Kapitel 4

Duale Vektorräume

Zu jedem Vektorraum $\boldsymbol{V}$ gehört der Vektorraum aller linearen Abbildungen von $\boldsymbol{V}$ in seinen Skalarkörper; diese Abbildungen heißen auch Linearformen und bilden den zu $\boldsymbol{V}$ dualen Vektorraum $\boldsymbol{V}^*$. Die Kernräume nicht trivialer Linearformen sind genau die Hyperebenen von $\boldsymbol{V}$. Bei endlicher Dimension bestimmt jede Basis von $\boldsymbol{V}$ eine Basis des dualen Vektorraumes; sie besteht aus allen Koordinatenformen zur gegebenen Basis. Bei unendlicher Dimension sind diese Koordinatenformen zwar linear unabhängig, spannen aber den dualen Vektorraum $\boldsymbol{V}^*$ nicht auf. Derartige Unterschiede zwischen endlich- und unendlichdimensionalen Vektorräumen treten in diesem Kapitel mehrfach auf.

Im endlichdimensionalen Fall werden Linearformen durch Zeilenvektoren beschrieben. Dementsprechend kann auch die Matrix eines Koordinatenwechsels spalten- und zeilenweise interpretiert werden. Alle Koordinatenmatrizen einer linearen Abbildung bilden eine Klasse äquivalenter Matrizen. Als Anwendung behandeln wir lineare Gleichungssysteme.

Jede Menge von Vektoren aus $\boldsymbol{V}$ bestimmt einen Unterraum des dualen Vektorraumes $\boldsymbol{V}^*$. Bei endlicher Dimension führen uns diese sogenannten Annullatorräume zu einem Dualitätsprinzip.

Zu jeder linearen Abbildung gehört eine transponierte Abbildung zwischen den zugehörigen dualen Vektorräumen. Kern- und Bildraum der gegebenen Abbildung haben als Annullatorräume genau den Bild- bzw. Kernraum der transponierten Abbildung. Bei endlicher Dimension bekommen wir so eine Interpretation für die Zeilen einer Koordinatenmatrix einer linearen Abbildung.

4.1 Elementare Vorbemerkungen

4.1.1 Wir geben in einer Ebene ein kartesisches Koordinatensystem (O, P_1, P_2) mit Ursprung O vor und betrachten eine lineare Abbildung

$$f : \mathbb{R}^{2\times 1} \to \mathbb{R} : (x_1, x_2)^{\mathrm{T}} \mapsto a_1x_1 + a_2x_2 \;\text{ mit }\; (0,0) \neq (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Dann wird für jedes $s \in \mathbb{R}$ durch die Gleichung

$$a_1x_1 + a_2x_2 = s$$

eine Gerade beschrieben. Alle diese Geraden sind zueinander parallel. Sie werden auch als *Niveaugeraden* der Funktion f bezeichnet (Abbildung 4.1) und sind nichts anderes als die Fasern von f. Durch jeden Punkt der Ebene geht genau eine solche Niveaugerade. Zur Veranschaulichung von f können einige Niveaugeraden dargestellt werden, wobei neben jeder solchen Geraden der betreffende Funktionswert notiert wird. Analoge Darstellungen nicht linearer Funktionen sind von Landkarten mit Höhenschichtenlinien oder Wetterkarten mit Isobaren bekannt (Abbildung 4.2). Oft werden Punkte mit demselben Funktionswert auch durch dieselbe Farbe gekennzeichnet, etwa bei Falschfarbenbildern zur Illustration der Außenwandtemperatur eines beheizten Hauses.

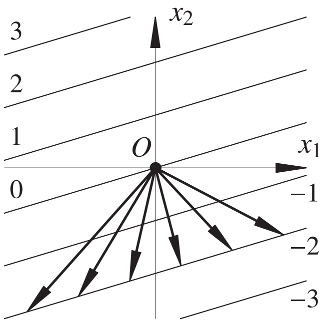

Abbildung 4.1

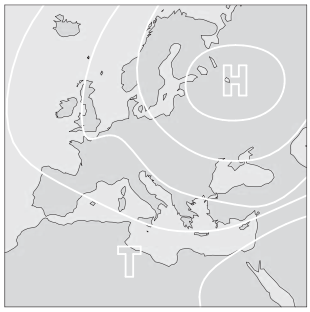

Abbildung 4.2

4.1.2 Analog zu oben wird bei festem Koordinatensystem im Anschauungsraum durch eine lineare Abbildung

$$f : \mathbb{R}^{3\times 1} \to \mathbb{R} : (x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}} \mapsto a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 \ \text{ mit } \ (0,0,0) \neq (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$$

für jedes $s \in \mathbb{R}$ durch die Gleichung

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = s$$

eine Ebene beschrieben. Alle diese Ebenen sind zueinander parallel und geben die Fasern von f ab. Die Funktion f kann somit durch ihre *Niveauebenen* (Punktmengen gleichen Funktionswertes) veranschaulicht werden.

