 + 2\varepsilon(\mathbf{a}^\circ \times \mathbf{b}^\circ)(\mathbf{a}^\circ \times \mathbf{b}^+ + \mathbf{a}^+ \times \mathbf{b}^\circ) =$$

$$= |\mathbf{a}^\circ \times \mathbf{b}^\circ|^2 + 2\varepsilon\left[(\mathbf{a}^\circ \times \mathbf{b}^\circ)(\mathbf{a}^\circ \times \mathbf{b}^+) + (\mathbf{a}^\circ \times \mathbf{b}^\circ)(\mathbf{a}^+ \times \mathbf{b}^\circ)\right] =$$

$$= |\mathbf{a}^\circ \times \mathbf{b}^\circ|^2 + 2\varepsilon\left[|\mathbf{a}^\circ|^2\underbrace{(\mathbf{b}^\circ\mathbf{b}^+)}_{\perp} - (\mathbf{a}^\circ\mathbf{b}^+)(\mathbf{a}^\circ\mathbf{b}^\circ) + \underbrace{(\mathbf{a}^\circ\mathbf{a}^+)}_{\perp}|\mathbf{b}^\circ|^2 - (\mathbf{a}^\circ\mathbf{b}^\circ)(\mathbf{a}^+\mathbf{b}^\circ)\right] =$$

$$= |\mathbf{a}^\circ \times \mathbf{b}^\circ|^2 - 2\varepsilon(\mathbf{a}^\circ\mathbf{b}^\circ)[\mathbf{a}^\circ\mathbf{b}^+ + \mathbf{a}^+\mathbf{b}^\circ] = \sin^2\varphi - 2\varepsilon\cos\varphi(-\hat{\varphi}\sin\varphi) =$$

$$= \sin^2\varphi + 2\varepsilon\hat{\varphi}\sin\varphi\cos\varphi = (\sin\varphi + \varepsilon\hat{\varphi}\cos\varphi)^2 = \sin(\varphi + \varepsilon\hat{\varphi})^2 = \sin^2\underline{\varphi}$$

$$\boxed{|\underline{\mathbf{c}}|^2 = |\underline{\mathbf{a}}^\circ \times \underline{\mathbf{b}}^\circ|^2 = |\mathbf{a}^\circ \times \mathbf{b}^\circ|^2 - 2\varepsilon(\mathbf{a}^\circ\mathbf{b}^\circ)[\mathbf{a}^\circ\mathbf{b}^+ + \mathbf{a}^+\mathbf{b}^\circ] = \sin^2(\varphi + \varepsilon\hat{\varphi}) = \sin^2\underline{\varphi}}$$

Es ist also

Für den normierten Produktvektor gilt daher

$$\boxed{\underline{\mathbf{c}}^\circ = \frac{\underline{\mathbf{a}}^\circ \times \underline{\mathbf{b}}^\circ}{|\underline{\mathbf{a}}^\circ \times \underline{\mathbf{b}}^\circ|} = \frac{\underline{\mathbf{a}}^\circ \times \underline{\mathbf{b}}^\circ}{\sin\underline{\varphi}}}$$

Im Reellen gilt

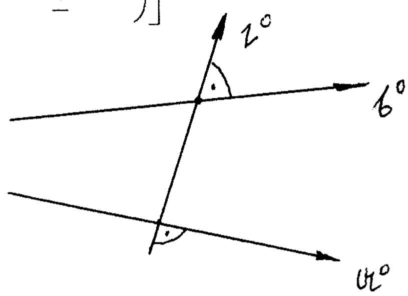
$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{a} \perp \mathbf{c} \wedge \mathbf{b} \perp \mathbf{c} \Rightarrow \mathbf{ac} = 0 \wedge \mathbf{bc} = 0$

Gilt dies auch im Dualen?

$$\underline{\mathbf{a}}^\circ\underline{\mathbf{c}}^\circ = \frac{1}{\sin\underline{\varphi}}\left[\underline{\mathbf{a}}^\circ(\underline{\mathbf{a}}^\circ \times \underline{\mathbf{b}}^\circ)\right] = \frac{1}{\sin\underline{\varphi}}\left[(\mathbf{a}^\circ + \varepsilon\mathbf{a}^+)(\mathbf{a}^\circ \times \mathbf{b}^\circ + \varepsilon(\mathbf{a}^\circ \times \mathbf{b}^+ + \mathbf{a}^+ \times \mathbf{b}^\circ))\right] =$$

$$= \frac{1}{\sin\underline{\varphi}}\left[\underbrace{(\mathbf{a}^\circ, \mathbf{a}^\circ, \mathbf{b})}_{0} + \varepsilon\left(\underbrace{(\mathbf{a}^\circ, \mathbf{a}^\circ, \mathbf{b}^+)}_{0} + \underbrace{(\mathbf{a}^\circ, \mathbf{a}^+, \mathbf{b}^\circ)}_{+} + \underbrace{(\mathbf{a}^+, \mathbf{a}^\circ, \mathbf{b}^\circ)}_{-}\right)\right] = 0$$

d.h. $\underline{\mathbf{a}}^\circ\underline{\mathbf{c}}^\circ = 0$, ebenso $\underline{\mathbf{b}}^\circ\underline{\mathbf{c}}^\circ = 0$




| |
|---|
| Der durch $\underline{\mathbf{c}}^\circ$ dargestellte Speer stellt das ***Gemeinlot*** der Speere $\underline{\mathbf{a}}^\circ, \underline{\mathbf{b}}^\circ$ dar |

Es war

$$|\underline{\mathbf{c}}|^2 = |\underline{\mathbf{a}}^\circ \times \underline{\mathbf{b}}^\circ|^2 = |\mathbf{a}^\circ \times \mathbf{b}^\circ|^2 - 2\varepsilon(\mathbf{a}^\circ\mathbf{b}^\circ)[\mathbf{a}^\circ\mathbf{b}^+ + \mathbf{a}^+\mathbf{b}^\circ]$$

Daher

$$|\underline{\mathbf{c}}| = |\mathbf{a}^\circ \times \mathbf{b}^\circ| - \varepsilon\frac{(\mathbf{a}^\circ\mathbf{b}^\circ)[\mathbf{a}^\circ\mathbf{b}^+ + \mathbf{a}^+\mathbf{b}^\circ]}{|\mathbf{a}^\circ \times \mathbf{b}^\circ|}$$

und

$$\frac{1}{|\underline{\mathbf{c}}|} = \frac{1}{|\mathbf{a}^\circ \times \mathbf{b}^\circ|} + \varepsilon\frac{(\mathbf{a}^\circ\mathbf{b}^\circ)[\mathbf{a}^\circ\mathbf{b}^+ + \mathbf{a}^+\mathbf{b}^\circ]}{|\mathbf{a}^\circ \times \mathbf{b}^\circ|^3}$$

demnach

$$\underline{\mathbf{c}}^\circ = \left[\frac{1}{|\mathbf{a}^\circ \times \mathbf{b}^\circ|} + \varepsilon\frac{(\mathbf{a}^\circ\mathbf{b}^\circ)[\mathbf{a}^\circ\mathbf{b}^+ + \mathbf{a}^+\mathbf{b}^\circ]}{|\mathbf{a}^\circ \times \mathbf{b}^\circ|^3}\right][\mathbf{a}^\circ \times \mathbf{b}^\circ + \varepsilon(\mathbf{a}^\circ \times \mathbf{b}^+ + \mathbf{a}^+ \times \mathbf{b}^\circ)] =$$

$$= \frac{\mathbf{a}^\circ \times \mathbf{b}^\circ}{|\mathbf{a}^\circ \times \mathbf{b}^\circ|} + \frac{\varepsilon}{|\mathbf{a}^\circ \times \mathbf{b}^\circ|}\left[(\mathbf{a}^\circ \times \mathbf{b}^+ + \mathbf{a}^+ \times \mathbf{b}^\circ) + \frac{(\mathbf{a}^\circ\mathbf{b}^\circ)[\mathbf{a}^\circ\mathbf{b}^+ + \mathbf{a}^+\mathbf{b}^\circ]}{|\mathbf{a}^\circ \times \mathbf{b}^\circ|^2}(\mathbf{a}^\circ \times \mathbf{b}^\circ)\right] = \mathbf{c}^\circ + \varepsilon\ \mathbf{c}^+$$

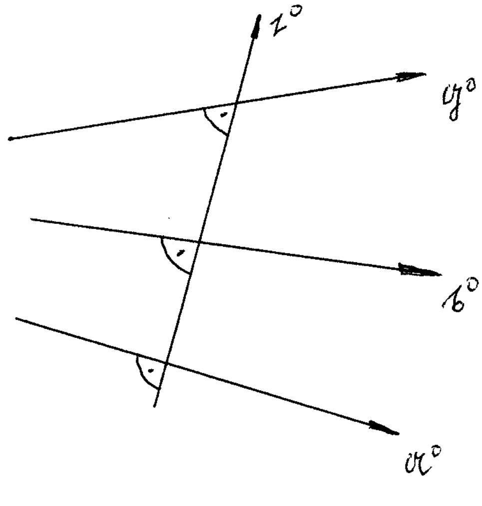
Verzicht auf Normierung ergibt die PLÜCKER-Koordinaten der Geraden $(\mathbf{a},\mathbf{a}^*)$, $(\mathbf{b},\mathbf{b}^*)$:
$(\mathbf{c}, \mathbf{c}^*)$ des Gemeinlotes

$$\boxed{\begin{aligned} &\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} \\ &\mathbf{c}^* = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}^* + \mathbf{a}^* \times \mathbf{b}) + \frac{(\mathbf{ab})[\mathbf{ab}^* + \mathbf{a}^*\mathbf{b}]}{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \end{aligned}}$$

Für jeden Speer $\underline{\mathbf{g}}^\circ$, welcher das Gemeinlot $\underline{\mathbf{c}}^\circ$ der Speere $\underline{\mathbf{a}}^\circ$ und $\underline{\mathbf{b}}^\circ$ orthogonal schneidet, gilt

$$\boxed{\underline{\mathbf{c}}^\circ \underline{\mathbf{g}}^\circ = 0 = \frac{(\underline{\mathbf{a}}^\circ \times \underline{\mathbf{b}}^\circ)\underline{\mathbf{g}}^\circ}{|\underline{\mathbf{a}}^\circ \times \underline{\mathbf{b}}^\circ|} = \frac{(\underline{\mathbf{a}}^\circ, \underline{\mathbf{b}}^\circ, \underline{\mathbf{g}}^\circ)}{|\underline{\mathbf{a}}^\circ \times \underline{\mathbf{b}}^\circ|} \Rightarrow (\underline{\mathbf{a}}^\circ, \underline{\mathbf{b}}^\circ, \underline{\mathbf{g}}^\circ) = 0}$$

| |
|---|
| Verschwindet das gemischte Produkt $(\underline{\mathbf{a}}^\circ, \underline{\mathbf{b}}^\circ, \underline{\mathbf{g}}^\circ)$ dreier dualer Einheitsvektoren, so haben die drei ent - sprechenden Speere denselben Speer als Gemeinlot |



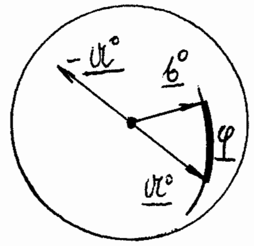
## Das Übertragungsprinzip von Eduard STUDY

Wir bilden uns die Vorstellung eines "*dualen Raumes*", dessen "*Punkte*" durch ihre dualen Ortsvektoren festgelegt werden. Die Ortsvektoren sind Elemente des D-Moduls (und *nicht* eines Vektorraumes)

Die *dualen Einheitsvektoren* bilden sich dann auf die Punkte der *dualen Einheitskugel* ab.

Jedem Speer des Raumes entspricht bijektiv ein Punkt der dualen Einheitskugel, den beiden Speeren derselben Geraden entsprechen diametral gegenüberliegende Kugelpunkte.

Der "*duale Bogen*" zwischen den Kugelpunkten $\underline{\mathbf{a}}^\circ$ und $\underline{\mathbf{b}}^\circ$ entspricht dem "*dualen Winkel*" der beiden dualen Einheitsvektoren.




**Geometrische Deutung des gemischten Produktes dualer Einheitsvektoren**

Auch für duale Vektoren gilt

$$\boxed{(\underline{\mathbf{a}},\underline{\mathbf{b}},\underline{\mathbf{c}}) = (\underline{\mathbf{a}}\times\underline{\mathbf{b}})\underline{\mathbf{c}} = (\underline{\mathbf{b}}\times\underline{\mathbf{c}})\underline{\mathbf{a}} = (\underline{\mathbf{c}}\times\underline{\mathbf{a}})\underline{\mathbf{b}}}$$

Es ist nämlich

$$(\underline{\mathbf{a}}\times\underline{\mathbf{b}})\underline{\mathbf{c}} = \left[\mathbf{a}\times\mathbf{b}+\varepsilon(\mathbf{a}\times\hat{\mathbf{b}}+\hat{\mathbf{a}}\times\mathbf{b})\right](\mathbf{c}+\varepsilon\hat{\mathbf{c}}) = (\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})+\varepsilon\left[(\mathbf{a},\mathbf{b},\hat{\mathbf{c}})+(\mathbf{b},\mathbf{c},\hat{\mathbf{a}})+(\mathbf{c},\mathbf{a},\hat{\mathbf{b}})\right]$$

$$(\underline{\mathbf{b}}\times\underline{\mathbf{c}})\underline{\mathbf{a}} = \left[\mathbf{b}\times\mathbf{c}+\varepsilon(\mathbf{b}\times\hat{\mathbf{c}}+\hat{\mathbf{b}}\times\mathbf{c})\right](\mathbf{a}+\varepsilon\hat{\mathbf{a}}) = (\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})+\varepsilon\left[(\mathbf{a},\mathbf{b},\hat{\mathbf{c}})+(\mathbf{b},\mathbf{c},\hat{\mathbf{a}})+(\mathbf{c},\mathbf{a},\hat{\mathbf{b}})\right]$$

**1.Deutung:**

Es seien $\underline{\mathbf{a}}_1^\circ, \underline{\mathbf{a}}_2^\circ, \underline{\mathbf{a}}_3^\circ$ drei duale Einheits-vektoren. Dann gilt

$$\underline{\mathbf{n}}_3^\circ = \frac{\underline{\mathbf{a}}_1^\circ\times\underline{\mathbf{a}}_2^\circ}{\sin\underline{\varphi}_3}, \quad \underline{\varphi}_3 = \varphi_3+\varepsilon\hat{\varphi}_3$$

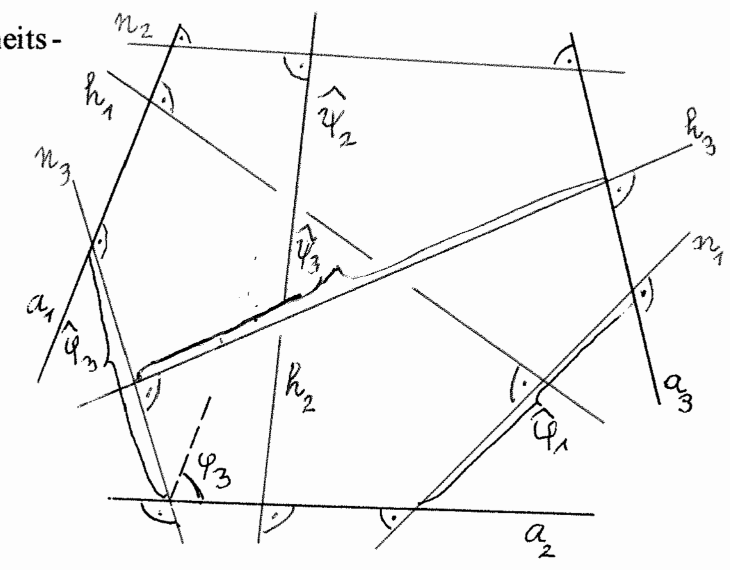
daher

$$\underline{\mathbf{n}}_3^\circ\,\underline{\mathbf{a}}_3^\circ = \frac{(\underline{\mathbf{a}}_1^\circ,\underline{\mathbf{a}}_2^\circ,\underline{\mathbf{a}}_3^\circ)}{\sin\underline{\varphi}_3} = \cos\underline{\psi}_3$$

Daher zyklisch

$$(\underline{\mathbf{a}}_1^\circ,\underline{\mathbf{a}}_2^\circ,\underline{\mathbf{a}}_3^\circ) = \sin\underline{\varphi}_3\cos\underline{\psi}_3 =$$

$$= \sin\underline{\varphi}_1\cos\underline{\psi}_1 = \sin\underline{\varphi}_2\cos\underline{\psi}_2$$

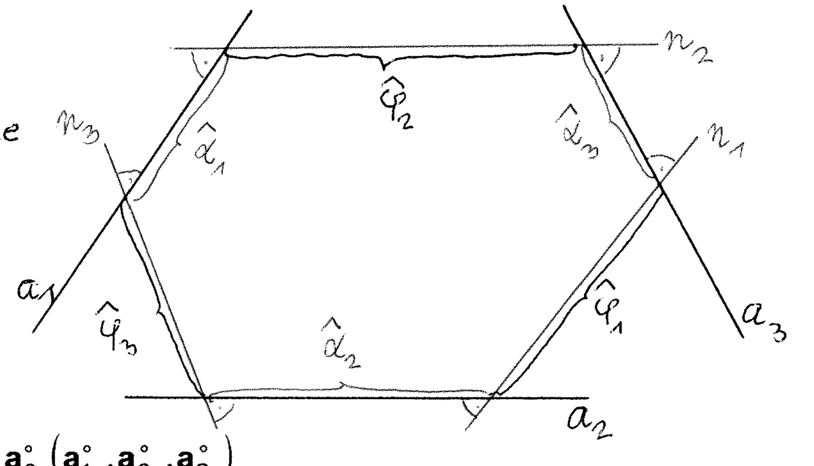



Daher

$$\left.\begin{aligned}&(\underline{\mathbf{a}}_1^\circ,\underline{\mathbf{a}}_2^\circ,\underline{\mathbf{a}}_3^\circ) = (\mathbf{a}_1^\circ,\mathbf{a}_2^\circ,\mathbf{a}_3^\circ)+\varepsilon\left[(\mathbf{a}_1^\circ,\mathbf{a}_2^\circ,\mathbf{a}_3^+)+(\mathbf{a}_2^\circ,\mathbf{a}_3^\circ,\mathbf{a}_1^+)+(\mathbf{a}_3^\circ,\mathbf{a}_1^\circ,\mathbf{a}_2^+)\right] = \\ &= (\sin\varphi_1+\varepsilon\hat{\varphi}_1\cos\varphi_1)(\cos\psi_1-\varepsilon\hat{\psi}_1\sin\psi_1) = \\ &= \underline{\sin\varphi_1\cos\psi_1+\varepsilon\left[\hat{\varphi}_1\cos\varphi_1\cos\psi_2-\hat{\psi}_1\cos\varphi_1\sin\psi_1\right]}\end{aligned}\right\}\ \text{und zyklisch}$$

Diese Formel beschreibt die Winkel sowie die Länge der Gemeinlote gegenüberliegender Seiten in einem rechtwinkeligen räumlichen Sechseck.