Jede Gerade im Raum ist Schnitt zweier Ebenen; dementsprechend kann jede Gerade durch zwei Gleichungen der obigen Form beschrieben werden. Umgekehrt bestimmen aber zwei solche Gleichungen nicht stets eine Gerade. Das zeigen zwei zueinander parallele Ebenen. Die Verallgemeinerung der obigen Überlegungen führt uns jetzt zum Studium der linearen Abbildungen eines Vektorraumes in seinen Skalarkörper und in weiterer Folge zur Theorie der linearen Gleichungssysteme.

4.2 Linearformen und Hyperebenen

4.2.1 Ist $\boldsymbol{V}$ ein Vektorraum über K, so können wir auch K als Vektorraum über K auffassen. Es ist $\boldsymbol{E} = (\boldsymbol{e}_1) = (1)$ die kanonische Basis von K, was $\dim K = 1$ ergibt. Nach Satz 3.6.2 ist

$$\boldsymbol{V}^* := \mathrm{L}(\boldsymbol{V}, K)$$

ein Vektorraum. Er heißt der *duale Vektorraum* von $\boldsymbol{V}$. Die Elemente von $\boldsymbol{V}^*$ sind die linearen Abbildungen von $\boldsymbol{V}$ in K; sie werden auch *Linearformen* genannt.

Beispiele 4.2.2

1. Es seien $(\boldsymbol{b}_i)_{i\in I}$ eine Basis von $\boldsymbol{V}$ und $(a_i)_{i\in I}$ eine Familie in K. Nach dem Fortsetzungssatz 3.3.3 gibt es genau ein $f \in \boldsymbol{V}^*$ mit
$$\boldsymbol{b}_i \mapsto a_i \text{ für alle } i \in I.$$
Unter Benützung der Koordinaten eines Vektors $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{V}$ gilt dann
$$\boldsymbol{x} = \sum_{i\in I} x_i \boldsymbol{b}_i \mapsto f(\boldsymbol{x}) = \sum_{i\in I} x_i a_i.$$
2. Setzen wir in Beispiel 1 insbesondere $\boldsymbol{V} = K^{n\times 1}$, und wählen wir für $(\boldsymbol{b}_i)_{i\in I}$ die kanonische Basis von $K^{n\times 1}$, so erhalten wir die Linearform
$$(x_1, x_2, \dots, x_n)^{\mathrm{T}} \mapsto x_1 a_1 + x_2 a_2 + \cdots + x_n a_n.$$
3. Wir setzen in Beispiel 1 nun $K = \mathbb{Q}$ und fassen $(\boldsymbol{b}_i)_{i\in I}$ als Familie der in einem Supermarkt erhältlichen Artikel auf. Es ist dann $\boldsymbol{V}$ ein endlichdimensionaler Vektorraum, dessen Dimension vom aktuellen Sortiment abhängt. Die Abbildung $\boldsymbol{b}_i \mapsto a_i$ möge den Preis eines Artikels beschreiben (Preisliste). Die so festgelegte Linearform $f \in \boldsymbol{V}^*$ wird dann an der Kasse auf den im Einkaufswagen befindlichen Vektor $\boldsymbol{x}$ (Linearkombination der Basisvektoren) angewendet. Der Funktionswert $f(\boldsymbol{x})$ ist am Kassenbon abzulesen und an der Kasse zu bezahlen.
4. Sei $\mathrm{C}^0(I)$ der Vektorraum aller auf einem abgeschlossenen Intervall $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ stetigen Funktionen $I \to \mathbb{R}$, wobei $a \le b$. Jede Funktion $g \in \mathrm{C}^0(I)$ besitzt ein bestimmtes Integral $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x \in \mathbb{R}$. Es ist
$$\int_a^b (\,\cdot\,)\mathrm{d}x : \mathrm{C}^0(I) \to \mathbb{R} : g \mapsto \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$
eine Linearform $\mathrm{C}^0(I) \to \mathbb{R}$, denn für alle $g, h \in \mathrm{C}^0(I)$ und alle $c \in \mathbb{R}$ gilt
$$\int_a^b (g + ch)(x)\mathrm{d}x = \int_a^b g(x)\mathrm{d}x + c\int_a^b h(x)\mathrm{d}x.$$
Das ist eine aus der Analysis bekannte Regel.
5. Sei K^M die Menge aller Abbildungen einer Menge $M \neq \emptyset$ in K. Wir wählen $t \in M$ beliebig, aber fest. Dann ist die *Evaluierungsabbildung*
$$v_t : K^M \to K : g \mapsto g(t)$$
– jede Funktion g wird an der Stelle t ausgewertet – eine lineare Abbildung, da für alle $g, h \in K^M$ und alle $c \in K$ gilt, dass
$$v_t(g + ch) = (g + ch)(t) = g(t) + ch(t) = v_t(g) + cv_t(h).$$
An die Stelle von K^M kann auch ein beliebiger Unterraum von K^M treten, etwa der Unterraum $K^{\langle M\rangle}$.

Die Beispiele 4 und 5 sind insofern bemerkenswert, als hier Linearformen festgelegt werden, ohne dass auf eine Angabe mit Hilfe des Fortsetzungssatzes zurückgegriffen wird.

4.2.3 Wir bezeichnen eine Linearform im Folgenden meist so wie einen Vektor mit einem kleinen fett gedruckten Buchstaben, dem aber oben rechts ein Stern hinzugefügt wird, z. B. $\boldsymbol{a}^* : \boldsymbol{V} \to K$. Weiters führen wir für das Bild eines Vektors $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{V}$ unter $\boldsymbol{a}^* \in \boldsymbol{V}^*$ eine modifizierte Schreibweise ein, die uns schon in 3.4.1 begegnet ist: Die Abbildung

$$\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle : \boldsymbol{V}^* \times \boldsymbol{V} \to K : (\boldsymbol{a}^*, \boldsymbol{x}) \mapsto \langle \boldsymbol{a}^*, \boldsymbol{x}\rangle := \boldsymbol{a}^*(\boldsymbol{x})$$

heißt die *kanonische Paarung* von $\boldsymbol{V}^*$ und $\boldsymbol{V}$. Diese Schreibweise unterstreicht die Tatsache, dass sowohl $\boldsymbol{V}^*$ als auch $\boldsymbol{V}$ Vektorräume sind. Die Rechenregeln

$$\langle \boldsymbol{a}^* + c\boldsymbol{b}^*, \boldsymbol{x}\rangle = \langle \boldsymbol{a}^*, \boldsymbol{x}\rangle + c\langle \boldsymbol{b}^*, \boldsymbol{x}\rangle, \tag{4.1}$$

$$\langle \boldsymbol{a}^*, \boldsymbol{x} + c\boldsymbol{y}\rangle = \langle \boldsymbol{a}^*, \boldsymbol{x}\rangle + c\langle \boldsymbol{a}^*, \boldsymbol{y}\rangle, \tag{4.2}$$

gelten für alle $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{V}$, $\boldsymbol{a}^*, \boldsymbol{b}^* \in \boldsymbol{V}^*$ und alle $c \in K$. Sie folgen einerseits aus der Definition der Abbildung $\boldsymbol{a}^* + c\boldsymbol{b}^* \in \boldsymbol{V}^*$ bzw. andererseits aus der Linearität von $\boldsymbol{a}^*$. Wir sagen auch, die kanonische Paarung sei linear in jedem der beiden Argumente. Diese Eigenschaft lässt eine gewisse Symmetrie in der Rolle von $\boldsymbol{V}$ und $\boldsymbol{V}^*$ vermuten, die jedoch nicht immer gegeben sein wird. Beachte: Zuerst ist $\boldsymbol{V}$ da, dann erst kommt $\boldsymbol{V}^*$ ins Spiel.

4.2.4 Nach Satz 3.2.4 ist $\langle \boldsymbol{a}^*, \boldsymbol{V}\rangle$ für jede Linearform $\boldsymbol{a}^* \in \boldsymbol{V}^*$ ein Unterraum von K. Wegen $\dim K = 1$ sind nur zwei Fälle möglich.

Fall 1: $\langle \boldsymbol{a}^*, \boldsymbol{V}\rangle = \{0\} \Leftrightarrow \ker \boldsymbol{a}^* = \boldsymbol{V} \Leftrightarrow \operatorname{rg} \boldsymbol{a}^* = 0$. In diesem Fall heißt $\boldsymbol{a}^* =: \boldsymbol{o}^*$ eine *triviale Linearform* oder *Nullform*.