**2.Deutung:**




Es seien wieder $\underline{\mathbf{a}}_1^\circ, \underline{\mathbf{a}}_2^\circ, \underline{\mathbf{a}}_3^\circ$ drei duale Einheitsvektoren. Dann gilt

$$\underline{\mathbf{n}}_3^\circ = \frac{\underline{\mathbf{a}}_1^\circ \times \underline{\mathbf{a}}_2^\circ}{\sin \underline{\varphi}_3}, \quad \underline{\varphi}_3 = \varphi_3 + \varepsilon \hat{\varphi}_3$$

$$\underline{\mathbf{n}}_1^\circ = \frac{\underline{\mathbf{a}}_2^\circ \times \underline{\mathbf{a}}_3^\circ}{\sin \underline{\varphi}_1}, \quad \underline{\varphi}_1 = \varphi_1 + \varepsilon \hat{\varphi}_1$$

$$\underline{\mathbf{n}}_3^\circ \times \underline{\mathbf{n}}_1^\circ = \frac{(\underline{\mathbf{a}}_1^\circ \times \underline{\mathbf{a}}_2^\circ) \times (\underline{\mathbf{a}}_2^\circ \times \underline{\mathbf{a}}_3^\circ)}{\sin \underline{\varphi}_3 \sin \underline{\varphi}_1} = \frac{\underline{\mathbf{a}}_2^\circ (\underline{\mathbf{a}}_1^\circ, \underline{\mathbf{a}}_2^\circ, \underline{\mathbf{a}}_3^\circ)}{\sin \underline{\varphi}_3 \sin \underline{\varphi}_1} = \underline{\mathbf{a}}_2^\circ \sin \underline{\alpha}_2$$

Daher

$$(\underline{\mathbf{a}}_1^\circ, \underline{\mathbf{a}}_2^\circ, \underline{\mathbf{a}}_3^\circ) = \sin \underline{\varphi}_3 \sin \underline{\varphi}_1 \sin \underline{\alpha}_2 = \sin \underline{\varphi}_1 \sin \underline{\varphi}_2 \sin \underline{\alpha}_3 = \sin \underline{\varphi}_2 \sin \underline{\varphi}_3 \sin \underline{\alpha}_1 =$$

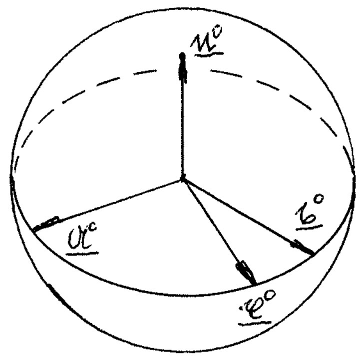
$$= [\sin \varphi_1 + \varepsilon \hat{\varphi}_1 \cos \varphi_1][\sin \varphi_2 + \varepsilon \hat{\varphi}_2 \cos \varphi_2][\sin \alpha_3 + \varepsilon \alpha_3 \cos \alpha_3] =$$

$$= [\sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + \varepsilon(\hat{\varphi}_2 \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \hat{\varphi}_1 \cos \varphi_1 \sin \varphi_2)][\sin \alpha_3 + \varepsilon \alpha_3 \cos \alpha_3] =$$

$$= \underline{\sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \sin \alpha_3 + \varepsilon[(\varphi_1 \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \hat{\varphi}_1 \cos \varphi_1 \sin \varphi_2) \sin \alpha_3 + \hat{\alpha}_3 \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \cos \alpha_3]} \text{ u.zykl.}$$

Diese Beziehung, der *duale Eckensinus*, ist das Analogon zum reellen Eckensinus. Sie beschreibt die Beziehung zwischen den Seiten und Winklen eines räumlichen rechtwinkeligen Sechseckes.

**Anwendungen des Übertragungsprinzips**



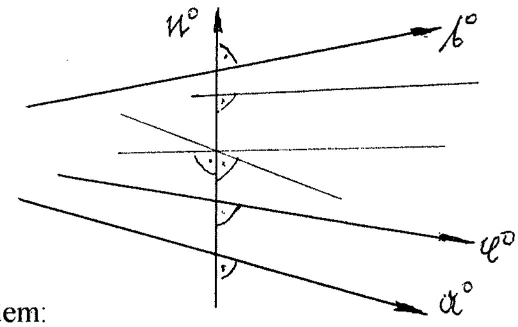

Die Einheitsvektoren $\underline{\mathbf{x}}^\circ$ in der von den Vektoren $\underline{\mathbf{a}}^\circ$, $\underline{\mathbf{b}}^\circ$ aufgespannten "*dualen Ebene*" haben die Darstellung

$$\underline{\mathbf{x}}^\circ = \underline{a}\underline{\mathbf{a}}^\circ + \underline{b}\underline{\mathbf{b}}^\circ \qquad \underline{a}, \underline{b} \in \mathbb{D}$$

Die durch die Ortsvektoren $\underline{\mathbf{x}}^\circ$ festgelegte Punkte erfüllen den "*dualen Großkreis*" für dessen sphärischen $\underline{\mathbf{n}}^\circ$ Pol gilt

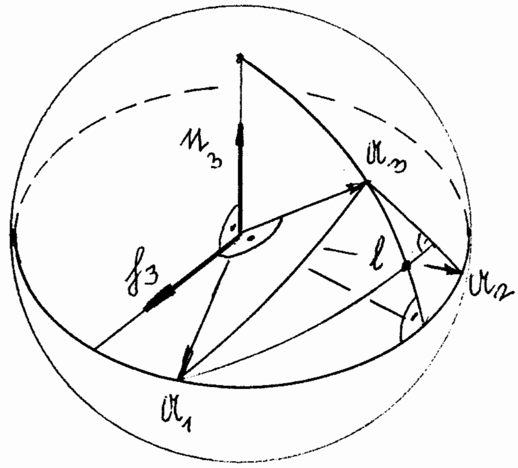
$$\underline{\mathbf{n}}^\circ \underline{\mathbf{x}}^\circ = 0$$

Den dualen Punkten dieses Großkreises entspricht die Menge der Speere. welche den Speer $\underline{\mathbf{n}}^\circ$ orthogonal schneiden.




Das Übertragungsprinzip von STUDY besteht nun in folgendem:
*Man wählt einen Satz der sphärischen Geometrie und überträgt ihn auf die duale Kugel. Diesem Satz entspricht dann im euklidischen Raum ein Satz über Speere.*

<u>Beispiel:</u> Vorbemerkung:Die drei sphärischen Höhen eines eine Kugeldreiecks schneiden einander in einem Punkt.




$\mathbf{n}_3 := \mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2$

Analog:

$\mathbf{n}_1 := \mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3$

$\mathbf{n}_2 := \mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_1$

$\mathbf{h}_3 = \mathbf{a}_3 \times \mathbf{n}_3 = \mathbf{a}_3 \times (\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2)$

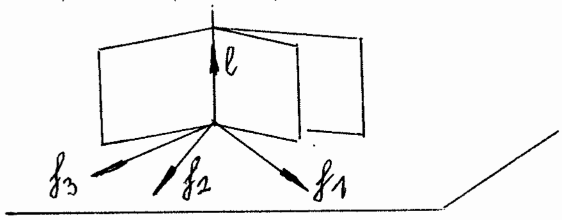
Analog:

$\mathbf{h}_1 = \mathbf{a}_1 \times \mathbf{n}_1 = \mathbf{a}_1 \times (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3)$

$\mathbf{h}_2 = \mathbf{a}_2 \times \mathbf{n}_2 = \mathbf{a}_2 \times (\mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_1)$

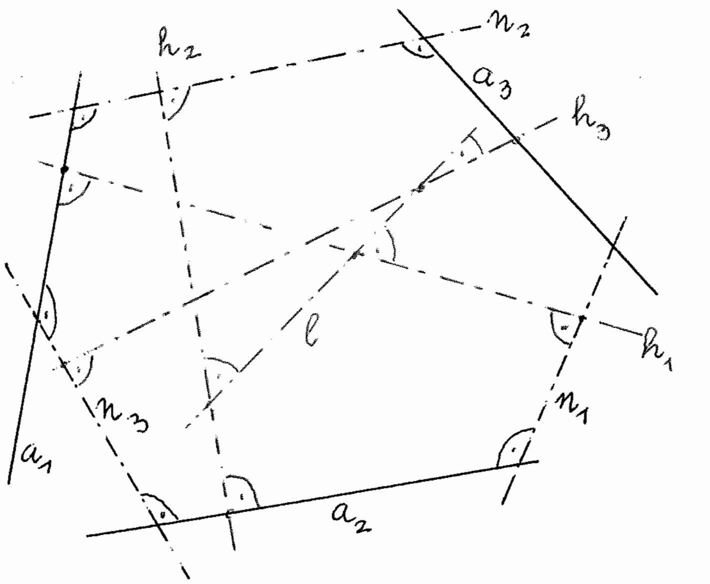
Nach JACOBI gilt nun:

$\mathbf{h}_1 + \mathbf{h}_2 + \mathbf{h}_3 = \mathbf{a}_1 \times (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3) + \mathbf{a}_2 \times (\mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_1) + \mathbf{a}_3 \times (\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2) = \mathbf{o}$




Die Vektoren $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \mathbf{h}_3$ sind daher linear abhängig, d.h. sie liegen in derselben Ebene. Daher gehen deren drei Normalebenen durch dieselbe Gerade $\underline{\mathbf{l}}^\circ$, deren Schnitt mit der Kugeloberfläche der sphärische Höhenschnittpunkt ist.

Dieser Satz gilt auch für Dreiecke auf der dualen Kugel:




Den Vektoren

$$\underline{\mathbf{a}}_1^\circ, \underline{\mathbf{a}}_2^\circ, \underline{\mathbf{a}}_3^\circ$$

entsprechen die windschiefen Speere $a_i$, $a_j$, $a_k$. (ijk) = (123)Den Polen

$$\underline{\mathbf{n}}_1^\circ, \underline{\mathbf{n}}_2^\circ, \underline{\mathbf{n}}_3^\circ$$

entsprechen die Gemeinlote $n_i$ von $a_j, a_k$ und den Vektoren

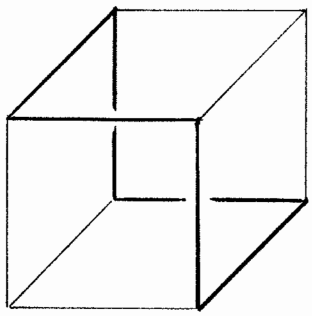
$$\underline{\mathbf{h}}_1^\circ, \underline{\mathbf{h}}_2^\circ, \underline{\mathbf{h}}_3^\circ$$

entsprechen die Gemeinlote $h_i$ von $a_i, n_i$. Da $\underline{\mathbf{l}}^\circ$ auf diese Vektoren normal steht, ist der entsprechende Speer gleichzeitig Gemeinlot von $h_1, h_2, h_3$.

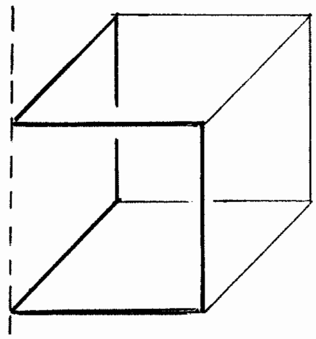
| |
|---|
| Satz von Johannes HJELMSEV (1873-1950) und F.MORLEY (1860-?) 1898: In jedem windschiefen Sechseck mit lauter rechten Winkeln haben die drei Gemeinlote der Gegenseiten (soferne sie nicht unbestimmt werden) dasselbe Gemeinlot[1] |

[1] HJELMSLEV hieß ursprünglich PETERSEN, sodaß obiger Satz auch Satz von PETERSEN-MORLEY genannt wird

<u>Beispiele für Ausartungen:</u>



Hier sind die Gemeinlote von je zwei Gegenseiten unbestimmt



Hier fallen zwei Gemeinlote zusammen, das dritte Gemeinlot ist unbestimmt

## Lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit im $\mathbb{D}$-Modul

### Lineare Unabhängigkeit

***Definition :*** Die dualen Vektoren $\underline{\mathbf{a}}_1,\ldots,\underline{\mathbf{a}}_r$ heißen linear unabhängig, wenn gilt

$$\sum_{i=1}^{r}\underline{c}_i\underline{\mathbf{a}}_i=\underline{\mathbf{o}}\Rightarrow\underline{c}_i=0\quad(i=1,\ldots,r)$$

das bedeutet ausführlich :

$$\sum_{i=1}^{r}\underline{c}_i\underline{\mathbf{a}}_i=\sum_{i=1}^{r}c_i\mathbf{a}_i+\varepsilon\sum_{i=1}(\hat{c}_i\mathbf{a}_i+c_i\hat{\mathbf{a}}_i)=\underline{\mathbf{o}}\qquad(*)$$

### Lineare Abhangigkeit

Bei linearer Abhängigkeit muß mindestens einer der auftretenden Koeffizienten von Null verschieden sein. In diesem Fall folgt aus (*)

$\sum_{i=1}^{r}\underline{c}_i\underline{\mathbf{a}}_i=\mathbf{o}\Rightarrow$ Die Realteile sind linear abhä ngig

$\sum_{i=1}^{r}(\hat{c}_i\mathbf{a}_i+c_i\hat{\mathbf{a}}_i)=\mathbf{o}\Rightarrow$ Die Dualteile ***und*** die Realteile sind linear abhä ngig

<u>Beispiel</u>: r = 2

$$\left.\begin{aligned}c_1\mathbf{a}_1+c_2\mathbf{a}_2&=\mathbf{o}\\ \hat{c}_1\mathbf{a}_1+\hat{c}_2\mathbf{a}_2+c_1\hat{\mathbf{a}}_1+c_2\hat{\mathbf{a}}_2&=\mathbf{o}\end{aligned}\right\}\text{ simultan für lineare Abhängigkeit erforderlich}$$

r = 1. In diesem Falle müßte es duale Vektoren $\underline{\mathbf{a}}\neq$ o geben, die linear abhängig sind, d.h. für diese Vektoren müßte gelten

$\underline{c}\underline{a} = \underline{o}$ mit $\underline{c} \neq 0$ und $\underline{a} \neq \mathbf{o}$

Dann ist

$(c + \varepsilon\hat{c})(\mathbf{a} + \varepsilon\hat{\mathbf{a}}) = c\mathbf{a} + \varepsilon(\hat{c}\mathbf{a} + c\hat{\mathbf{a}}) = \mathbf{o} \Rightarrow \underline{c\mathbf{a} = \mathbf{o} \wedge \hat{c}\mathbf{a} + c\hat{\mathbf{a}} = \mathbf{o}}$

1.Fall: $[c = o, \quad \mathbf{a} \neq \mathbf{o} \Rightarrow \hat{c}\mathbf{a} = \mathbf{o} \Rightarrow \hat{c} = 0] \Rightarrow \underline{c} = 0$

ausgeschlossener Trivialfall

2.Fall: $[c \neq 0, \ \mathbf{a} = \mathbf{o} \Rightarrow c\hat{\mathbf{a}} = 0 \Rightarrow \hat{\mathbf{a}} = 0] \Rightarrow \underline{\mathbf{a}} = 0$

ausgeschlossener Trivialfall

3.Fall: $[c = 0 \wedge \mathbf{a} = \mathbf{o}] \Rightarrow \hat{c}$ und $\hat{\mathbf{a}}$ unbestimmt, d.h.

$\underline{c} = \varepsilon\hat{c}, \quad \underline{\mathbf{a}} = \varepsilon\hat{\mathbf{a}}$

Definition: Es sei M ein Modul über dem kommutativen Ring R mit Einselement. Dann heißen die Elemente $\mathbf{x} \in M$, für welche ein $r \in R$ existitiert mit

$$r\mathbf{x} = \mathbf{o}, \quad r \neq 0$$

*Torsionselemente* des R-Moduls. Ein Modul, in dem jeder Vektor Torsionselement ist, heitß *Torsionsmodul*, ein Modul, in welchem es außer $\mathbf{o}$ keine Torsionselemente gibt, *torsionsfrei*.Das Ringelement r heißt *Annihilator* des Modulelementes $\mathbf{x}$.

Die Torsionselemente des D-Moduls sind demnach die rein dualen Vektoren, deren Annihilatoren sind die rein dualen Zahlen.

Duale Einheitsvektoren sind keine Torsionselemente:.