Fall 2: $\langle \boldsymbol{a}^*, \boldsymbol{V}\rangle = K \Leftrightarrow \ker \boldsymbol{a}^* \neq \boldsymbol{V} \Leftrightarrow \operatorname{rg} \boldsymbol{a}^* = 1$. Nun heißt der Unterraum $\ker \boldsymbol{a}^*$ eine *Hyperebene* von $\boldsymbol{V}$.

Der folgende Satz charakterisiert die Hyperebenen eines Vektorraumes:

Satz 4.2.5 *Ein Unterraum eines Vektorraumes **V** ist genau dann eine Hyperebene, falls er mindestens einen eindimensionalen Komplementärraum besitzt.*

Beweis. (a) Ist $\boldsymbol{a}^* \in \boldsymbol{V}^*$ eine nicht triviale Linearform, so folgt $\ker \boldsymbol{a}^* \neq \boldsymbol{V}$. Für einen beliebig gewählten komplementären Unterraum $\boldsymbol{T}$ gilt daher $\dim \boldsymbol{T} \geq 1$. Da $\boldsymbol{a}^*|\boldsymbol{T}$ injektiv ist, folgt mit Satz 3.2.6 (a) $\dim \boldsymbol{T} = \dim\langle \boldsymbol{a}^*, \boldsymbol{T}\rangle \leq \dim K = 1$, was insgesamt $\dim \boldsymbol{T} = 1$ liefert.

(b) Hat ein Unterraum $\boldsymbol{H}$ von $\boldsymbol{V}$ ein eindimensionales Komplement $\boldsymbol{T}$, so ist $\boldsymbol{H}$ der Kern der Projektion p von $\boldsymbol{V}$ auf $\boldsymbol{T}$ in Richtung $\boldsymbol{H}$. Wegen $\dim \boldsymbol{T} = 1$ existiert nach Satz 3.4.5 mindestens eine lineare Bijektion $g : \boldsymbol{T} \to K$. Dann ist $g \circ p : \boldsymbol{V} \to K$ eine nicht triviale Linearform mit dem Kern $\boldsymbol{H}$, also $\boldsymbol{H}$ eine Hyperebene. □

Nach Beweisteil (a) ist *jeder* Komplementärraum einer Hyperebene eindimensional. Für $\dim \boldsymbol{V} = n < \infty$ sind die Hyperebenen nach der Rangformel aus Satz 3.2.8 genau die Unterräume mit Dimension $n - 1$. Für $\dim \boldsymbol{V} = 0$ gibt es keine Hyperebenen.

4.2.6 Als Wiederholung besprechen wir die Koordinatendarstellung einer Linearform. Es seien $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_n)$ eine Basis von $\boldsymbol{V}$ und $\boldsymbol{E} = (\boldsymbol{e}_1) = (1)$ die kanonische Basis von K. Eine andere Basiswahl in K wollen wir hier nicht betrachten. Es ist dann $\boldsymbol{E}^* = (\boldsymbol{e}_1^*) = (\mathrm{id}_K)$, wenn wir $K^{1\times 1}$ mit K identifizieren. Die Koordinatendarstellung einer Linearform $\boldsymbol{a}^* \in \boldsymbol{V}^*$ beruht auf folgendem kommutativen Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
\boldsymbol{V} \arrow[r, "\boldsymbol{a}^*"] \arrow[d, "\boldsymbol{B}^*"'] & K \arrow[d, "\boldsymbol{E}^*=\mathrm{id}_K"] \\
K^{n\times 1} \arrow[r, "\boldsymbol{E}^* \circ \boldsymbol{a}^* \circ (\boldsymbol{B}^*)^{-1}"'] & K
\end{tikzcd}$$

Wir erhalten (unter Vermeidung von Doppelindizes) die Zeile

$$\langle \boldsymbol{E}^*, \langle \boldsymbol{a}^*, \boldsymbol{B}\rangle\rangle \overset{\boldsymbol{E}^*=\mathrm{id}_K}{=} \langle \boldsymbol{a}^*, \boldsymbol{B}\rangle = (\langle \boldsymbol{a}^*, \boldsymbol{b}_1\rangle, \langle \boldsymbol{a}^*, \boldsymbol{b}_2\rangle, \ldots, \langle \boldsymbol{a}^*, \boldsymbol{b}_n\rangle) =: (a_1, a_2, \ldots, a_n) \tag{4.3}$$

als Koordinatenmatrix von $\boldsymbol{a}^*$ (Abbildung 4.3). Wir können dann für $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{V}$ mit $\langle \boldsymbol{B}^*, \boldsymbol{x}\rangle = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}}$ die kanonische Paarung wie folgt als Matrizenprodukt schreiben:

$$\langle \boldsymbol{a}^*, \boldsymbol{x}\rangle = \langle \boldsymbol{a}^*, \boldsymbol{B}\rangle \cdot \langle \boldsymbol{B}^*, \boldsymbol{x}\rangle = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n.$$