$|\underline{\mathbf{a}}|^2 = |\mathbf{a}^\circ|^2 + 2\varepsilon\,\mathbf{a}\hat{\mathbf{a}} = 1 \Rightarrow \mathbf{a}^\circ \neq \mathbf{o}$

Enthält eine Menge dualer Vektoren einen rein dualen Vektor, so ist sie linear abhängig. Es sei etwa

$\underline{\mathbf{a}}_1 = \varepsilon\hat{\mathbf{a}}_1, \underline{\mathbf{a}}_2, \ldots, \underline{\mathbf{a}}_r$ beliebig. Setzen wir $\underline{c}_1 = \varepsilon, \underline{c}_2 = \ldots = \underline{c}_r = 0$, so ist

$\underline{c}_1\underline{\mathbf{a}}_1 + \underline{c}_2\underline{\mathbf{a}}_2 + \ldots + \underline{c}_r\underline{\mathbf{a}}_r = \varepsilon^2\hat{\mathbf{a}}_1 + 0\underline{\mathbf{a}}_2 + \ldots + 0\underline{\mathbf{a}}_r = 0 \Rightarrow$ die $\underline{\mathbf{a}}_i$ sind linear abhä ngg, da $\underline{c}_1 \neq 0$

**WeitereEigenschaften des Vektorproduktes dualer Vektoren**

$$\boxed{\begin{array}{c}\underline{\mathbf{a}} \times \underline{\mathbf{a}} = \underline{\mathbf{o}} \\ (\underline{c}\underline{\mathbf{a}}) \times \underline{\mathbf{b}} = \underline{c}(\underline{\mathbf{a}} \times \underline{\mathbf{b}})\end{array}}$$

Wie im Reellen gilt

Es ist nämlich

$\underline{\mathbf{a}} \times \underline{\mathbf{a}} = (\mathbf{a} + \varepsilon\hat{\mathbf{a}}) \times (\mathbf{a} + \varepsilon\hat{\mathbf{a}}) = \mathbf{a} \times \mathbf{a} + \varepsilon(\mathbf{a} \times \hat{\mathbf{a}} + \hat{\mathbf{a}} \times \mathbf{a}) = \underline{\mathbf{o}}$

$$\left.\begin{array}{l}(\underline{c}\underline{\mathbf{a}}) \times \underline{\mathbf{b}} = [c\mathbf{a} + \varepsilon(\hat{c}\mathbf{a} + c\hat{\mathbf{a}})] \times (\mathbf{b} + \varepsilon\hat{\mathbf{b}}) = (c\mathbf{a}) \times \mathbf{b} + \varepsilon[(\hat{c}\mathbf{a}) \times \mathbf{b} + (c\hat{\mathbf{a}}) \times \mathbf{b} + (c\mathbf{a}) \times \hat{\mathbf{b}}] \\ \underline{c}(\underline{\mathbf{a}} \times \underline{\mathbf{b}}) = (c + \varepsilon\hat{c})[\mathbf{a} \times \mathbf{b} + \varepsilon(\hat{\mathbf{a}} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \hat{\mathbf{b}})] = c(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) + \varepsilon[\hat{c}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) + c(\hat{\mathbf{a}} \times \mathbf{b}) + c(\mathbf{a} \times \hat{\mathbf{b}})]\end{array}\right\} \equiv$$

Nun be. trachten wir den Fall

$$\underline{\mathbf{a}} \times \underline{\mathbf{b}} = \underline{\mathbf{o}}$$

1.Fall: Beide Vektoren sind rein dual. Dann sind sie jedenfalls linear abhängig und es gilt

$(\varepsilon\,\hat{\mathbf{a}})\times(\varepsilon\hat{\mathbf{b}})=\varepsilon^2(\hat{\mathbf{a}}\times\hat{\mathbf{b}})=\underline{\mathbf{o}}$

Über die Vektoren $\hat{\mathbf{a}}$ und $\hat{\mathbf{b}}$ wird nichts ausgesagt

2.Fall: Ein Vektor ist rein dual, der andere beliebig. Jedenfalls sind die Vektoren linear abhängig

$\varepsilon\,\hat{\mathbf{a}}\times(\mathbf{b}+\varepsilon\,\hat{\mathbf{b}})=\varepsilon(\hat{\mathbf{a}}\times\mathbf{b})=\underline{\mathbf{o}}\Rightarrow\hat{\mathbf{a}}\times\mathbf{b}=\mathbf{o}\Rightarrow\hat{\mathbf{a}},\mathbf{b}$ linear abhä ngig

Keine Aussage $\hat{\mathbf{b}}$

3.Fall: Weder $\underline{\mathbf{a}}$ noch $\underline{\mathbf{b}}$ rein dual

$(\mathbf{a}+\varepsilon\,\hat{\mathbf{a}})\times(\mathbf{b}\times\varepsilon\,\hat{\mathbf{b}})=\mathbf{a}\times\mathbf{b}+\varepsilon(\mathbf{a}\times\hat{\mathbf{b}}+\hat{\mathbf{a}}\times\mathbf{b})=\underline{\mathbf{o}}\Rightarrow$

$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\mathbf{o}\Rightarrow\mathbf{a},\mathbf{b}$ linear abhä ngig $\Rightarrow\mathbf{b}=c\mathbf{a}$

$\mathbf{a}\times\hat{\mathbf{b}}+\hat{\mathbf{a}}\times\mathbf{b}=\mathbf{o}\Rightarrow\mathbf{a}\times\hat{\mathbf{b}}+\hat{\mathbf{a}}\times(c\mathbf{a})\Rightarrow\mathbf{a}\times(\hat{\mathbf{b}}-c\hat{\mathbf{a}})=\mathbf{o}\Rightarrow\mathbf{a},\hat{\mathbf{b}}-c\hat{\mathbf{a}}$ linear abhä ngig$\Rightarrow\hat{\mathbf{b}}-c\hat{\mathbf{a}}=\hat{c}\mathbf{a}\Rightarrow$

$$\Rightarrow\underline{\hat{\mathbf{b}}=\hat{c}\mathbf{a}+c\hat{\mathbf{a}}}$$

Daher folgt weiter

$\underline{\mathbf{b}}=\mathbf{b}+\varepsilon\hat{\mathbf{b}}=c\mathbf{a}+\varepsilon(\hat{c}\mathbf{a}+c\hat{\mathbf{a}})=(c+\varepsilon\,\hat{c})(\mathbf{a}+\varepsilon\,\hat{\mathbf{a}})=\underline{c}\underline{\mathbf{a}}$

$\underline{\mathbf{a}},\underline{\mathbf{b}}$ sind also linear abhä ngig, daraus folgt, daß einerseits $\mathbf{a},\mathbf{b}$, anderseits $\mathbf{a},\hat{\mathbf{a}},\hat{\mathbf{b}}$ linear abhä ngig sind.

Es seien umgekehrt $\underline{\mathbf{a}}$, $\underline{\mathbf{b}}$ linear abhängige Vektoren. Dann gilt

$$\underline{a}\underline{\mathbf{a}}+\underline{b}\underline{\mathbf{b}}=\underline{\mathbf{o}},\qquad \underline{a}\neq 0,\underline{b}\neq 0 \qquad (\#)$$

O.B.d.A. können wir voraussetzen, $\underline{a}$, $\underline{b}$ beide nicht verschwinden, denn sonst wären $\underline{\mathbf{a}}$ oder $\underline{\mathbf{b}}$ von vorn herein als Torsionselemente für sich allein linear abhängig. Wir multiplizieren obige Beziehung von links mit $\underline{\mathbf{a}}$ und von rechts mit $\underline{\mathbf{b}}$ vektoriell. Dann gilt

$\underline{\mathbf{a}}\times[\underline{a}\underline{\mathbf{a}}+\underline{b}\underline{\mathbf{b}}]=\underline{a}(\underline{\mathbf{a}}\times\underline{\mathbf{a}})+\underline{b}(\underline{\mathbf{a}}\times\underline{\mathbf{b}})=\underline{b}(\underline{\mathbf{a}}\times\underline{\mathbf{b}})=\underline{\mathbf{o}}$

Analoges gilt für die Multiplikation mit $\underline{\mathbf{b}}$ von rechts.

Es gilt also simultan:

$\underline{a}(\underline{\mathbf{a}}\times\underline{\mathbf{b}})=\underline{\mathbf{o}},\qquad \underline{b}(\underline{\mathbf{a}}\times\underline{\mathbf{b}})=\underline{\mathbf{o}}$

Da $\underline{a}\neq 0$ und $\underline{b}\neq 0$ vorausgesetz wurden, gibt es folgende Möglichkeiten:

1. Möglichkeit: $\underline{\mathbf{a}}\times\underline{\mathbf{b}}=\underline{\mathbf{o}}\Rightarrow\underline{\mathbf{a}},\underline{\mathbf{b}}$ sind linear abhä ngg, und zwar in der Weise, daß weder $\underline{a}$ noch $\underline{b}$ rein dual sind. Dann folgt aus (#):

$\underline{\mathbf{b}}=-\dfrac{\underline{a}}{\underline{b}}.\underline{\mathbf{a}}=\underline{c}\underline{\mathbf{a}}$

2. Möglichkeit: $\underline{\mathbf{a}}\times\underline{\mathbf{b}}$ ist rein dual. Dann müssen auch $\underline{a}$ und $\underline{b}$ rein dual sein, in diesem Falle gilt:

$\underline{\mathbf{a}}\times\underline{\mathbf{b}}=\varepsilon\,\underline{\hat{\mathbf{v}}}=\mathbf{a}\times\mathbf{b}+\varepsilon(\mathbf{a}\times\hat{\mathbf{b}}+\hat{\mathbf{a}}\times\mathbf{b})$

dann ist

$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\mathbf{o}\Rightarrow\mathbf{a},\mathbf{b}$ linear abhä ngig$\Rightarrow\mathbf{b}=c\mathbf{a}$

$\hat{\mathbf{v}}=(\mathbf{a}\times\hat{\mathbf{b}}+\hat{\mathbf{a}}\times\mathbf{b})=\mathbf{a}\times(\hat{\mathbf{b}}-c\hat{\mathbf{a}})$

In diesem Falle kann man nur auf die lineare Abhängigkeit von $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ schließen.

Es gilt daher

| |
|---|
| Das Vektorprodukt zweier dualen Vektoren ist genau dann rein dual, wenn deren Realteile linar abhängig sind. |

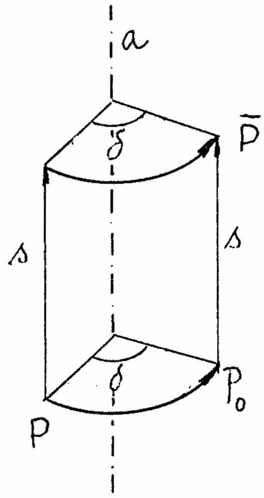
# Allgemeine Bewegungen des Raumes

Eine *allgemeine Bewegung* des Raumes ist eine *gleichsinnig kongruente Transformation ohne Fixpunkte*. Wir betrachten zunächst Sonderfälle.

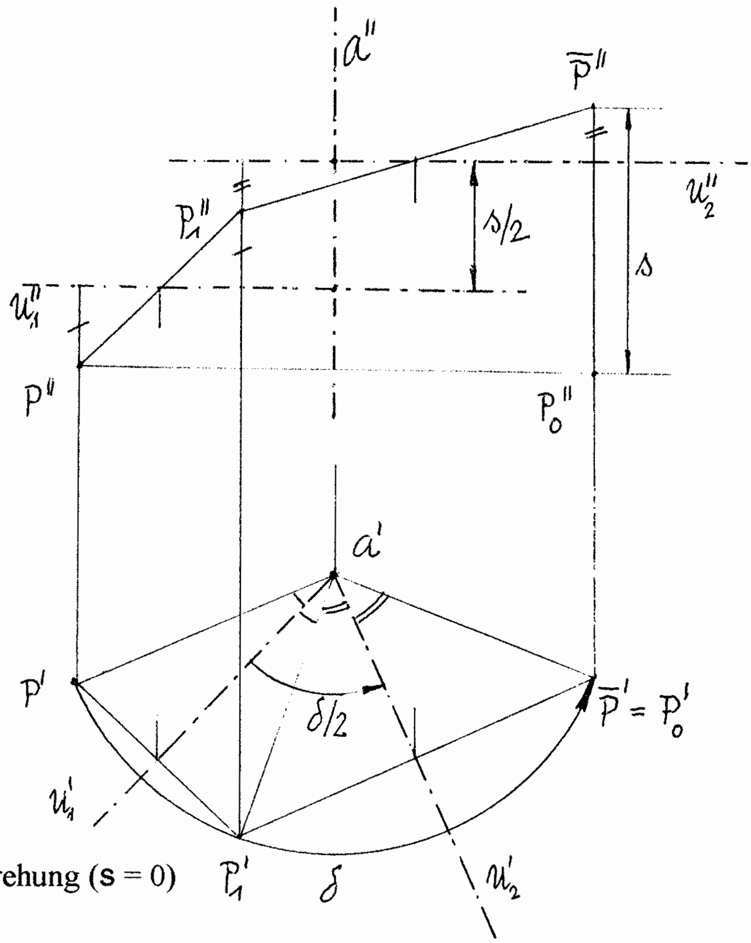
## Die Schraubung

Eine Schraubung besteht aus einer *Drehung um eine Achse* und eine *Schiebung* in Richtung dieser Ache

$\delta$ ... *Drehwinkel,*
(*Schraubwinkel*)
s ... *Schiebstrecke*
a ...*Schraubachse*




Die Zusammensetzun zweier *Umwendungen* um die windschiefen Achsen $u_1$, $u_2$ ist äquivalent einer Schraubung um das Gemeinlot von $u_1,u_2$. Der Schraubwinkel $\delta$ ist gleich dem doppelten Winkel $\angle\, u_1u_2$, die Schiebstrecke gleich dem doppelten Abstand der Umwendungsachsen $u_1$, $u_2$. Umgekehrt läßt sich jede durch Achse, Drehwinkel, Schiebstecke und Schraubsinn gegebene Schraubung auf unendlich viele Arten in zwei Umwendungen zerlegen. $u_1$ (bzw. $u_2$) kann orthogonal schneidend, aber sonst beliebig gewählt werden. $u_2$ ($u_1$) ist dann eindeutig bestimmt.

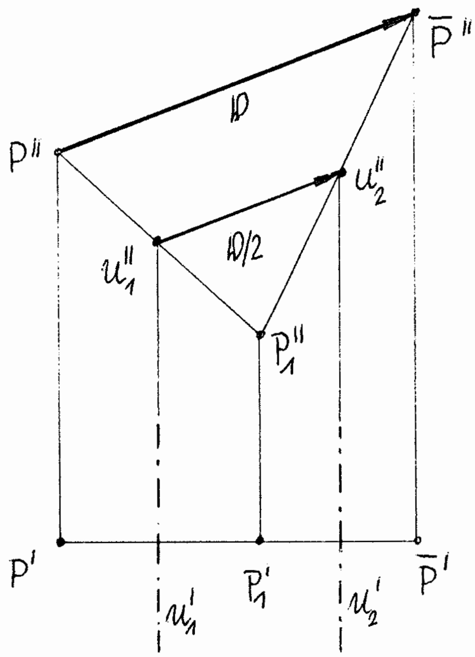



**Schneidende Umwendungsachsen**

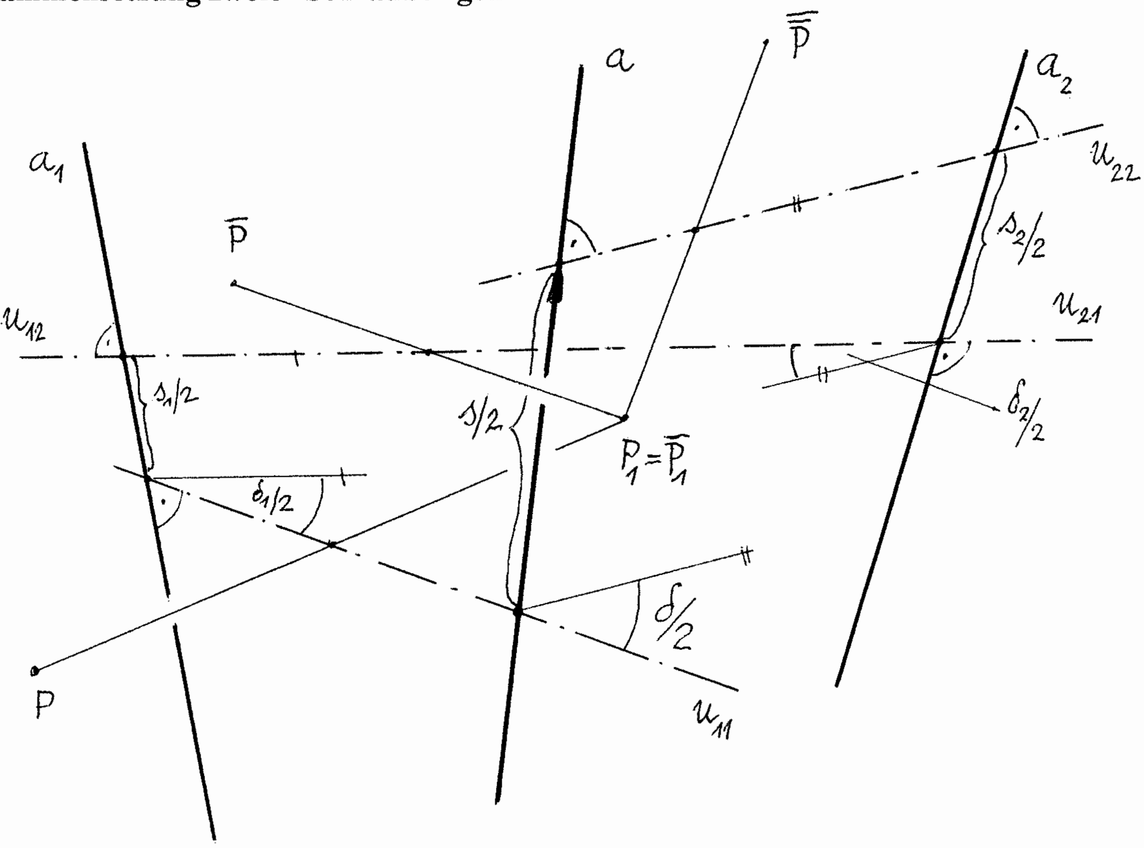
Es ergibt sich, wie bereits gezeigt, eine Drehung ($s = 0$)

### Parallele Umwendungsachsen

Die Zusammensetzung zweier Umwendungen um parallele Achsen $u_1$, $u_2$ ist äquivalent einer Parallelverschiebung ($\delta = 0$), deren Schiebvektor $\mathbf{v}$ auf $u_1$ und $u_2$ normal steht und dessen Betrag gleich dem doppelten Abstand von $u_1$ und $u_2$ ist. Umgekehrt läßt sich jede Parallelverschiebung auf unendlich viele Arten in Umwendungen um zwei parallele Achsen $u_1$, $u_2$ zerlegen, von der $u_1$ (bzw. $u_2$) normal auf den Schiebvektor $\mathbf{v}$, sonst aber beliebig gewählt werden kann. $u_2$ ($u_1$) ist dann eindeutig bestimmt.



### Zusammensetzung zweier Schraubungen



1. Schraubung: Sie werde festgelegt durch $a_1$, $\delta_1$, $s_1$ und den Schraubsinn
2. Schraubung: Sie werde festgelegt durch $a_2$, $\delta_2$, $s_2$ und den Schraubsinn

Wir zerlegen die 1.Schraubung in die beiden Umwendungen $u_{11}$, $u_{12}$, wobei wir $u_{12}$ als Gemeinlot von $a_1$ und $a_2$ wählen. Setzen wir $u_{12} \equiv u_{21}$, so wird die 2.Schraubung durch die Umwendungen $u_{21}$, $u_{22}$ ersetzt. Dann gilt

$$\underbrace{P \xrightarrow{u_{11}} P_1 \xrightarrow{u_{21}} \bar{P}}_{a_1} \underbrace{\xrightarrow{u_{21}} \bar{P}_1 = P_1 \xrightarrow{u_{22}} \bar{\bar{P}}}_{a_2}$$

Der Übergang

$$P \to \bar{\bar{P}}$$

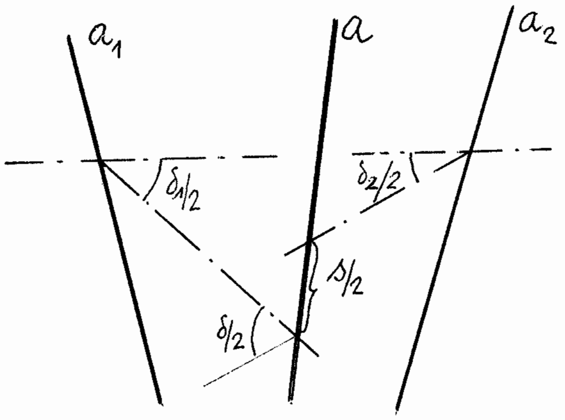
kann daher auch auf folgende Weise vollzogen werden

$$P \xrightarrow{u_{11}} P_1 = \bar{P}_1 \xrightarrow{u_{22}} \bar{\bar{P}}$$

Die Abfolge der Schraubungen $a_1$, $a_2$ kann daher durch die Abfolge der Umwendungen an $u_{11}$ $u_{22}$ ersetzt werden, also wieder durch eine Schraubung.

$$\boxed{\text{Die Zusammensetzung zweier Schraubungen ergibt wieder eine Schraubung}}$$

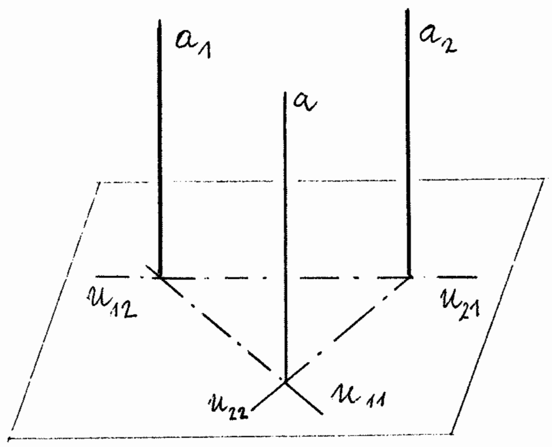
**Zusammensetzung zweier Drehungen mit windschiefen Achsen**




Es resultiert eine Schraubung

**Wann ist die Zusammensetzung zweier Drehungen wieder eine Drehung?**

1.Wenn die Drehachsen einander schneiden (bereits gezeigt)
2.Wenn die Drehachsen parallel sind.



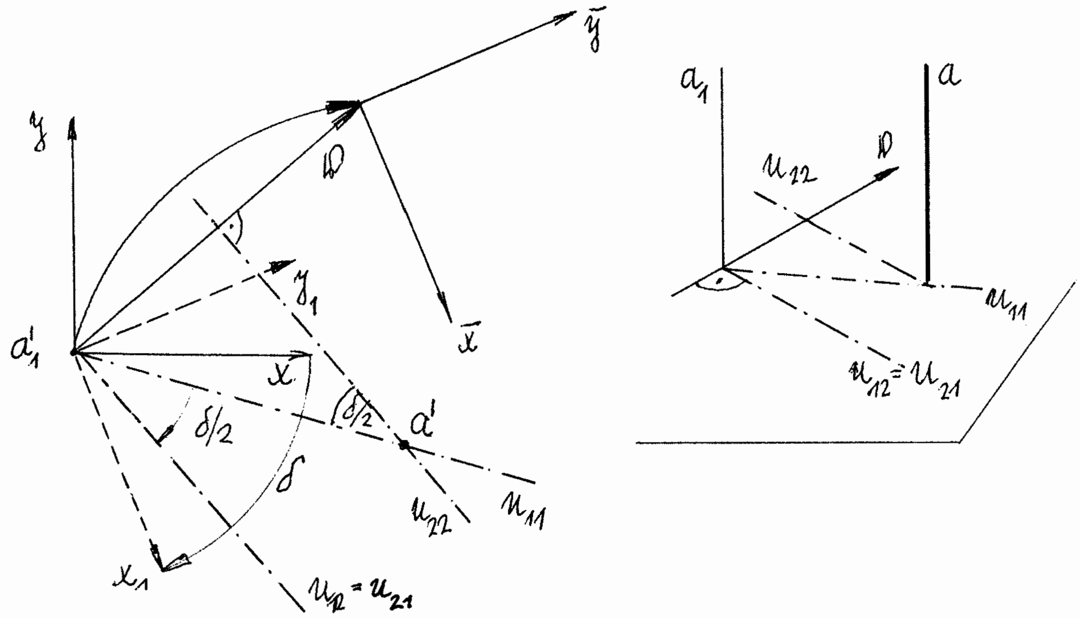

Es resultiert eine *ebene Bewegung*

# Allgemeine Bewegungen des Raumes

## Ebene Bewegung

Eine Bewegung des Raumes heißt *ebene Bewegung*, wenn bei ihr jede Ebene einer Schar paralleler Ebenen in sich konguruent abgebildet wird. Es gilt der

**Hauptsatz für ebene Bewegungen**: Jede ebene Bewegung ist einer Drehung äquivalent




Wir legen die Bewegung durch Vorgabe der Systeme $(x,y)$ und $(\bar{x},\bar{y})$ fest und zerlegen die Bewegung in

1. Drehung $(x,y) \to (x_1,y_1)$

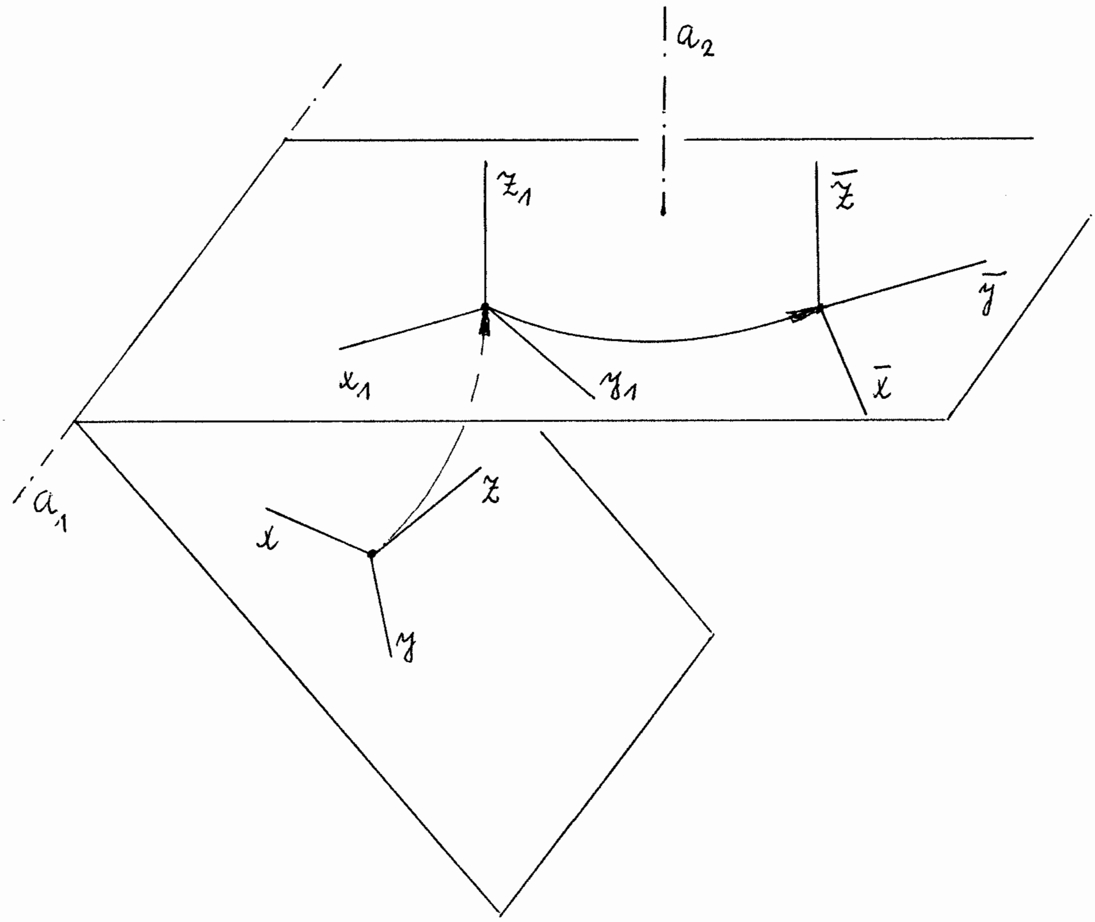
2. Schiebung $(x_1,y_1) \to (\bar{x},\bar{y})$

Die Drehung zerlegen wir in die beiden Umwendungen $u_{11}$, $u_{12}$, wobei wir $u_{12}' \perp$ auf den Schiebungsvektor $\mathbf{v}$ in der Ebene wählen. Die Schiebung zerlegen wir in die Umwendungen $u_{21} = u_{12}$ und $u_{22}$ ($u_{21} \parallel u_{22}$) und setzen die Umwendungen zusammen. Die gesamte Bewegung ist äquivalent den Umwendungen um die schneidenden Achsen $u_{12}$, $u_{22}$, d.h.es liegt eine Drehung vor.

## Hauptsatz für die Bewegung des Raumes

Jede Bewegung des Raumes ist einer Schraubung äquivalent

Wir legen Anfangs- und Endlage der Bewegung durch Vorgabe der Dreibeine $(x,y,z)$ und $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ fest. Die Schnittgerade der Ebenen $(x,y)$ und $(\bar{x},\bar{y})$ nennen wir $a_1$. Drehung um $a_1$, führt die $(x,y)$-Ebene in die $(\bar{x},\bar{y})$ Ebene über, wobei das Dreibein $(x,y,z)$ in das Dreibein $(x_1,y_1,z_1)$ übergeht. Eine ebene Bewegung (die Drehung um die Achse $a_1$) führt dann $(x_1,y_1,z_1)$ nach $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ über. Die Zusammensetzung der beiden Drehungen um die Achsen $a_1$ bzw. $a_2$ ist äquivalent einer Schraubung.




# Duale Quaternionen (Biquaternionen)

**Rechenregeln**

Es seien

$$\mathbf{A} = a + \mathbf{a}, \quad \hat{\mathbf{A}} = \hat{a} + \hat{\mathbf{a}}$$

zwei reelle (HAMILTONsche) Quaternionen. Mit Hilfer der *dualen Basis* $\varepsilon$ bilden wir die *Biquaternion*:

$$\underline{\mathbf{A}} := \mathbf{A} + \varepsilon \hat{\mathbf{A}} = (a + \mathbf{a}) + \varepsilon(\hat{a} + \hat{\mathbf{a}}) = (a + \varepsilon \hat{a}) + (\mathbf{a} + \varepsilon \hat{\mathbf{a}}) = \underline{a} + \underline{\mathbf{a}}$$

Die *konjugierte Biquaternion* lautet

$$\underline{\tilde{\mathbf{A}}} := \tilde{\mathbf{A}} + \varepsilon \tilde{\hat{\mathbf{A}}} = (a - \mathbf{a}) + \varepsilon(\hat{a} - \hat{\mathbf{a}}) = (a + \varepsilon \hat{a}) - (\mathbf{a} + \varepsilon \hat{\mathbf{a}}) = \underline{a} - \underline{\mathbf{a}}$$

Die $\varepsilon$-*konjugierte der Biquaternion* lautet

$$\underline{\mathbf{A}}_\varepsilon := \mathbf{A} - \varepsilon \hat{\mathbf{A}} = (a + \mathbf{a}) - \varepsilon(\hat{a} + \hat{\mathbf{a}}) = (a - \varepsilon \hat{a}) + (\mathbf{a} - \varepsilon \hat{\mathbf{a}}) = \underline{a_\varepsilon} + \underline{\mathbf{a}_\varepsilon}$$

Die $\varepsilon$-konjugierte der Konjugierten lautet

$$\underline{\tilde{\mathbf{A}}}_\varepsilon := \tilde{\mathbf{A}} - \varepsilon \tilde{\hat{\mathbf{A}}} = (a - \mathbf{a}) - \varepsilon(\hat{a} - \hat{\mathbf{a}}) = (a - \varepsilon \hat{a}) - (\mathbf{a} - \varepsilon \hat{\mathbf{a}}) = \underline{a_\varepsilon} - \underline{\mathbf{a}_\varepsilon}$$

$$\boxed{\underline{\mathbf{A}} \circ \underline{\mathbf{B}} := (\mathbf{A} + \varepsilon \hat{\mathbf{A}}) \circ (\mathbf{B} + \varepsilon \hat{\mathbf{B}}) = \mathbf{A} \circ \mathbf{B} + \varepsilon(\mathbf{A} \circ \hat{\mathbf{B}} + \hat{\mathbf{A}} \circ \mathbf{B}) = (\underline{a} + \underline{\mathbf{a}}) \circ (\underline{b} + \underline{\mathbf{b}})}$$

Wann ist dieses Produkt kommutativ?

$\underline{\mathbf{A}} \circ \underline{\mathbf{B}} = \underline{\mathbf{B}} \circ \underline{\mathbf{A}} \Rightarrow \mathbf{A} \circ \mathbf{B} + \varepsilon(\mathbf{A} \circ \hat{\mathbf{B}} + \hat{\mathbf{A}} \circ \mathbf{B}) = \mathbf{B} \circ \mathbf{A} + \varepsilon(\mathbf{B} \circ \hat{\mathbf{A}} + \hat{\mathbf{B}} \circ \mathbf{A}) \Rightarrow$

$\mathbf{A} \circ \mathbf{B} = \mathbf{B} \circ \mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{A}, \mathbf{B}$ koaxial $\Rightarrow \mathbf{b} = c\mathbf{a}$

$\mathbf{A} \circ \hat{\mathbf{B}} + \hat{\mathbf{A}} \circ \mathbf{B} = \mathbf{B} \circ \hat{\mathbf{A}} + \hat{\mathbf{B}} \circ \mathbf{A} \Rightarrow$

$(a\hat{b} - \mathbf{a}\hat{\mathbf{b}}) + a\hat{\mathbf{b}} + \hat{b}\mathbf{a} + \mathbf{a} \times \hat{\mathbf{b}} + (\hat{a}b - \hat{\mathbf{a}}\mathbf{b}) + \hat{a}\mathbf{b} + b\hat{\mathbf{a}} + \hat{\mathbf{a}} \times \mathbf{b} =$

$= (b\hat{a} - \mathbf{b}\hat{\mathbf{a}}) + b\hat{\mathbf{a}} + \hat{a}\mathbf{b} + \mathbf{b} \times \hat{\mathbf{a}} + (\hat{b}a - \hat{\mathbf{b}}\mathbf{a}) + \hat{b}\mathbf{a} + a\hat{\mathbf{b}} + \hat{\mathbf{b}} \times \mathbf{a} \Rightarrow$

$2(\mathbf{a} \times \hat{\mathbf{b}} + \hat{\mathbf{a}} \times \mathbf{b}) = \mathbf{o} \Rightarrow \mathbf{a} \times \hat{\mathbf{b}} + \hat{\mathbf{a}} \times (c\mathbf{a}) = \mathbf{a} \times (\hat{\mathbf{b}} - c\hat{\mathbf{a}}) \Rightarrow \hat{\mathbf{b}} - c\hat{\mathbf{a}} = \hat{c}\mathbf{a} \Rightarrow \hat{\mathbf{b}} = \hat{c}\mathbf{a} + c\hat{\mathbf{a}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \mathbf{b} + \varepsilon\hat{\mathbf{b}} = (c + \varepsilon\hat{c})(\mathbf{a} + \varepsilon\hat{\mathbf{a}}) \Rightarrow \underline{\mathbf{b}} = \underline{c}\underline{\mathbf{a}} \Rightarrow \underline{\mathbf{a}}, \underline{\mathbf{b}}$ linear abhä ngig$\Rightarrow \underline{\mathbf{A}}, \underline{\mathbf{B}}$ koaxial

Umgekehrt gilt für koaxiale Biquaternionen

$\underline{\mathbf{a}} \times \underline{\mathbf{b}} = \underline{\mathbf{o}} \Rightarrow \underline{\mathbf{A}} \circ \underline{\mathbf{B}} = (\underline{a} + \underline{\mathbf{a}}) \circ (\underline{b} + \underline{\mathbf{b}}) = \underline{a}\underline{b} - (\underline{\mathbf{a}}\underline{\mathbf{b}}) + \underline{a}\underline{\mathbf{b}} + \underline{b}\underline{\mathbf{a}} = \underline{\mathbf{B}} \circ \underline{\mathbf{A}}$

Daraus folgt[1]

$$\boxed{\underline{\mathbf{A}} \circ \underline{\mathbf{B}} = \underline{\mathbf{B}} \circ \underline{\mathbf{A}} \Leftrightarrow \underline{\mathbf{b}} = \underline{c}\underline{\mathbf{a}}}$$

Wann ist $\underline{\mathbf{A}} \circ \underline{\mathbf{B}} = \underline{\mathbf{0}}$? Dann muß sein

$\underline{\mathbf{A}} \circ \underline{\mathbf{B}} = (\mathbf{A} + \varepsilon\hat{\mathbf{A}}) \circ (\mathbf{B} + \varepsilon\hat{\mathbf{B}}) = \mathbf{A} \circ \mathbf{B} + \varepsilon(\mathbf{A} \circ \hat{\mathbf{B}} + \hat{\mathbf{A}} \circ \mathbf{B}) = \underline{\mathbf{O}}$

Daher

$\mathbf{A} \circ \mathbf{B} = \mathbf{O} \Rightarrow \mathbf{A} = \mathbf{O} \vee \mathbf{B} = \mathbf{O}$ da Q ein Körper ist

$\mathbf{A} \circ \hat{\mathbf{B}} + \hat{\mathbf{A}} \circ \mathbf{B} = \mathbf{O}$

1. Fall: $\mathbf{A} = \mathbf{O}, \mathbf{B} \neq \mathbf{O} \Rightarrow \hat{\mathbf{A}} \circ \mathbf{B} = \mathbf{O} \Rightarrow \hat{\mathbf{A}} = \mathbf{O} \Rightarrow \underline{\mathbf{A}} = \underline{\mathbf{O}}$ Trivialer Fall

2. Fall: $\mathbf{A} = \mathbf{O} \wedge \mathbf{B} = \mathbf{O} \Rightarrow$ keine Aussage über $\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{B}} \Rightarrow \underline{\mathbf{A}}, \underline{\mathbf{B}}$ rein dual

$$\boxed{\underline{\mathbf{A}} \circ \underline{\mathbf{B}} = \underline{\mathbf{O}} \Leftrightarrow \underline{\mathbf{A}}, \underline{\mathbf{B}} \text{ rein dual}}$$

Es ergibt sich daher der Satz

| |
|---|
| Die Menge $\underline{Q}$ der Biquaternionen ist ein nichtkommutativer Ring mit Einselement und Nullteilern |

**Norm einer Biquaternion**

$\underline{A}^2 := \underline{\mathbf{A}} \circ \underline{\tilde{\mathbf{A}}} = \underline{\tilde{\mathbf{A}}} \circ \underline{\mathbf{A}} = (\mathbf{A} + \varepsilon\hat{\mathbf{A}}) \circ (\tilde{\mathbf{A}} + \varepsilon\tilde{\hat{\mathbf{A}}}) = \mathbf{A} \circ \tilde{\mathbf{A}} + \varepsilon(\mathbf{A} \circ \tilde{\hat{\mathbf{A}}} + \hat{\mathbf{A}} \circ \tilde{\mathbf{A}}) =$

$= A^2 + \varepsilon[(a + \mathbf{a}) \circ (\hat{a} - \hat{\mathbf{a}}) + (\hat{a} + \hat{\mathbf{a}}) \circ (a - \mathbf{a})] =$

$= A^2 + \varepsilon[(a\hat{a} + \mathbf{a}\hat{a}) + (\hat{a}\mathbf{a} - a\hat{\mathbf{a}} - \mathbf{a} \times \hat{\mathbf{a}}) + (a\hat{a} + \mathbf{a}\hat{\mathbf{a}}) - \hat{a}\mathbf{a} + a\hat{\mathbf{a}} - \hat{\mathbf{a}} \times \mathbf{a}] = A^2 + 2\varepsilon(a\hat{a} + \mathbf{a}\hat{\mathbf{a}})$

Daher

$$\boxed{\underline{A}^2 = \underline{\mathbf{A}} \circ \underline{\tilde{\mathbf{A}}} = \underline{\tilde{\mathbf{A}}} \circ \underline{\mathbf{A}} = A^2 + 2\varepsilon(a\hat{a} + \mathbf{a}\hat{\mathbf{a}}), \quad \underline{A} = A + \varepsilon\frac{a\hat{a} + \mathbf{a}\hat{\mathbf{a}}}{A}, \quad A \neq 0}$$

Die Norm einer Biquaternion verschwindet genau dann, wenn gilt

$A^2 = 0 \wedge a\hat{a} + \mathbf{a}\hat{\mathbf{a}} = 0 \Leftrightarrow [A^2 = a^2 + |\mathbf{a}|^2 = 0 \Leftrightarrow a = 0 \wedge \mathbf{a} = \mathbf{o} \Rightarrow a\hat{a} + \mathbf{a}\hat{\mathbf{a}} = 0] \Leftrightarrow \mathbf{A} = \mathbf{O}$

[1] Den Fall, in welchem $\underline{x}\underline{\mathbf{a}} + \underline{y}\underline{\mathbf{b}} = \mathbf{o}$ gilt, untersuchen wir nicht näher

Dies ist genau dann der Fall, wenn die Biquaternion *rein dual* ist. Die Menge der *rein dualen Biquaternionen* nennen wir $\underline{\mathbb{I}}$. Die Biquaternionen mit nichtverschwindender Norm gehören der Menge $\underline{\mathbb{Q}} \setminus \underline{\mathbb{I}}$ an.