Die *Gleichung*

$$\langle \boldsymbol{a}^*, \boldsymbol{x}\rangle = 0$$

beschreibt also für festes $\boldsymbol{a}^* \neq \boldsymbol{o}^*$ koordinatenfrei die Hyperebene $\ker \boldsymbol{a}^*$. Unter Benützung der oben eingeführten Koordinaten lautet diese Gleichung dann

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0,$$

wobei $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \neq (0, 0, \ldots, 0)$.

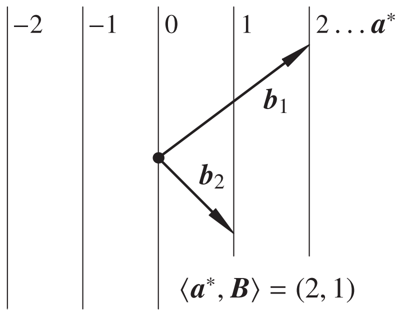

Abbildung 4.3

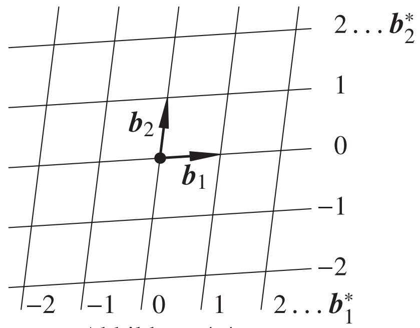

Abbildung 4.4

Beispiele 4.2.7 Mit Hilfe von Linearformen und Vektoren lassen sich gewisse Typen linearer Abbildungen eines Vektorraumes $\boldsymbol{V}$ in einen Vektorraum $\boldsymbol{W}$ einfach beschreiben.

1. Es seien eine Linearform $\boldsymbol{a}^* \in \boldsymbol{V}^*$ und ein Vektor $\boldsymbol{w} \in \boldsymbol{W}$ gegeben. Dann ist die Abbildung

   $$f : \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W} : \boldsymbol{x} \mapsto \langle \boldsymbol{a}^*, \boldsymbol{x}\rangle \boldsymbol{w}$$

   linear, da sie Produkt der Linearform $\boldsymbol{a}^*$ mit der linearen Abbildung $K \to \boldsymbol{W} : x \mapsto x\boldsymbol{w}$ ist. Für $\boldsymbol{a}^* \neq \boldsymbol{o}^*$ und $\boldsymbol{w} \neq \boldsymbol{o}$ ist $\ker f = \ker \boldsymbol{a}^*$ eine Hyperebene und $f(\boldsymbol{V}) = [\boldsymbol{w}]$ eindimensional. In jedem anderen Fall liegt mit f die Nullabbildung $\boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}$ vor.
2. Für $\boldsymbol{a}^* \in \boldsymbol{V}^*$, $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}$ und $\langle \boldsymbol{a}^*, \boldsymbol{v}\rangle \neq 0$ ist $\boldsymbol{V} = [\boldsymbol{v}] \oplus \ker \boldsymbol{a}^*$. Wir bezeichnen die Hyperebene $\ker \boldsymbol{a}^*$ mit $\boldsymbol{H}$. Die Abbildung

   $$p : \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V} : \boldsymbol{x} \mapsto \frac{\langle \boldsymbol{a}^*, \boldsymbol{x}\rangle}{\langle \boldsymbol{a}^*, \boldsymbol{v}\rangle} \boldsymbol{v}$$

ist die Projektion von $\boldsymbol{V}$ auf $[\boldsymbol{v}]$ in Richtung $\boldsymbol{H}$: Zerlegen wir nämlich den Vektor $\boldsymbol{x}$ in seine beiden Anteile, also $\boldsymbol{x} = x\boldsymbol{v} + \boldsymbol{h}$ mit $x \in K$ und $\boldsymbol{h} \in \boldsymbol{H}$, so folgt in der Tat $p(\boldsymbol{x}) = xp(\boldsymbol{v}) = x\boldsymbol{v}$. Wir erkennen daraus, dass für beliebiges $c \in K$ die lineare Abbildung