**Inverse einer Biquaternion**

$$\underline{\mathbf{A}} \circ \underline{\mathbf{A}}^{-1} = 1 \Rightarrow \left(\underline{\tilde{\mathbf{A}}} \circ \underline{\mathbf{A}}\right) \circ \underline{\mathbf{A}}^{-1} = \underline{\tilde{\mathbf{A}}} \Rightarrow \underline{A}^2 \overline{\mathbf{A}}^{-1} = \underline{\tilde{\mathbf{A}}} \Rightarrow \underline{\mathbf{A}}^{-1} = \frac{\underline{\tilde{\mathbf{A}}}}{\underline{A}^2}$$

Wegen

$$\frac{1}{\underline{A}^2} = \frac{1}{A^2} - \varepsilon \frac{2(a\hat{a} + \mathbf{a}\hat{\mathbf{a}})}{A^4}$$

$\dfrac{1}{\underline{A}^2}$ existiert genau dann, wenn $A^2 \neq 0$ ist, d.h. wenn $\mathbf{A} \neq \mathbf{O}$ ist, d.h. wenn $\underline{\mathbf{A}}$ nicht rein dual ist.

Es gilt demnach

$$\boxed{\underline{\mathbf{A}}^{-1} = \frac{\underline{\tilde{\mathbf{A}}}}{\underline{A}^2}, \quad \underline{\mathbf{A}} \in \underline{\mathbb{Q}} \setminus \underline{\mathbb{I}}}$$

die Menge $\underline{\mathbb{Q}} \setminus \underline{\mathbb{I}}$ der invertierbaren Elemente des Ringes $\underline{\mathbb{Q}}$ der Biquaternionen stellt den *Quotientenkörper* des Biquaternionenringes dar.
Es gelten folgende Rechenregeln

$$\boxed{\begin{aligned}
&(\underline{\mathbf{A}} \pm \underline{\mathbf{B}})_\varepsilon = \underline{\mathbf{A}}_\varepsilon \pm \underline{\mathbf{B}}_\varepsilon \\
&(\underline{\mathbf{A}} \circ \underline{\mathbf{B}})_\varepsilon = \underline{\mathbf{A}}_\varepsilon \circ \underline{\mathbf{B}}_\varepsilon \\
&(\underline{\mathbf{A}} \pm \underline{\mathbf{B}})^\sim = \underline{\tilde{\mathbf{A}}} \pm \underline{\tilde{\mathbf{B}}} \\
&(\underline{\mathbf{A}} \circ \underline{\mathbf{B}})^\sim = \underline{\tilde{\mathbf{B}}} \circ \underline{\tilde{\mathbf{A}}} \\
&(\underline{\mathbf{A}} \circ \underline{\mathbf{B}})^{-1} = \underline{\mathbf{B}}^{-1} \circ \underline{\mathbf{A}}^{-1}
\end{aligned}}$$

# Anwendung der Biquaternionen in der Geometrie

Study

### Geradenquaternionen

Es seien $\mathbf{g}$, $\mathbf{g}^*$ ($\mathbf{g}\mathbf{g}^* = 0$) die PLÜCKER-Vektoren einer Geraden. Wir haben ihr bereits den dualen Vektor $\underline{\mathbf{g}} = \mathbf{g} + \varepsilon\mathbf{g}^*$ zugeodnet, für welchen gilt $|\underline{\mathbf{g}}| = |\mathbf{g}| = \lambda \in \Re$. Umgekehrt wird einem dualen Vektor mit reellen Betrag $|\underline{\mathbf{g}}|$ eine Raumgerade zugeordnet. $\underline{\mathbf{g}}$ ist eine spezielle, rein vektorielle Biquaternion, für die gilt

$$\boxed{\underline{\mathrm{G}} := \underline{\mathbf{g}} = \mathbf{g} + \varepsilon\mathbf{g}^*,\quad \underline{\mathrm{G}} + \underline{\widetilde{\mathrm{G}}} = \underline{\mathrm{O}},\quad \underline{\mathrm{G}} \circ \underline{\widetilde{\mathrm{G}}} \in \Re \quad \textit{Geradenquaternion}}$$

Umgekehrt entspricht einer Quaternion

$\underline{\mathrm{A}} = \underline{a} + \underline{\mathbf{a}}$ mit $\underline{\mathrm{A}} + \underline{\widetilde{\mathrm{A}}} = \underline{\mathrm{O}}$, $\underline{\mathrm{A}} \circ \underline{\widetilde{\mathrm{A}}} \in \Re$ eine Gerade, denn es gilt

$$\underline{\mathrm{A}} + \underline{\widetilde{\mathrm{A}}} = \underline{\mathrm{O}} \Rightarrow (\underline{a} + \underline{\mathbf{a}}) + (\underline{a} - \underline{\mathbf{a}}) = 2\underline{a} = \underline{\mathrm{O}} \Rightarrow \underline{a} = 0 = a + \varepsilon\hat{a} \Rightarrow a = \hat{a} = 0$$

$$\underline{\mathrm{A}} \circ \underline{\widetilde{\mathrm{A}}} = \mathrm{A}^2 + 2\varepsilon(a\hat{a} + \mathbf{a}\hat{\mathbf{a}}) = |\mathbf{a}|^2 + 2\varepsilon\,\mathbf{a}\hat{\mathbf{a}} \in \Re \Rightarrow \mathbf{a}\hat{\mathbf{a}} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{a}, \hat{\mathbf{a}} =: \mathbf{a}^* \ldots \text{PLÜCKER - Vektoren}$$

> Jeder Raumgeraden entspricht eine bis auf einen *reellen Faktor* eindeutige *Geradenquaternion*.
> Umgekehrt entspricht jeder Geradenquaternion eindeutig eine Raumgerade

### Punktquaternionen

Jedem Punkt mit dem Ortsvektor $\mathbf{x}$ ordnen wir die Biquaternion[1]

$$\boxed{\underline{\mathrm{X}} := 1 + \varepsilon\mathbf{x},\quad \underline{\mathrm{X}} = \underline{\widetilde{\mathrm{X}}}_\varepsilon,\quad \underline{\mathrm{X}} + \underline{\mathrm{X}}_\varepsilon = 2 \qquad \textit{Punktquaternion}}$$

Study

zu. Umgekehrt entspricht jeder derartigen Quaternion ein Punkt:

$$\underline{\mathrm{A}} = (a + \varepsilon\hat{a}) + (\mathbf{a} + \varepsilon\hat{\mathbf{a}}) = \underline{\widetilde{\mathrm{A}}}_\varepsilon = (a - \varepsilon\hat{a}) - (\mathbf{a} - \varepsilon\hat{\mathbf{a}}) \Rightarrow \hat{a} = 0, \mathbf{a} = \mathbf{0} \Rightarrow$$

$$\underline{\mathrm{A}} = a + \varepsilon\hat{\mathbf{a}},\quad \underline{\mathrm{A}} + \underline{\mathrm{A}}_\varepsilon = (a + \varepsilon\hat{\mathbf{a}}) + (a - \varepsilon\hat{\mathbf{a}}) = 2a = 2 \Rightarrow a = 1$$

$$\underline{\mathrm{A}} = 1 + \varepsilon\hat{\mathbf{a}} \cdots \hat{\mathbf{a}} := \mathbf{x} \text{ ist Ortsvektor}$$

> Jedem Raumpunkt entspricht in bijektiver Weise eine Punktquaternion

### Ebenenquaternion

Jeder Ebene mit den homogenen Ebenenkoordinaten $\mathbf{n}$, $\mathrm{d}$ wird die Biquaternion

$$\boxed{\underline{\mathrm{N}} = \mathbf{n} + \varepsilon\mathrm{d},\quad \underline{\widetilde{\mathrm{N}}} + \underline{\mathrm{N}}_\varepsilon = \underline{\mathrm{O}} \qquad \textit{Ebenenquaternion}}$$

zugeordnet. Umgekehrt entspricht jeder Biquaternion mit dieser Eigenschaft eine Ebene:

---

[1] Da die Quaternionen ihren Ursprung in der Mechanik haben, ist jeder "Punkt" ein Massenpunkt. Die in obiger Definition auftretende Konstante stellt die Masse des Punktes dar. Bei uns hat jeder Punkt die Masse 1.

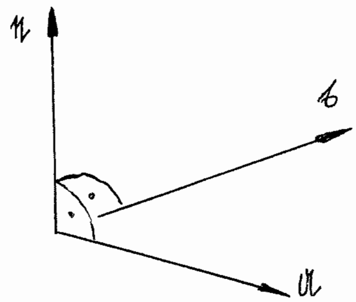
$$\underline{\tilde{\mathbf{A}}} + \underline{\mathbf{A}}_\varepsilon = (\mathrm{a}+\varepsilon\,\hat{\mathrm{a}}) - (\mathbf{a}+\varepsilon\,\hat{\mathbf{a}}) + (\mathrm{a}-\varepsilon\,\hat{\mathrm{a}}) + (\mathbf{a}-\varepsilon\,\hat{\mathbf{a}}) = \underline{\mathbf{O}} \Rightarrow 2\mathrm{a}=0, 2\hat{\mathbf{a}} = \mathbf{o} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\mathbf{A}} = \varepsilon\,\hat{\mathrm{a}} + \mathbf{a} \Rightarrow \mathbf{a} =: \mathbf{n}, \hat{\mathrm{a}} =: \mathrm{d}$$

| |
|---|
| Jeder Ebene des Raumes entspricht eine bis auf einen reellen Faktor bestimmte *Ebenenquaternion*. Umgekehrt entspricht jeder Ebenenquaternion eindeutig eine Ebene des Raumes. |

# Anwendung der Biquaternionen auf die Bewegungen des Raumes

## Bewegungen des Geradenraumes



Die reelle Einheitsqauternio $\cos\varphi + \mathbf{e}\sin\varphi$ bewirkt in der zu ihrer Achse normalen Ebene eine Drehung um den Winkel $\varphi$, wobei der zu $\mathbf{e}$ orthogonale Vektor $\mathbf{a}$ in den Vektor $\mathbf{b}$ übergeht. Dabei gilt

$$\mathbf{b} = (\cos\varphi + \mathbf{e}\sin\varphi) \circ \mathbf{a}, \quad \mathbf{ae} = 0 \text{ mit } \mathbf{be} = 0 \text{ und } |\mathbf{b}| = |\mathbf{a}|$$

Dieser Formelapparat soll ins Duale übertagen werden.

Es sei $\underline{\mathbf{E}} = \cos\underline{\varphi} + \underline{\mathbf{e}}\sin\underline{\varphi}$ eine duale Einheitsquaternion und $\underline{\mathbf{a}}^\circ$ ein dualer Einheitsvektor. Dann betrachten wir das Quaternionenprodukt

$$\underline{\mathbf{E}} \circ \underline{\mathbf{a}}^\circ = (\cos\underline{\varphi} + \underline{\mathbf{e}}\sin\underline{\varphi}) \circ \underline{\mathbf{a}}^\circ = -\underbrace{(\underline{\mathbf{e}}\underline{\mathbf{a}}^\circ)}_{0}\sin\underline{\varphi} + \underline{\mathbf{a}}^\circ\cos\underline{\varphi} + \underline{\mathbf{e}} \times \underline{\mathbf{a}}^\circ\sin\underline{\varphi} = \underline{\mathbf{b}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\mathbf{b}} = \underline{\mathbf{a}}^\circ\cos\underline{\varphi} + \underline{\mathbf{e}} \times \underline{\mathbf{a}}^\circ\sin\underline{\varphi}$$

1. Das Produkt ist wieder ein *dualer Vektor* $\underline{\mathbf{b}}$
2. $\underline{\mathbf{b}}$ ist wieder ein dualer *Einheitsvektor* $\underline{\mathbf{b}}^\circ$. Es ist nämlich

$$|\underline{\mathbf{b}}|^2 = |\underline{\mathbf{a}}^\circ\cos\underline{\varphi} + \underline{\mathbf{e}} \times \underline{\mathbf{a}}^\circ\sin\underline{\varphi}|^2 = |\underline{\mathbf{a}}^\circ|^2\cos^2\underline{\varphi} + |\underline{\mathbf{e}} \times \underline{\mathbf{a}}^\circ|^2\sin^2\underline{\varphi} + 2\underbrace{(\underline{\mathbf{a}}^\circ, \underline{\mathbf{e}}, \underline{\mathbf{a}}^\circ)}_{0}\cos\underline{\varphi}\sin\underline{\varphi} =$$

$$= \cos^2\underline{\varphi} + \left[\underbrace{|\underline{\mathbf{e}}|^2}_{1}\underbrace{|\underline{\mathbf{a}}^\circ|^2}_{1} - (\underline{\mathbf{e}}\underline{\mathbf{a}}^\circ)^2\right]\sin^2\underline{\varphi} = \cos^2\underline{\varphi} + \sin^2\underline{\varphi} = 1 \Rightarrow |\underline{\mathbf{b}}| = 1$$

3. Es ist $\underline{\mathbf{b}}^\circ\underline{\mathbf{e}} = 0$, denn es ist

$$[\underline{\mathbf{a}}^\circ\cos\underline{\varphi} + \underline{\mathbf{e}} \times \underline{\mathbf{a}}^\circ\sin\underline{\varphi}]\,\underline{\mathbf{e}} = \underbrace{(\underline{\mathbf{a}}^\circ\underline{\mathbf{e}})}_{0} + \underbrace{(\underline{\mathbf{e}}, \underline{\mathbf{a}}^\circ, \underline{\mathbf{a}}^\circ)}_{0}\sin\underline{\varphi} = 0$$

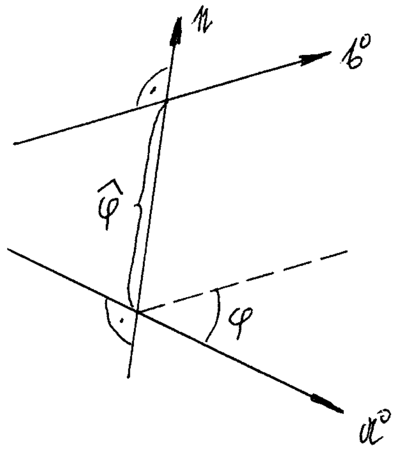
4. $\underline{\mathbf{a}}^\circ\underline{\mathbf{b}}^\circ = \cos\underline{\varphi}$, denn es ist

$$[\underline{\mathbf{a}}^\circ\cos\underline{\varphi} + (\underline{\mathbf{e}} \times \underline{\mathbf{a}}^\circ)\sin\underline{\varphi}]\,\underline{\mathbf{a}}^\circ = |\underline{\mathbf{a}}^\circ|^2\cos\underline{\varphi} + (\underline{\mathbf{e}}, \underline{\mathbf{a}}^\circ, \underline{\mathbf{a}}^\circ)\sin\underline{\varphi} = \cos\underline{\varphi}$$

**Geometrische Deutung:**

$\underline{\mathbf{e}}$, $\underline{\mathbf{a}}^\circ$, $\underline{\mathbf{b}}^\circ$ stellen drei Speere e, a, b dar. Wegen $\underline{\mathbf{a}}^\circ\underline{\mathbf{e}} = 0$ und $\underline{\mathbf{b}}^\circ\underline{\mathbf{e}} = 0$ schneiden a und b den Speer e orthogonal. Die Speere a und b schließen den dualen Winkel

$\underline{\varphi} = \varphi + \varepsilon\hat{\varphi}$ ein, d.h. die Speere a und b schließen den euklidischen Winkel $\varphi$ ein und haben den Abstand $\hat{\varphi}$.