$$\mathrm{id}_V + (c-1)p : \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V} : \boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{x} + (c-1)\,\frac{\langle \boldsymbol{a}^*, \boldsymbol{x}\rangle}{\langle \boldsymbol{a}^*, \boldsymbol{v}\rangle}\,\boldsymbol{v}$$

alle Vektoren der Hyperebene $\boldsymbol{H}$ fest lässt und $\boldsymbol{v} \mapsto c\boldsymbol{v}$ leistet. Genau für $c = 0$ erhalten wir die Projektion auf $\boldsymbol{H}$ in Richtung $[\boldsymbol{v}]$, bei $c \neq 0$ sind die zu c und c^{-1} gehörenden Abbildungen zueinander invers. Insbesondere für $\operatorname{Char} K \neq 2$ und $c = -1$ liegt mit $\mathrm{id}_V - 2p$ eine Involution vor. Vgl. 3.6.3 Beispiele 1 und 3.

3. Für $\boldsymbol{a}^* \in \boldsymbol{V}^* \setminus \{\boldsymbol{o}^*\}$, $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V} \setminus \{\boldsymbol{o}\}$ und $\langle \boldsymbol{a}^*, \boldsymbol{v}\rangle = 0$ liegt $[\boldsymbol{v}]$ in der Hyperebene $\ker \boldsymbol{a}^* =: \boldsymbol{H}$. Die Abbildung
$$g : \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V} : \boldsymbol{x} \mapsto \langle \boldsymbol{a}^*, \boldsymbol{x}\rangle \boldsymbol{v}$$
ist keine Projektion, vielmehr ist $g \circ g$ die Nullabbildung. Für beliebiges $c \in K$ lässt die lineare Abbildung
$$\mathrm{id}_V + cg : \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V} : \boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{x} + c\langle \boldsymbol{a}^*, \boldsymbol{x}\rangle \boldsymbol{v}$$
alle Vektoren der Hyperebene $\boldsymbol{H}$ fest. Die zu c und $-c$ gehörenden Abbildungen sind zueinander invers. Insbesondere für $\operatorname{Char} K = 2$ und $c \neq 0$ liegt mit $\mathrm{id}_V + cg$ eine Involution vor, da $c + c = 0$.

Aufgaben

A 4.2.1 Ein Glas Sekt, drei Glas Rotwein und sieben belegte Brote kosten 33 Euro; ein Glas Sekt, vier Glas Rotwein und zehn belegte Brote kosten 44 Euro.

(a) Was kosten ein Glas Sekt, ein Glas Rotwein und ein belegtes Brot?

(b) Was kosten zwei Glas Sekt, drei Glas Rotwein und fünf belegte Brote?

(c) Ist es auch möglich, die Frage nach dem Preis eines Glases Sekt zu beantworten?

A 4.2.2 Sei $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2)$ eine Basis eines Vektorraumes $\boldsymbol{V}$ über $\mathbb{R}$.

(a) Zeige die Existenz genau einer Linearform $\boldsymbol{a}^* \in \boldsymbol{V}^*$ mit $\langle \boldsymbol{a}^*, \boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_2\rangle = a_1$, $\langle \boldsymbol{a}^*, \boldsymbol{b}_2 - \boldsymbol{b}_1\rangle = a_2$ zu einer der folgenden Angaben: (α) $(a_1, a_2) = (7, 3)$; (β) $(a_1, a_2) = (2, 3)$; (γ) $(a_1, a_2) = (4, 2)$. Berechne dazu die Koordinatenmatrix $\langle \boldsymbol{a}^*, \boldsymbol{B}\rangle$.

(b) Bestimme Basen von $\ker \boldsymbol{a}^*$ und $\boldsymbol{a}^*(\boldsymbol{V})$ sowie die Zahlen $\operatorname{rg} \boldsymbol{a}^*$ und $\operatorname{def} \boldsymbol{a}^*$.

(c) Veranschauliche die Fasern von $\boldsymbol{a}^*$, also die Nebenklassen von $\ker \boldsymbol{a}^*$, in einer Skizze.

4.3 Duale Basen

4.3.1 Sei $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{b}_j)_{j \in I}$ eine Basis eines Vektorraumes $\boldsymbol{V}$. Durch diese Basis ist die Familie $\boldsymbol{B}^* = (\boldsymbol{b}_i^*)_{i \in I}$ der zugehörigen Koordinatenformen mitbestimmt. Da die Koordinatenformen nach Satz 3.4.2 (b) linear sind, gehören sie dem dualen Vektorraum $\boldsymbol{V}^*$ an. Wir untersuchen nun, ob mit $\boldsymbol{B}^*$ eine Basis von $\boldsymbol{V}^*$ vorliegt. Dabei verwenden wir die folgende Formel zur Berechnung der i-ten Koordinate des j-ten Basisvektors (Abbildung 4.4):

$$\langle \boldsymbol{b}_i^*, \boldsymbol{b}_j\rangle = \delta_{ij} \quad \text{für alle} \quad i, j \in I. \tag{4.4}$$

Satz 4.3.2 *Es seien* $\boldsymbol{V}$ *ein Vektorraum und* $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{b}_j)_{j\in I}$ *eine Basis von* $\boldsymbol{V}$*. Die Familie* $\boldsymbol{B}^* = (\boldsymbol{b}_i^*)_{i\in I}$ *der zugehörigen Koordinatenformen ist linear unabhängig; sie ist genau dann eine Basis von* $\boldsymbol{V}^*$*, wenn* $\boldsymbol{V}$ *endlichdimensional ist.*

Beweis. (a) Wir gehen von einer beliebigen Linearkombination $\boldsymbol{a}^* = \sum_{i\in I} a_i\boldsymbol{b}_i^*$ mit $a_i \in K$ aus und berechnen mit Hilfe von (4.4) für festes $j \in I$ den Funktionswert

$$\langle \boldsymbol{a}^*, \boldsymbol{b}_j\rangle = \Big\langle \sum_{i\in I} a_i\boldsymbol{b}_i^*, \boldsymbol{b}_j\Big\rangle = \sum_{i\in I} a_i\langle \boldsymbol{b}_i^*, \boldsymbol{b}_j\rangle = \sum_{i\in I} a_i\delta_{ij} = a_j. \tag{4.5}$$

Wir führen die obige Rechnung jetzt für $\boldsymbol{a}^* := \boldsymbol{o}^*$ durch. Daraus erkennen wir $0 = \langle \boldsymbol{o}^*, \boldsymbol{b}_j\rangle = a_j$ für alle $j \in I$. Die Nullform $\boldsymbol{o}^*$ kann also nur in trivialer Weise aus $\boldsymbol{B}^*$ linear kombiniert werden. Die Familie $\boldsymbol{B}^*$ ist somit l. u.

(b) Für $\dim \boldsymbol{V} = n < \infty$ gilt

$$\dim \boldsymbol{V}^* = \dim \mathrm{L}(\boldsymbol{V}, K) = \dim \boldsymbol{V} \cdot \dim K = \dim \boldsymbol{V} \cdot 1 = \dim \boldsymbol{V} = n < \infty \tag{4.6}$$

nach Satz 3.6.4. Wegen $\#I = n$ ist die l. u. Familie $\boldsymbol{B}^*$ eine Basis von $\boldsymbol{V}^*$; vgl. Satz 2.6.6.

(c) Sei $\dim \boldsymbol{V}$ zunächst beliebig und $\boldsymbol{a}^* = \sum_{i\in I} a_i\boldsymbol{b}_i^*$ eine Linearkombination; es gilt also $a_j = 0$ für fast alle $j \in I$. Nach (4.5) ordnet jede solche Linearform $\boldsymbol{a}^*$ daher *fast allen* Vektoren der Basis $\boldsymbol{B}$ die Zahl Null zu. Ist nun aber $\dim \boldsymbol{V}$ unendlich, so gibt es nach dem Fortsetzungssatz 3.3.3 eine Linearform $\boldsymbol{c}^* \in \boldsymbol{V}^*$, die durch

$$\langle \boldsymbol{c}^*, \boldsymbol{b}_j\rangle = 1 \quad \text{für alle} \quad j \in I$$

erklärt ist. Da I jetzt unendlich ist, liegt $\boldsymbol{c}^*$ nicht in der Hülle von $\boldsymbol{B}^*$. □

Soll für eine Linearform $\boldsymbol{a}^* \in \boldsymbol{V}^*$ überprüft werden, ob sie sich als Linearkombination von $\boldsymbol{B}^*$ darstellen lässt, so betrachten wir für alle $j \in I$ die Skalare $\langle \boldsymbol{a}^*, \boldsymbol{b}_j\rangle =: a_j$. Genau dann, wenn die Bedingung

$$a_j = 0 \quad \text{für fast alle} \quad j \in I \tag{4.7}$$

erfüllt ist, liegt $\boldsymbol{a}^*$ in der Hülle von $\boldsymbol{B}^*$. In diesem Fall gilt dann $\boldsymbol{a}^* = \sum_{i\in I} a_i\boldsymbol{b}_i^*$. Hat $\boldsymbol{V}$ endliche Dimension, so ist für jede Linearform $\boldsymbol{a}^* \in \boldsymbol{V}^*$ die Bedingung (4.7) in trivialer Weise erfüllt, da hier I endlich ist.