Betrachten wir die zu $\underline{\mathbf{E}}$ konjugierte Biquaternion $\underline{\tilde{\mathbf{E}}}$:

$\underline{\tilde{\mathbf{E}}} = \cos\underline{\varphi} - \underline{\mathbf{e}}\sin\underline{\varphi}$ und bilden

$$\underline{\tilde{\mathbf{E}}} \circ \underline{\mathbf{a}}^\circ = \left(\cos\underline{\varphi} - \underline{\mathbf{e}}\sin\underline{\varphi}\right) \circ \underline{\mathbf{a}}^\circ = \underline{\mathbf{a}}^\circ\cos\underline{\varphi} - \underline{\mathbf{e}} \times \underline{\mathbf{a}}^\circ\sin\underline{\varphi} = \underline{\bar{\mathbf{b}}}$$

Wieder gilt

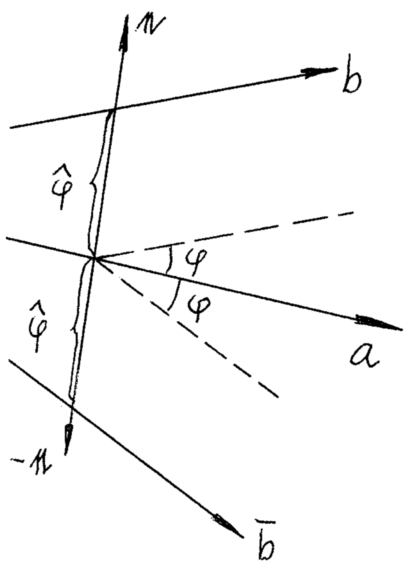
1. $\underline{\tilde{\mathbf{E}}} \circ \underline{\mathbf{a}}^\circ$ ist ein Vektor $\underline{\bar{\mathbf{b}}}$
2. $\underline{\bar{\mathbf{b}}}$ ist Einheitsvektor $\underline{\bar{\mathbf{b}}}^\circ$, denn es gilt $\left|\underline{\bar{\mathbf{b}}}\right|^2 = \cos^2\underline{\varphi} + \sin^2\underline{\varphi} = 1$
3. $\underline{\bar{\mathbf{b}}}^\circ\underline{\mathbf{e}} = 0$
4. $\underline{\bar{\mathbf{b}}}^\circ\underline{\mathbf{a}}^\circ = \left(\underline{\mathbf{a}}^\circ\cos\underline{\varphi} - \underline{\mathbf{e}} \times \underline{\mathbf{a}}^\circ\sin\underline{\varphi}\right)\underline{\mathbf{a}}^\circ = \cos\underline{\varphi}$

Ferner gilt

5. $\underline{\mathbf{b}}^\circ\underline{\bar{\mathbf{b}}}^\circ = \left(\underline{\mathbf{a}}^\circ\cos\underline{\varphi} + \underline{\mathbf{e}} \times \underline{\mathbf{a}}^\circ\sin\underline{\varphi}\right)\left(\underline{\mathbf{a}}^\circ\cos\underline{\varphi} - \underline{\mathbf{e}} \times \underline{\mathbf{a}}^\circ\sin\underline{\varphi}\right) = \cos^2\underline{\varphi} - \left|\underline{\mathbf{e}} \times \underline{\mathbf{a}}^\circ\right|^2\sin^2\underline{\varphi} =$

$$= \cos^2\underline{\varphi} - \left[\left|\underline{\mathbf{e}}\right|^2\left|\underline{\mathbf{a}}^\circ\right|^2 - \left(\underline{\mathbf{e}}\underline{\mathbf{a}}^\circ\right)^2\right]\sin^2\underline{\varphi} = \cos^2\underline{\varphi} - \sin^2\underline{\varphi} = \sin 2\underline{\varphi}$$

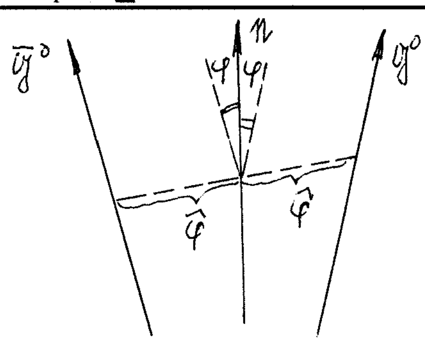
> Die duale Einheitsquaternion
>
> $$\underline{\mathbf{E}} = \cos\underline{\varphi} + \underline{\mathbf{e}}\sin\underline{\varphi}$$
>
> verschraubt den den Speer e orthogonal schneidenden Speer a° um e durch den dualen Winkel
>
> $$\underline{\varphi} = \varphi + \varepsilon\hat{\varphi}$$
>
> ($\varphi\ldots$Drehwinkel, $\hat{\varphi}\ldots$Schiebstrecke)
> in die Lage
>
> $$\underline{\mathbf{b}}^\circ = \underline{\mathbf{E}} \circ \underline{\mathbf{a}}^\circ$$
>
> Die zu $\underline{\mathbf{E}}$ konjugierte Biquaternion
>
> $$\underline{\mathbf{E}} = \cos\underline{\varphi} - \underline{\mathbf{e}}\sin\underline{\varphi}$$
>
> führt $\underline{\mathbf{a}}^\circ$ in jene Lage $\underline{\bar{\mathbf{b}}}^\circ$ ober, die zu $\underline{\mathbf{b}}^\circ$ bezüglich $\underline{\mathbf{a}}^\circ$ spiegelbildlich liegt



Wegen $\underline{\mathbf{b}}^\circ = \underline{\mathbf{E}} \circ \underline{\mathbf{a}}^\circ \Rightarrow \underline{\mathbf{b}}^\circ \circ \underline{\mathbf{a}}^{\circ-1} = \underline{\mathbf{E}}$ ergibt sich daher

> Die duale Einheitsquaternion
>
> $$\underline{\mathbf{E}} = \underline{\mathbf{b}}^\circ \circ \underline{\mathbf{a}}^{\circ-1}$$
>
> verschraubt den Speer $\underline{\mathbf{a}}^\circ$ in den Speer $\underline{\mathbf{b}}^\circ$ um das Gemeinlot dieser Speere

**Umwendung an einem Speer**



Es ist

$\underline{\mathbf{E}} = \underline{\mathbf{g}}^\circ \circ \underline{\mathbf{e}}^{-1} = -\underline{\mathbf{g}}^\circ \circ \underline{\mathbf{e}}$

$\underline{\tilde{\mathbf{E}}} = \underline{\bar{\mathbf{g}}}^\circ \circ \underline{\mathbf{e}}^{-1} = -\underline{\bar{\mathbf{g}}}^\circ \circ \underline{\mathbf{e}}$

Aus der ersten Beziehung folgt

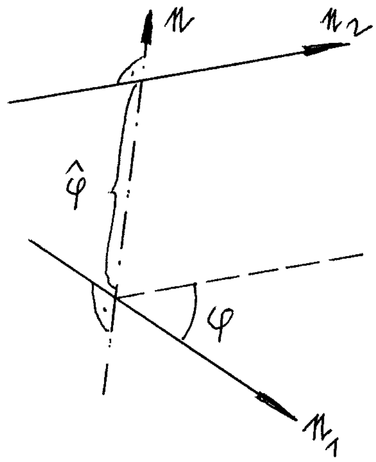
$\tilde{\underline{\mathbf{E}}} = -\left(\underline{\mathbf{g}}^{\circ}\circ\underline{\mathbf{e}}\right)^{\sim} = -\tilde{\underline{\mathbf{e}}}\circ\tilde{\underline{\mathbf{g}}}^{\circ} = -\underline{\mathbf{e}}\circ\underline{\mathbf{g}}^{\circ}$ daher

$+\bar{\underline{\mathbf{g}}}^{\circ}\circ\underline{\mathbf{e}} = +\underline{\mathbf{e}}\circ\underline{\mathbf{g}}^{\circ} \quad |\circ\tilde{\underline{\mathbf{e}}}$

$\bar{\underline{\mathbf{g}}}^{\circ}\circ\underbrace{\underline{\mathbf{e}}\circ\tilde{\underline{\mathbf{e}}}}_{1} = \underline{\mathbf{e}}\circ\underline{\mathbf{g}}^{\circ}\circ\tilde{\underline{\mathbf{e}}}$

**Schraubung um einen Speer**

Die Zusammensetzung zweier Umwendungen ergibt die Schraubung um das Gemeinlot der beiden Umwendungsachsen:




$\underline{\mathbf{g}}_1^{\circ} = \underline{\mathbf{e}}_1\circ\underline{\mathbf{g}}^{\circ}\circ\tilde{\underline{\mathbf{e}}}_1$

$\bar{\underline{\mathbf{g}}}^{\circ} = \underline{\mathbf{e}}_2\circ\underline{\mathbf{g}}_1^{\circ}\circ\tilde{\underline{\mathbf{e}}}_2$

$\bar{\underline{\mathbf{g}}}^{\circ} = \left(\underline{\mathbf{e}}_2\circ\underline{\mathbf{e}}_1\right)\circ\underline{\mathbf{g}}^{\circ}\circ\left(\tilde{\underline{\mathbf{e}}}_1\circ\tilde{\underline{\mathbf{e}}}_2\right) = \left(\underline{\mathbf{e}}_2\circ\underline{\mathbf{e}}_1\right)\circ\underline{\mathbf{g}}^{\circ}\circ\left(\underline{\mathbf{e}}_2\circ\underline{\mathbf{e}}_1\right)^{\sim}$

Setzt man

$$\underline{\mathbf{D}} := -\underline{\mathbf{e}}_2\circ\underline{\mathbf{e}}_1, \quad \underline{\mathbf{D}}\circ\tilde{\underline{\mathbf{D}}} = 1$$

dann gilt mit Hilfe der Einheitsquaternion $\underline{\mathbf{D}}$

Bewegungen des Geradenraumes $\boxed{\bar{\underline{\mathbf{g}}}^{\circ} = \underline{\mathbf{D}}\circ\underline{\mathbf{g}}^{\circ}\circ\tilde{\underline{\mathbf{D}}}}$

Es ist

$\underline{\mathbf{D}} = -\underline{\mathbf{e}}_2\circ\underline{\mathbf{e}}_1 = -\left[-\underline{\mathbf{e}}_1\underline{\mathbf{e}}_2 + \underline{\mathbf{e}}_2\times\underline{\mathbf{e}}_1\right] = \underline{\mathbf{e}}_1\underline{\mathbf{e}}_2 + \underline{\mathbf{e}}_1\times\underline{\mathbf{e}}_2$

Daher

$$\boxed{\underline{\mathbf{D}} = \underline{\mathbf{e}}_1\underline{\mathbf{e}}_2 + \underline{\mathbf{e}}_1\times\underline{\mathbf{e}}_2 = \cos\underline{\varphi} + \underline{\mathbf{e}}\sin\underline{\varphi}}$$

Die Abfolge der Umwendungen ergibt eine Schraubung um $\underline{\mathbf{e}}$ mit dem Drehwinkel $\delta = 2\varphi$ und der Schiebstrecke $s = 2\hat{\varphi}$.

Die Größe $\underline{\delta} = \delta + \varepsilon s$ heißt

$$\boxed{\underline{\delta} = \delta + \varepsilon s \quad \textit{dualer Drehwinkel}}$$

Dann gilt

$$\boxed{\underline{\mathbf{D}} = \cos\frac{\underline{\delta}}{2} + \underline{\mathbf{e}}\sin\frac{\underline{\delta}}{2}}$$

| |
|---|
| Jeder Schraubung des Raumes werden zwei duale Einheitsquaternionen $\pm\,\underline{\mathbf{D}}$ zugeordnet. Durch jede duale Einheitsquaternion ist eine Schraubung des Raumes eindeutig festgelegt. |

Durch obige Formeln weden die Bewegungen des *Geradenraumes* beschrieben.

Allgemein: $\bar{\underline{\mathfrak{G}}} = \underline{\mathfrak{D}}\circ\underline{\mathfrak{G}}\circ\tilde{\underline{\mathfrak{D}}} \qquad \underline{\mathfrak{G}} + \tilde{\underline{\mathfrak{G}}} = \underline{0} \qquad \underline{\mathfrak{G}}\circ\tilde{\mathfrak{G}} \in \mathbb{R}$

## Die Bewegungen des Punktraumes

Wir legen jeden Punkt des Raumes durch die Menge der durch ihn hindurchgehenden Geraden fest. Dann erfüllt jede Gerade die *Inzidenzbedingung*

$$\mathbf{g}^* = \mathbf{x}\times\mathbf{g}$$

Stellen wir den Punkt $\mathbf{x}$ durch die *Punktquaternion*

$\underline{\mathbf{X}} = 1+\varepsilon\,\mathbf{x}$ und die Gerade durch $\underline{\mathbf{g}} = \mathbf{g}+\varepsilon\,\mathbf{g}^*$ dar, so gilt:
so ergibt sich

$$\boxed{\underline{\mathbf{X}}\circ\underline{\mathbf{g}}_{\varepsilon} - \underline{\mathbf{g}}\circ\underline{\mathbf{X}} = \underline{\mathbf{O}} \qquad \textit{Inzidenzbedingung Punkt-Gerade}}$$

Es ist nämlich

$$\underline{\mathbf{X}}\circ\underline{\mathbf{g}}_{\varepsilon} - \underline{\mathbf{g}}\circ\underline{\mathbf{X}} = (1+\varepsilon\mathbf{x})\circ(\mathbf{g}-\varepsilon\mathbf{g}^*)-(\mathbf{g}+\varepsilon\mathbf{g}^*)\circ(1+\varepsilon\mathbf{x}) =$$

$$= \mathbf{g}+\varepsilon(\mathbf{x}\circ\mathbf{g}-\mathbf{g}^*)-\mathbf{g}-\varepsilon(\mathbf{g}^*+\mathbf{g}\circ\mathbf{x}) = \varepsilon[-\mathbf{x}\mathbf{g}+\mathbf{x}\times\mathbf{g}-\mathbf{g}^*-\mathbf{g}^*+\mathbf{g}\mathbf{x}-\mathbf{g}\times\mathbf{x}] =$$

$$= \varepsilon[2\mathbf{x}\times\mathbf{g}-2\mathbf{g}^*] = \underline{\mathbf{O}} \Rightarrow \mathbf{g}^* = \mathbf{x}\times\mathbf{g}$$

Wegen der *Inzidenztreue* der Bewegung gilt

$$\underline{\mathbf{g}}^\circ \mapsto \bar{\underline{\mathbf{g}}}^\circ$$

$$\underline{\mathbf{X}} \mapsto \bar{\underline{\mathbf{X}}}$$

$$\underline{\mathbf{X}}\circ\underline{\mathbf{g}}_{\varepsilon} - \underline{\mathbf{g}}\circ\underline{\mathbf{X}} = \underline{\mathbf{O}} \mapsto \bar{\underline{\mathbf{X}}}\circ\bar{\underline{\mathbf{g}}}_{\varepsilon} - \bar{\underline{\mathbf{g}}}\circ\bar{\underline{\mathbf{X}}} = \underline{\mathbf{O}} \qquad (*)$$

Nun ist

$$\underline{\tilde{\mathbf{D}}}\circ|\;\bar{\underline{\mathbf{g}}}^\circ = \underline{\mathbf{D}}\circ\underline{\mathbf{g}}^\circ\circ\underline{\tilde{\mathbf{D}}}\;|\circ\underline{\mathbf{D}}$$

$$\underline{\tilde{\mathbf{D}}}\circ\bar{\underline{\mathbf{g}}}^\circ\circ\underline{\mathbf{D}} = \underline{\mathbf{g}}^\circ$$

Führt man dies in die Inzidenzbedingung ein so findet man

$$\underline{\mathbf{D}}\circ|\;\underline{\mathbf{X}}\circ\underline{\tilde{\mathbf{D}}}_{\varepsilon}\circ\bar{\underline{\mathbf{g}}}^\circ_{\varepsilon}\circ\underline{\mathbf{D}}_{\varepsilon} - \underline{\tilde{\mathbf{D}}}\circ\bar{\underline{\mathbf{g}}}^\circ\circ\underline{\mathbf{D}}\circ\underline{\mathbf{X}} = \underline{\mathbf{O}}\;|\circ\underline{\tilde{\mathbf{D}}}_{\varepsilon}$$

$$\underline{\mathbf{D}}\circ\underline{\mathbf{X}}\circ\underline{\tilde{\mathbf{D}}}_{\varepsilon}\circ\bar{\underline{\mathbf{g}}}^\circ_{\varepsilon} - \bar{\underline{\mathbf{g}}}^\circ\circ\underline{\mathbf{D}}\circ\underline{\mathbf{X}}\circ\underline{\tilde{\mathbf{D}}}_{\varepsilon} = \underline{\mathbf{O}}$$

Vergleich mit (*) ergibt

$$\boxed{\bar{\underline{\mathbf{X}}} = \underline{\mathbf{D}}\circ\underline{\mathbf{X}}\circ\underline{\tilde{\mathbf{D}}}_{\varepsilon} \qquad \textit{Bewegung des Punktraumes}}$$

## Bewegung des Ebenenraumes

Der *Inzidenzbedingung Gerade-Ebene* $\mathbf{g}^*\times\mathbf{n} = d\mathbf{g}$ $(\mathbf{n}\mathbf{g} = 0)$ entspricht nach Einführung der *Ebenenquaternion* $\underline{\mathbf{N}} = \mathbf{n}+\varepsilon d$ die duale Beziehung

$$\boxed{\underline{\mathbf{N}}\circ\underline{\mathbf{g}}+\underline{\mathbf{g}}_{\varepsilon}\circ\underline{\mathbf{N}} = \underline{\mathbf{O}} \qquad \textit{Inzidenzbedingung Gerade-Ebene}}$$

Es gilt nämlich

$$\underline{\mathbf{N}}\circ\underline{\mathbf{g}}+\underline{\mathbf{g}}_{\varepsilon}\circ\underline{\mathbf{N}} = (\mathbf{n}+\varepsilon d)\circ(\mathbf{g}+\varepsilon\mathbf{g}^*)+(\mathbf{g}-\varepsilon\mathbf{g}^*)\circ(\mathbf{n}+\varepsilon d) =$$

$$= -(\mathbf{n}\mathbf{g})+\mathbf{n}\times\mathbf{g}+\varepsilon[d\mathbf{g}-\mathbf{n}\mathbf{g}^*+\mathbf{n}\times\mathbf{g}^*]-(\mathbf{n}\mathbf{g})+\mathbf{g}\times\mathbf{n}+\varepsilon[d\mathbf{g}+\mathbf{n}\mathbf{g}^*-\mathbf{g}^*\times\mathbf{n}] =$$

$$= -2(\mathbf{n}\mathbf{g})+\varepsilon[2d\mathbf{g}-2\mathbf{g}^*\times\mathbf{n}] = \underline{\mathbf{O}} \quad \text{daraus} \quad \mathbf{g}^*\times\mathbf{n} = d\mathbf{g}, \quad \mathbf{n}\mathbf{g} = 0$$

Aus der *Inzidenztreue* der Bewegung folgt

$$\underline{\mathbf{g}}^\circ \mapsto \bar{\underline{\mathbf{g}}}^\circ$$

$$\underline{\mathbf{N}} \mapsto \bar{\underline{\mathbf{N}}}$$

$$\underline{\mathbf{N}}\circ\underline{\mathbf{g}}^\circ+\underline{\mathbf{g}}^\circ_{\varepsilon}\circ\underline{\mathbf{N}} = \underline{\mathbf{O}} \mapsto \bar{\underline{\mathbf{N}}}\circ\bar{\underline{\mathbf{g}}}^\circ+\bar{\underline{\mathbf{g}}}^\circ_{\varepsilon}\circ\bar{\underline{\mathbf{N}}} = \underline{\mathbf{O}} \qquad (**)$$

Einsetzen in die Inzidenzbedingung liefert

$\underline{\mathbf{D}}_\varepsilon \circ |\ \underline{\mathbf{N}} \circ \underline{\widetilde{\mathbf{D}}} \circ \overline{\underline{\mathbf{g}}}^\circ \circ \underline{\mathbf{D}} + \underline{\widetilde{\mathbf{D}}}_\varepsilon \circ \overline{\underline{\mathbf{g}}}^\circ_\varepsilon \circ \underline{\mathbf{D}}_\varepsilon \circ \underline{\mathbf{N}} = \underline{\mathbf{O}}\ | \circ \underline{\widetilde{\mathbf{D}}}$

$\underline{\mathbf{D}}_\varepsilon \circ \underline{\mathbf{N}} \circ \underline{\widetilde{\mathbf{D}}} \circ \overline{\underline{\mathbf{g}}}^\circ + \overline{\underline{\mathbf{g}}}^\circ_\varepsilon \circ \underline{\mathbf{D}}_\varepsilon \circ \underline{\mathbf{N}} \circ \underline{\widetilde{\mathbf{D}}} = \underline{\mathbf{O}}$

Vergleich mit (**) ergibt

$$\boxed{\overline{\underline{\mathbf{N}}} = \underline{\mathbf{D}}_\varepsilon \circ \underline{\mathbf{N}} \circ \underline{\widetilde{\mathbf{D}}} \qquad \textit{Bewegung des Ebenenraumes}}$$

Zur Herleitung dieser Beziehung hätte man natürlich auch die Inzidenzbedingung Punkt-Ebene heranziehen können. Für diese Inzidenzbedingung gilt in dualer Schreibweise

$$\boxed{\underline{\mathbf{N}} \circ \underline{\mathbf{X}} - \underline{\mathbf{X}}_\varepsilon \circ \underline{\mathbf{N}}_\varepsilon = \underline{\mathbf{O}} \qquad \textit{Inzidenzbedingung Punkt-Ebene}}$$

Beweis: $\underline{\mathbf{N}} \circ \underline{\mathbf{X}} - \underline{\mathbf{X}}_\varepsilon \circ \underline{\mathbf{N}}_\varepsilon = (\mathbf{n} + \varepsilon \mathrm{d}) \circ (1 + \varepsilon \mathbf{x}) - (1 - \varepsilon \mathbf{x}) \circ (\mathbf{n} - \varepsilon \mathrm{d}) =$

$= \mathbf{n} + \varepsilon(\mathrm{d} - \mathbf{nx} + \mathbf{n} \times \mathbf{x}) - \mathbf{n} - \varepsilon(\mathbf{nx} - \mathbf{x} \times \mathbf{n} - \mathrm{d}) = \varepsilon(2\mathrm{d} - 2\mathbf{nx}) = \underline{\mathbf{O}} \Rightarrow \mathbf{nx} = \mathrm{d}$

Wegen der Inzidenztreue der Bewegungen gilt wieder

$$\underline{\mathbf{X}} \mapsto \overline{\underline{\mathbf{X}}}$$

$$\underline{\mathbf{N}} \mapsto \overline{\underline{\mathbf{N}}}$$

$\underline{\mathbf{N}} \circ \underline{\mathbf{X}} - \underline{\mathbf{X}}_\varepsilon \circ \underline{\mathbf{N}}_\varepsilon = \underline{\mathbf{O}} \mapsto \overline{\underline{\mathbf{N}}} \circ \overline{\underline{\mathbf{X}}} - \overline{\underline{\mathbf{X}}}_\varepsilon \circ \overline{\underline{\mathbf{N}}}_\varepsilon = \underline{\mathbf{O}} \qquad (\otimes)$

Aus der Bewegungsgelcihung für den Punktraum folgt

$\underline{\widetilde{\mathbf{D}}} \circ |\ \overline{\underline{\mathbf{X}}} = \underline{\mathbf{D}} \circ \underline{\mathbf{X}} \circ \underline{\widetilde{\mathbf{D}}}_\varepsilon\ | \circ \underline{\mathbf{D}}_\varepsilon \Rightarrow \underline{\widetilde{\mathbf{D}}} \circ \overline{\underline{\mathbf{X}}} \circ \underline{\mathbf{D}}_\varepsilon = \underline{\mathbf{X}}$

Daraus

$\underline{\mathbf{D}}_\varepsilon \circ |\underline{\mathbf{N}} \circ \underline{\widetilde{\mathbf{D}}} \circ \overline{\underline{\mathbf{X}}} \circ \underline{\mathbf{D}}_\varepsilon - \underline{\widetilde{\mathbf{D}}}_\varepsilon \circ \overline{\underline{\mathbf{X}}}_\varepsilon \circ \underline{\mathbf{D}} \circ \underline{\mathbf{N}}_\varepsilon = \underline{\mathbf{O}}| \circ \underline{\widetilde{\mathbf{D}}}_\varepsilon$

$\underline{\mathbf{D}}_\varepsilon \circ| \underline{\mathbf{N}} \circ \underline{\widetilde{\mathbf{D}}} \circ \overline{\underline{\mathbf{X}}} - \overline{\underline{\mathbf{X}}}_\varepsilon \circ \underline{\mathbf{D}} \circ \underline{\mathbf{N}}_\varepsilon \circ \underline{\widetilde{\mathbf{D}}}_\varepsilon = \underline{\mathbf{O}}$

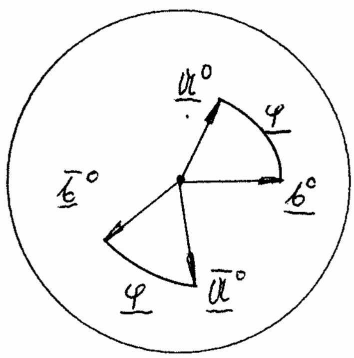
Vergleich mit $\otimes$ ergibt wie oben:

$\overline{\underline{\mathbf{N}}} = \underline{\mathbf{D}}_\varepsilon \circ \underline{\mathbf{N}} \circ \underline{\widetilde{\mathbf{D}}}$

**Übertragungsprinzip von STUDY und Bewegungen des Speerraumes**

zwei Speere $\underline{\mathbf{a}}^\circ, \underline{\mathbf{b}}^\circ$ schließen den dualen Winkel $\underline{\varphi} = \varphi + \varepsilon\hat{\varphi}$ ein.

Eine Bewegung des Speerraumes führt die Speere in zwei neue $\overline{\underline{\mathbf{a}}}^\circ, \overline{\underline{\mathbf{b}}}^\circ$ über, welche denselben dualen Winkel bestimmen. Den Bewegungen des Speerraumes entsprechen daher die "Kongruenztransformationen" der dualen Kugel in sich.



## Zusammenfassung

### Allgemeine Bewegung (Schraubung)

Sei $\underline{\mathbf{e}} = \mathbf{e} + \varepsilon\, \mathbf{e}^*$ der die Schraubachse, die Schiebrichtung und den Drehsinn festlegende Speer, s die Schiebstrecke und δ der Drehwinkel. Dann ist mit $\underline{\delta} = \delta + \varepsilon s$

$$\underline{\mathbf{D}} = \cos\frac{1}{2}\underline{\delta} + \underline{\mathbf{e}}\sin\frac{1}{2}\underline{\delta} = \cos\left(\frac{1}{2}\delta + \varepsilon\frac{s}{2}\right) + \left(\mathbf{e} + \varepsilon\mathbf{e}^*\right)\sin\left(\frac{1}{2}\delta + \varepsilon\frac{s}{2}\right) =$$

$$\left(\cos\frac{1}{2}\delta - \varepsilon\frac{s}{2}\sin\frac{1}{2}\delta\right) + \left(\mathbf{e} + \varepsilon\mathbf{e}^*\right)\left(\sin\frac{1}{2}\delta + \varepsilon\frac{s}{2}\cos\frac{1}{2}\delta\right) =$$

$$= \left[\cos\frac{1}{2}\delta + \mathbf{e}\sin\frac{1}{2}\delta\right] + \varepsilon\left[-\frac{s}{2}\sin\frac{1}{2}\delta + \frac{s}{2}\mathbf{e}\cos\frac{1}{2}\delta + \mathbf{e}^*\sin\frac{1}{2}\delta\right] = \mathbf{D} + \varepsilon\hat{\mathbf{D}}$$

mit

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{D} &= \cos\frac{1}{2}\delta + \mathbf{e}\sin\frac{1}{2}\delta \\ \hat{\mathbf{D}} &= -\frac{s}{2}\sin\frac{1}{2}\delta + \frac{s}{2}\mathbf{e}\cos\frac{1}{2}\delta + \mathbf{e}^*\sin\frac{1}{2}\delta \end{aligned} \qquad (1)}$$

Da $\underline{\mathbf{D}}$ eine duale Einheitsquaternion ist, folgt

$$\underline{\mathbf{D}} \circ \underline{\tilde{\mathbf{D}}} = \left(\mathbf{D} + \varepsilon\hat{\mathbf{D}}\right) \circ \left(\tilde{\mathbf{D}} + \varepsilon\tilde{\hat{\mathbf{D}}}\right) = \mathbf{D} \circ \tilde{\mathbf{D}} + \varepsilon\left(\mathbf{D} \circ \tilde{\hat{\mathbf{D}}} + \hat{\mathbf{D}} \circ \tilde{\mathbf{D}}\right) = 1$$

also

$$\boxed{\begin{aligned} &\mathbf{D} \circ \tilde{\mathbf{D}} = 1 \\ &\mathbf{D} \circ \tilde{\hat{\mathbf{D}}} + \hat{\mathbf{D}} \circ \tilde{\mathbf{D}} = \mathbf{O} \qquad \textit{gebundene Quaternion} \end{aligned} \qquad (2)}$$

Zwei reelle Quaternionen, welche die Bedingung $\mathbf{D} \circ \tilde{\hat{\mathbf{D}}} + \hat{\mathbf{D}} \circ \tilde{\mathbf{D}} = \mathbf{O}$ erfüllen, nennt man *gebundene Quaternionen*. Ein geordnetes Paar von gebundenen Quaternionen, von denen die erste eine Einheitsquaternion ist, legen eine Bewegung des Raumes fest.
Für die Bewegung eines Punktes gilt

$$\underline{\bar{\mathbf{X}}} = \underline{\mathbf{D}} \circ \underline{\mathbf{X}} \circ \underline{\tilde{\mathbf{D}}}_\varepsilon$$

Daraus

$$\underline{\bar{\mathbf{X}}} = \underline{\mathbf{D}} \circ \underline{\mathbf{X}} \circ \underline{\tilde{\mathbf{D}}}_\varepsilon \Rightarrow 1 + \varepsilon\bar{\mathbf{x}} = \left(\mathbf{D} + \varepsilon\hat{\mathbf{D}}\right) \circ \left(1 + \varepsilon\mathbf{x}\right) \circ \left(\tilde{\mathbf{D}} \quad -\varepsilon\tilde{\hat{\mathbf{D}}}\right) = \left[\mathbf{D} + \varepsilon\left(\mathbf{D} \circ \mathbf{x} + \hat{\mathbf{D}}\right)\right] \circ \left(\tilde{\mathbf{D}} - \varepsilon\tilde{\hat{\mathbf{D}}}\right) =$$

$$= \mathbf{D} \circ \tilde{\mathbf{D}} + \varepsilon\left[\mathbf{D} \circ \mathbf{x} \circ \tilde{\mathbf{D}} + \hat{\mathbf{D}} \circ \tilde{\mathbf{D}} - \mathbf{D} \circ \tilde{\hat{\mathbf{D}}}\right]$$

Daher

$$\boxed{\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{D} \circ \mathbf{x} \circ \tilde{\mathbf{D}} + \left(\hat{\mathbf{D}} \circ \tilde{\mathbf{D}} - \mathbf{D} \circ \tilde{\hat{\mathbf{D}}}\right)}$$

Der erste Summand stellt eine *Drehung* um den Ursprung dar, der zweite ist ein *reiner Vektor*, denn es gilt

# Zusammenfassung

$$\left(\hat{\mathbf{D}}\circ\tilde{\mathbf{D}}-\mathbf{D}\circ\tilde{\hat{\mathbf{D}}}\right)+\left(\hat{\mathbf{D}}\circ\tilde{\mathbf{D}}-\mathbf{D}\circ\tilde{\hat{\mathbf{D}}}\right)^{\sim}=\hat{\mathbf{D}}\circ\tilde{\mathbf{D}}-\mathbf{D}\circ\tilde{\hat{\mathbf{D}}}+\mathbf{D}\circ\tilde{\hat{\mathbf{D}}}-\hat{\mathbf{D}}\circ\tilde{\mathbf{D}}=\mathbf{O}$$

Wir können also setzen

$$\boxed{\mathbf{v}:=\hat{\mathbf{D}}\circ\tilde{\mathbf{D}}-\mathbf{D}\circ\tilde{\hat{\mathbf{D}}} \qquad (3)}$$

Dann gilt

$$\boxed{\begin{array}{lll}\mathbf{x}_1:=\mathbf{D}\circ\mathbf{x}\circ\tilde{\mathbf{D}} & \textit{Drehung um } O & \\ \bar{\mathbf{x}}=\mathbf{x}_1+\mathbf{v} & \textit{Schiebung um } \mathbf{v} & (4)\end{array}}$$

| |
|---|
| Jede Bewegung läßt sich in eine Drehung um O und eine anschließende Parallelverschiebung zerlegen. Die Drehachse ist parallel zur Schraubachse |

Es gilt

$$\left.\begin{array}{l}\mathbf{D}\circ\tilde{\hat{\mathbf{D}}}+\hat{\mathbf{D}}\circ\tilde{\mathbf{D}}=\mathbf{O}\\ \hat{\mathbf{D}}\circ\tilde{\mathbf{D}}-\mathbf{D}\circ\tilde{\hat{\mathbf{D}}}=\mathbf{v}\end{array}\right\}+$$

Addition ergibt

$$\boxed{2\hat{\mathbf{D}}\circ\tilde{\mathbf{D}}=\mathbf{v} \qquad (5)}$$

Das Quaternionenprodukt von rechts mit $\mathbf{D}$ ergibt

$2\hat{\mathbf{D}}\circ\left(\tilde{\mathbf{D}}\circ\mathbf{D}\right)=\mathbf{v}\circ\mathbf{D}\Rightarrow 2\hat{\mathbf{D}}=\mathbf{v}\circ\mathbf{D}$

Also

$$\boxed{\hat{\mathbf{D}}=\frac{1}{2}\mathbf{v}\circ\mathbf{D} \qquad (6)}$$

Durch die Drehung $\mathbf{D}$ und den Schiebvektor $\mathbf{v}$ ist $\hat{\mathbf{D}}$ eindeutig bestimmt

**Bestimmung der Schraubung bei gegebener Drehung um O und gegebenem Schiebvektor v**

Da $\mathbf{D}$ gegeben ist, sind $\mathbf{e}$ und $\delta$ bekannt. Gesucht sind $\mathbf{e}^*$ und s. Es gilt

$$\mathbf{e}\circ|\ \hat{\mathbf{D}}=-\frac{s}{2}\sin\frac{\delta}{2}+\frac{s}{2}\mathbf{e}\cos\frac{\delta}{2}+\mathbf{e}^*\sin\frac{\delta}{2}=\frac{1}{2}\mathbf{v}\circ\mathbf{D}\ |\circ\mathbf{e}$$

$$\left.\left.\begin{array}{l}\mathbf{e}\circ\hat{\mathbf{D}}=-\frac{s}{2}\mathbf{e}\sin\frac{\delta}{2}-\frac{s}{2}\cos\frac{\delta}{2}+\mathbf{e}\times\mathbf{e}^*\sin\frac{\delta}{2}=\frac{1}{2}\mathbf{e}\circ\mathbf{v}\circ\mathbf{D}\\ \hat{\mathbf{D}}\circ\mathbf{e}=-\frac{s}{2}\mathbf{e}\sin\frac{\delta}{2}-\frac{s}{2}\cos\frac{\delta}{2}+\mathbf{e}^*\times\mathbf{e}\sin\frac{\delta}{2}=\frac{1}{2}\mathbf{v}\circ\mathbf{D}\circ\mathbf{e}\end{array}\right\}+\right\}- \qquad (\oplus)$$

$$-s\mathbf{e}\sin\frac{\delta}{2}-s\cos\frac{\delta}{2}=\frac{1}{2}[\mathbf{e}\circ\mathbf{v}\circ\mathbf{D}+\mathbf{v}\circ\mathbf{D}\circ\mathbf{e}]$$

Da $\mathbf{D}$ und $\mathbf{e}$ koaxial, daher vertauschbar sind, gilt

$\mathbf{e}\circ\mathbf{v}\circ\mathbf{D}+\mathbf{v}\circ\mathbf{D}\circ\mathbf{e}=\mathbf{e}\circ\mathbf{v}\circ\mathbf{D}+\mathbf{v}\circ\mathbf{e}\circ\mathbf{D}=[\mathbf{e}\circ\mathbf{v}+\mathbf{v}\circ\mathbf{e}]\circ\mathbf{D}$

Wegen

$$\mathbf{e}\circ\mathbf{v}+\mathbf{v}\circ\mathbf{e}=-2\mathbf{e}\mathbf{v}$$

folgt

$$-s\left[\cos\frac{\delta}{2}+\mathbf{e}\sin\frac{\delta}{2}\right]=-s\mathbf{D}=-(\mathbf{ev})\mathbf{D}$$

also

$$\boxed{s=\mathbf{ev} \qquad (7)}$$

Subtrahieren wir hingegen die beiden Zeilen von ⊕, so ergibt sich

$$2\mathbf{e}\times\mathbf{e}^*\sin\frac{\delta}{2}=\frac{1}{2}[\mathbf{e}\circ\mathbf{v}\circ\mathbf{D}-\mathbf{v}\circ\mathbf{D}\circ\mathbf{e}]=\frac{1}{2}[\mathbf{e}\circ\mathbf{v}-\mathbf{v}\circ\mathbf{e}]\circ\mathbf{D}$$

Aus $\mathbf{e}\circ\mathbf{v}-\mathbf{v}\circ\mathbf{e}=2\mathbf{e}\times\mathbf{v}$ folgt

$$\mathbf{e}\circ|2(\mathbf{e}\times\mathbf{e}^*)\sin\frac{\delta}{2}=(\mathbf{e}\times\mathbf{v})\circ\mathbf{D}|\circ\mathbf{e}$$

$$\left.\begin{aligned}&2(\mathbf{e}\times\mathbf{e}^*)\circ\mathbf{e}\sin\frac{\delta}{2}=(\mathbf{e}\times\mathbf{v})\circ\mathbf{D}\circ\mathbf{e}=(\mathbf{e}\times\mathbf{v})\circ\mathbf{e}\circ\mathbf{D}\\&2\,\mathbf{e}\circ(\mathbf{e}\times\mathbf{e}^*)\sin\frac{\delta}{2}=\mathbf{e}\circ(\mathbf{e}\times\mathbf{v})\circ\mathbf{D}\end{aligned}\right\}-$$

$$2[(\mathbf{e}\times\mathbf{e}^*)\circ\mathbf{e}-\mathbf{e}\circ(\mathbf{e}\times\mathbf{e}^*)]\sin\frac{\delta}{2}=[(\mathbf{e}\times\mathbf{v})\circ\mathbf{e}-\mathbf{e}\circ(\mathbf{e}\times\mathbf{v})]\circ\mathbf{D}$$

$$4(\mathbf{e}\times\mathbf{e}^*)\times\mathbf{e}\sin\frac{\delta}{2}=2[(\mathbf{e}\times\mathbf{v})\times\mathbf{e}]\circ\mathbf{D}$$

$$2\left[\mathbf{e}^*\underbrace{|\mathbf{e}|^2}_{1}-\mathbf{e}\underbrace{(\mathbf{ee}^*)}_{0}\right]\sin\frac{\delta}{2}=[(\mathbf{e}\times\mathbf{v})\times\mathbf{e}]\circ\mathbf{D}$$

Also

$$\boxed{\mathbf{e}^*=\frac{[(\mathbf{e}\times\mathbf{v})\times\mathbf{e}]\circ\mathbf{D}}{2\sin\frac{\delta}{2}} \qquad (8)}$$

## Drehung um eine Achse

### Allgemeine Lage der Drehachse

Die Drehachse sei durch e, e* ≠ o gegeben. Dann ergibt sich aus (1)

$$\boxed{\begin{aligned}&\mathbf{D}=\cos\frac{\delta}{2}+\mathbf{e}\sin\frac{\delta}{2}\\&\hat{\mathbf{D}}=\mathbf{e}^*\sin\frac{\delta}{2}\end{aligned} \qquad (9)}$$

Auch hier gilt wegen (5)

$$\bar{\mathbf{x}}=\mathbf{D}\circ\mathbf{x}\circ\tilde{\mathbf{D}}+\mathbf{v}$$

$$\mathbf{v}=2\hat{\mathbf{D}}\circ\tilde{\mathbf{D}}=2\left(\mathbf{e}^*\sin\frac{\delta}{2}\right)\circ\left(\cos\frac{\delta}{2}-\mathbf{e}\sin\frac{\delta}{2}\right)=2\left[\mathbf{e}^*\sin\frac{\delta}{2}\cos\frac{\delta}{2}-\mathbf{e}^*\times\mathbf{e}\sin^2\frac{\delta}{2}\right]$$

Also

$$\boxed{\mathbf{v} = \mathbf{e}^* \sin\delta + (\mathbf{e} \times \mathbf{e}^*)(1 - \cos\delta) \qquad (10)}$$

Man entnimmt unmittelbar $\mathbf{ev} = 0 \Rightarrow \mathbf{v} \perp \mathbf{e}$, wie auch aus (7) folgt.

Jede Drehung um eine Achse allgemeiner Lage läßt sich in eine Drehung um den Ursprung und eine anschließende Schiebung normal zur Drehachse zerlegen.
Umgekehrt ergibt eine Drehung um O mit anschließender Schiebung normal zur Drehachse eine Drehung um eine Achse allgemeiner Lage.
Die Drehachse durch O ist parallel zur Drehachse allgemeiner Lage

**Drehachse durch O**

In diesem Falle ist $\mathbf{e}^* = 0$ und es gilt

$\hat{\mathbf{D}} = \mathbf{O}$ wegen (1) $\Rightarrow$ $\mathbf{v} = \mathbf{o}$ wegen (5)

Es reproduziert siuc also die Drehformel

$$\boxed{\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{D} \circ \mathbf{x} \circ \tilde{\mathbf{D}}}$$

## Schiebung

Aus (1) folgt

$\mathbf{D} = \mathbf{1}$

$\hat{\mathbf{D}} = \frac{s}{2}\mathbf{e} \Rightarrow$ (5) $\mathbf{v} = 2\hat{\mathbf{D}} \circ \tilde{\mathbf{D}} = s\mathbf{e}$

also

$$\boxed{\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{x} + \mathbf{v}}$$

# Stichwortverzeichnis

# Stichwortverzeichnis

# Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis

# Grundformeln der Quaternionenrechnung

**Quaternionen**

a,b,c, ..., $\lambda,\mu,\nu$, ... ***Skalare***, $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$, ... ***Vektoren***,
$\mathbf{A} = (a,\mathbf{a})$, $\mathbf{B} = (b,\mathbf{b})$, $\mathbf{C} = (c,\mathbf{c})$, ..., ***Quaternionen***
a heißt ***Skalarteil*** der Quaternion $\mathbf{A}$

$\mathbf{a}$ heißt ***Vektorteil*** oder ***Achse*** der Quaternion $\mathbf{A}$

Spezielle Quaternionen sind

$(a,\mathbf{o})$ ***skalare Quaternion***

$(0,\mathbf{a})$ ***vektorielle Quaternion***

$(0,\mathbf{o}) =: \mathbf{O}$ ***Nullquaternion***

$(-a,-\mathbf{a}) =: -\mathbf{A}$ die zu $\mathbf{A}$ ***entgegengesetzte Quaternion***

# Das Rechnen mit Quaternionen

**Gleichheit zweier Quaternionen**

$\mathbf{A} = (a,\mathbf{a}), \quad \mathbf{B} = (b,\mathbf{b})$

$\mathbf{A} = \mathbf{B} \Leftrightarrow a = b \wedge \mathbf{a} = \mathbf{b}$

**Summe zweier Quaternionen**

$\mathbf{A} + \mathbf{B} = (a,\mathbf{a}) + (b,\mathbf{b}) := (a+b,\mathbf{a}+\mathbf{b}) = (c,\mathbf{c}) = \mathbf{C}$

$\mathbf{A} + (-\mathbf{B}) = (a,\mathbf{a}) + (-b,-\mathbf{b}) = (a+(-b),\mathbf{a}+(-\mathbf{b})) := (a-b,\mathbf{a}-\mathbf{b}) =: \mathbf{A} - \mathbf{B}$

Speziell:

$\mathbf{A} - \mathbf{A} = (a,\mathbf{a}) + (-a,-\mathbf{a}) = (0,\mathbf{o}) = \mathbf{O}$

**Skalares Vielfaches einer Quaternion**

$\mathbf{A} = \lambda(a,\mathbf{a}) := (\lambda a,\lambda\mathbf{a})$

Speziell

$\lambda = -1 \ldots (-1)(a,\mathbf{a}) := -(a,\mathbf{a}) = (-a,-\mathbf{a}) \Rightarrow (-1)\mathbf{A} = -\mathbf{A}$

**Konjugierte einer Quaternion**

$\mathbf{A} = (a,\mathbf{a}), \quad \tilde{\mathbf{A}} := (a,-\mathbf{a})$

**Rechnen mit speziellen Quaternionen**

$\mathbf{A} = (a,\mathbf{a}) = (a,\mathbf{o}) + (0,\mathbf{a})$

Jede Quaternion ist Summe einer skalaren und einer vektoriellen Quaternion
Wir identifizieren: $(a,\mathbf{o}) \equiv a$ und $(0,\mathbf{a}) = \mathbf{a}$

$$\boxed{\mathbf{A} = (a,\mathbf{a}) = (a,\mathbf{o}) + (0,\mathbf{a}) = a + \mathbf{a}}$$

Es gilt demnach
$\mathbf{A} = a + \mathbf{a}, \quad \mathbf{B} = b + \mathbf{b}$

$\mathbf{A} + \mathbf{B} = (a+\mathbf{a}) + (b+\mathbf{b}) = (a+b) + (\mathbf{a}+\mathbf{b})$

$\lambda\mathbf{A} = \lambda(a+\mathbf{a}) = \lambda a + \lambda\mathbf{a}$

$$\mathbf{A} = a + \mathbf{a}$$

$$\underline{\widetilde{\mathbf{A}} = a - \mathbf{a}}$$

folgt sofort

$$\mathbf{A} + \widetilde{\mathbf{A}} = 2a$$

$$\mathbf{A} - \widetilde{\mathbf{A}} = 2\mathbf{a}$$

Für spezielle Quaternionen gilt

$$\mathbf{A} = \mathbf{a}, \quad \widetilde{\mathbf{A}} = \widetilde{\mathbf{a}} = -\mathbf{a}, \quad \mathbf{A} + \widetilde{\mathbf{A}} = \mathbf{O}$$

$$\mathbf{A} = a, \quad \widetilde{\mathbf{A}} = \widetilde{a} = \ a, \quad \mathbf{A} - \widetilde{\mathbf{A}} = \mathbf{O}$$

Daher gilt

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathbf{A} + \widetilde{\mathbf{A}} = \mathbf{O} \Leftrightarrow \mathbf{A} \text{ ist vektorielle Quaternion} \\ \mathbf{A} - \widetilde{\mathbf{A}} = \mathbf{O} \Leftrightarrow \mathbf{A} \text{ ist skalare Quaternion} \end{array}}$$

Setzt man

$$\mathbf{e}_0 := 1, \quad a_0 := a, \quad \mathbf{a} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3$$

so folgt

$$\mathbf{A} = a + \mathbf{a} = a_0\mathbf{e}_0 + a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3$$

Die Menge der Quaternionen mit der Addition als innerer Verknüpfung und der Skalarmultiplikation als äußerer Verknüpfung bildet einen *vierdimensionalen Vektorraum* über $\Re$

**Produkt zweier Quaternionen**

$$\mathbf{A} \circ \mathbf{B} = (a + \mathbf{a}) \circ (b + \mathbf{b})$$

Für das Quaternionenprodukt fordern wir *Distributivität*, aber *keine Kommutativität*:

$$\mathbf{A} \circ \mathbf{B} = (a + \mathbf{a}) \circ (b + \mathbf{b}) := a \circ b + \mathbf{a} \circ b + a \circ \mathbf{b} + \mathbf{a} \circ \mathbf{b}$$

Es gelten folgende Definitionen

$$\boxed{\begin{array}{l} a \circ b := ab = ba = b \circ a \\ \mathbf{a} \circ b = \mathbf{a}b = b\mathbf{a} = b \circ \mathbf{a} \\ \mathbf{a} \circ \mathbf{b} = -\mathbf{ab} + \mathbf{a} \times \mathbf{b} \end{array}}$$

Das Quaternionenprodukt zweier vektorieller Quaternionen ist eine volle Quaternion mit Skalar- und Vektorteil[1].

Man kann umgekehrt das Skalar- und Vektorprodukt zweier Vektoren durch deren Quaternionenprodukt ausdrücken:

$$\mathbf{a} \circ \mathbf{b} = -\mathbf{ab} + \mathbf{a} \times \mathbf{b}$$

$$\mathbf{b} \circ \mathbf{a} = -\mathbf{ba} + \mathbf{b} \times \mathbf{a} = -\mathbf{ab} - \mathbf{a} \times \mathbf{b}$$

Daher

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathbf{ab} = -\dfrac{1}{2}(\mathbf{a} \circ \mathbf{b} + \mathbf{b} \circ \mathbf{a}) \\ \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \dfrac{1}{2}(\mathbf{a} \circ \mathbf{b} - \mathbf{b} \circ \mathbf{a}) \end{array}}$$

Das Quaternionenprodukt allgemeiner Quaternionen lautet nunmehr

$$\boxed{\mathbf{A} \circ \mathbf{B} = (a + \mathbf{a}) \circ (b + \mathbf{b}) = (ab - \mathbf{ab}) + (a\mathbf{b} + b\mathbf{a} + \mathbf{a} \times \mathbf{b})}$$

---

[1] Das negative Vorzeichen des Skalarproduktes bei der Definition des Quaternionenproduktes zweier vektorieller Quaternionen ist erforderlich, da ansonsten dieses Produkt nicht assoziativ wäre.

Das Quaternionenprodukt ist *nicht kommutativ*. Es ist aber *distributiv*:

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})\circ\mathbf{C}=\mathbf{A}\circ\mathbf{B}+\mathbf{B}\circ\mathbf{C},\quad \mathbf{C}\circ(\mathbf{A}+\mathbf{B})=\mathbf{C}\circ\mathbf{A}+\mathbf{C}\circ\mathbf{B}$$

$$\boxed{(\mathbf{A}\circ\mathbf{B})\circ\mathbf{C}=\mathbf{A}\circ(\mathbf{B}\circ\mathbf{C})}$$

Speziell gilt

$$\boxed{(\mathbf{a}\circ\mathbf{b})\circ\mathbf{c}=\mathbf{a}\circ(\mathbf{b}\circ\mathbf{c})=-(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})-(\mathbf{bc})\mathbf{a}+(\mathbf{ca})\mathbf{b}-(\mathbf{ab})\mathbf{c}}$$

**Koaxiale Quaternionen**

Zwei Quaternionen heißen *koaxial*, wenn ihre Vektorteile linear abhängig sind

$$\boxed{\mathbf{A}\circ\mathbf{B}=\mathbf{B}\circ\mathbf{A}\Leftrightarrow\mathbf{A},\mathbf{B}\;\textit{koaxial}}$$

**Norm einer Quaternion**

Unter der Norm einer Quaternion $\mathbf{A}=\mathrm{a}+\mathbf{a}$ versteht man die reelle, nichtnegative Zahl

$$\boxed{\begin{array}{c}\mathrm{A}^2:=\mathbf{A}\circ\widetilde{\mathbf{A}}=\widetilde{\mathbf{A}}\circ\mathbf{A}=\mathrm{a}^2+|\mathbf{a}|^2\geq 0\\ \mathrm{A}^2=0\Leftrightarrow\mathbf{A}=\mathbf{O}\end{array}}$$

Eine Quaternion mit der Norm 1 heißt *Einheitsquaternion* oder *normierte Quaternion*
Man kann jede Quaternion normieren:

$$\mathbf{A}^\circ=\frac{\mathbf{A}}{\mathrm{A}},\quad \mathrm{A}=\sqrt[+]{\mathrm{A}^2},\quad \mathbf{A}^\circ\circ\widetilde{\mathbf{A}}^\circ=1$$

**Sonderfälle:**

Skalare Quaternion:
$\mathrm{A}^2=\mathrm{a}\circ\tilde{\mathrm{a}}=\mathrm{a}^2$

Skalare Einheitsquaternion $\mathrm{a}^2=1\Rightarrow\mathrm{a}=\pm1$

Vektorielle Quaternion:

$$\mathrm{A}^2=\mathbf{a}\circ\tilde{\mathbf{a}}=\mathbf{a}\circ(-\mathbf{a})=-\mathbf{a}\circ\mathbf{a}=-\left(-|\mathbf{a}|^2\right)=|\mathbf{a}|^2$$

Vektorielle Einheitsquaternion $|\mathbf{a}|^2=1\Rightarrow\mathbf{a}$ ist Einheitsvektor

**Konjugium eines Quaternionenproduktes**

$$\boxed{(\mathbf{A}\circ\mathbf{B})^{\sim}=\widetilde{\mathbf{B}}\circ\widetilde{\mathbf{A}}}$$

**Inverse einer Quaternion**

Die Quaternion $\mathbf{X}$ heißt zu $\mathbf{A}$, wenn gilt
$\mathbf{X}\circ\mathbf{A}=1$
Daher

$$\boxed{\mathbf{X}=\mathbf{A}^{-1}=\frac{\widetilde{\mathbf{A}}}{\mathrm{A}^2}\quad\textit{inverse Quaternion}}$$

Da $\mathbf{A}$ und $\mathbf{A}^{-1}$ koaxial sind, gilt

$$\boxed{\mathbf{A}^{-1} \circ \mathbf{A} = \mathbf{A} \circ \mathbf{A}^{-1} = 1}$$

Zu jeder Quaternion $\mathbf{A} \neq \mathbf{O}$ gibt es also eine inverse Quaternion.

**Spezialfälle:**

Skalare Quaternion

$$a^{-1} = \frac{\tilde{a}}{a^2} = \frac{a}{a^2} = \frac{1}{a}$$

Vektorielle Quaternion $\mathbf{a} \neq \mathbf{o}$

$$\boxed{\mathbf{a}^{-1} = \frac{\tilde{\mathbf{a}}}{|\mathbf{a}|^2} = -\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|^2}}$$

Inverse eines Einheitsvektors $|\mathbf{e}| = 1$

$$\boxed{\mathbf{e}^{-1} = -\mathbf{e}}$$

**Inverse eines Quaternionenproduktes**

$$\boxed{(\mathbf{A} \circ \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{B}^{-1} \circ \mathbf{A}^{-1}}$$

**Der Normensatz**

Es seien $A^2, B^2, C^2$ die Normen der Quaternionen $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$. Dann gilt

$$\boxed{\mathbf{C} = \mathbf{A} \circ \mathbf{B} \Rightarrow C^2 = A^2 B^2}$$

Die Menge der Quaternionen Q mit dem inneren Verknüpfungen "+" und "∘" bildet einen nichtkommutativen Körper (Schiefkörper), den *Quaternionenkörper*.

## Geometrische Deutung der Quaternionen

Gegeben seien zwei Vektoren **v** und **u**. Wir bilden die Quaternion

$$\mathbf{A} := \mathbf{v} \circ \mathbf{u}^{-1} = a + \mathbf{a}$$

$$a = \frac{\mathbf{uv}}{|\mathbf{u}|^2} \qquad (1)$$

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{u} \times \mathbf{v}}{|\mathbf{u}|^2} \qquad (2)$$

$$\mathbf{au} = 0, \quad \mathbf{av} = 0 \qquad (3)$$

$$a = \frac{\mathbf{uv}}{|\mathbf{u}|^2} = \frac{|\mathbf{u}|.|\mathbf{v}|.\cos\alpha}{|\mathbf{u}|^2} = \frac{|\mathbf{v}|}{|\mathbf{u}|}.\cos\alpha \qquad (4)$$

$$|\mathbf{a}| = \frac{|\mathbf{u}|.|\mathbf{v}|.\sin\alpha}{|\mathbf{u}|^2} = \frac{|\mathbf{v}|}{|\mathbf{u}|}.\sin\alpha \qquad (5)$$

$$A^2 = a^2 + |\mathbf{a}|^2 = \frac{|\mathbf{v}|^2}{|\mathbf{u}|^2}, \quad A = \frac{|\mathbf{v}|}{|\mathbf{u}|} \qquad (6)$$

$$a = A\cos(\alpha), \quad |\mathbf{a}| = A\sin(\alpha) \qquad (7)$$

Jede vorgegebene Quaternion $\mathbf{A} = a + \mathbf{a}$ läßt sichauf unendlich viele Arten in der Gestalt $\mathbf{A} = \mathbf{v} o \mathbf{u}^{-1}$ mit geeignet gewählten Vektoren darstellen. $\mathbf{u} \perp \mathbf{a}$, aber sonst beliebig. Dann ist **v** in eindeutiger Weise bestimmt

$$\mathbf{v} = a\mathbf{u} + \mathbf{a} \times \mathbf{u} \qquad (8)$$

$$|\mathbf{v}| = A|\mathbf{u}|, \quad \cos\alpha = \frac{a}{A}, \quad \sin\alpha = \frac{|\mathbf{a}|}{A} \qquad (9)$$

Jede Quaternion **A** bewirkt in jeder zu ihrer Achse normalen Ebene eine Drehstreckung, wobei jeder dieser Ebene angehörige Vektor **u** vermöge

$$\mathbf{A} \circ \mathbf{u} = \mathbf{v}$$

in einen gleichfalls dieser Ebene angehörigen Vektor **v** übergeht. Der Faktor der Drehstrekkung ist A, der Drehwinkel ist durch

$$\cos\alpha = \frac{a}{A}$$

festgelegt. Die Drehung erscheint von der Spitze des Vektors **a** aus gesehen positiv. Umgekehrt ist jener Drehstreckung, welche den gegebenen Vektor **u** in den gegebenen Vektor **v** überführt, die Quaternion

$$\mathbf{A} = \mathbf{v} \circ \mathbf{u}^{-1}$$

zugeordnet.