4.3.3 Ist $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{b}_j)_{j\in I}$ eine Basis eines endlichdimensionalen Vektorraumes $\boldsymbol{V}$, so wird die von den Koordinatenformen $(\boldsymbol{b}_i^*)_{i\in I}$ gebildete Basis $\boldsymbol{B}^*$ von $\boldsymbol{V}^*$ die zu $\boldsymbol{B}$ *duale Basis* genannt. Bei gegebener Basis $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_n)$ sind für jede Linearform $\boldsymbol{a}^* \in \boldsymbol{V}^*$ die Elemente der Koordinatenmatrix

$$\langle \boldsymbol{a}^*, \boldsymbol{B}\rangle = (\langle \boldsymbol{a}^*, \boldsymbol{b}_1\rangle, \langle \boldsymbol{a}^*, \boldsymbol{b}_2\rangle, \ldots, \langle \boldsymbol{a}^*, \boldsymbol{b}_n\rangle) =: (a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

nach (4.3) und (4.5) zugleich die Koordinaten von $\boldsymbol{a}^*$ bezüglich der dualen Basis. Vgl. Abbildung 4.3. Die Koordinaten bezüglich der dualen Basis treten daher bei dieser Schreibweise als die Elemente eines Zeilenvektors auf. Ist $\boldsymbol{a}^*$ insbesondere die i-te Koordinatenform, also der i-te Vektor der dualen Basis, so ist seine Koordinatenmatrix der i-te Vektor der kanonischen Basis von $K^{1\times n}$.

Beispiele 4.3.4

1. Gegeben sei die Basis

$$\boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

von $\mathbb{R}^{2\times 1}$. Ferner sei die Linearform $\boldsymbol{a}^* : \mathbb{R}^{2\times 1} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$\langle \boldsymbol{a}^*, \boldsymbol{b}_1 \rangle = 4, \quad \langle \boldsymbol{a}^*, \boldsymbol{b}_2 \rangle = 6.$$

Um die Koordinatenmatrix von $\boldsymbol{a}^*$ bezüglich der kanonischen Basen $\boldsymbol{E} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$ und (1) von $\mathbb{R}^{2\times 1}$ bzw. $\mathbb{R}$ zu erhalten, wenden wir elementare Spaltenumformungen an:

$$\boldsymbol{a}^* \Big\downarrow \quad \begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 4 & 6 & 4 & 2 \end{array}$$

Das zeigt

$$\langle \boldsymbol{a}^*, \boldsymbol{E} \rangle = (4, 2) \in \mathbb{R}^{1\times 2},$$

was zu $\boldsymbol{a}^* = 4\boldsymbol{e}_1^* + 2\boldsymbol{e}_2^*$ gleichwertig ist. Somit ist $4x_1 + 2x_2 = 0$ eine Gleichung von $\ker \boldsymbol{a}^*$. Ein gleichartiger Ansatz gestattet die Bestimmung der zu $\boldsymbol{B}$ dualen Basis: Wir schreiben in den beiden Zeilen unterhalb der doppelten Trennlinie die Bilder von $\boldsymbol{B}$ unter den Linearformen $\boldsymbol{b}_1^*$ und $\boldsymbol{b}_2^*$:

$$\boldsymbol{b}_1^* \Big\downarrow \quad \boldsymbol{b}_2^* \Bigg\downarrow \quad \begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline\hline 1 & 0 & 1 & -1 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}$$

Rechts unten können dann die Matrizen $\langle \boldsymbol{b}_1^*, \boldsymbol{E} \rangle = (1, -1)$ und $\langle \boldsymbol{b}_2^*, \boldsymbol{E} \rangle = (0, 1)$ abgelesen werden. Das Beispiel zeigt nebenbei, dass die Bestimmung der dualen Basis einfach auf das Invertieren einer Matrix hinausläuft, wobei aber die Ausgangsmatrix spaltenweise und die inverse Matrix zeilenweise zu lesen ist.

2. Wir betrachten jenen Unterraum $\boldsymbol{T} \subset \mathrm{C}^0(\mathbb{R})$, der von den Funktionen

$$f_j : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^j \quad \text{für} \quad j \in \mathbb{N}$$

aufgespannt wird. Mit $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ liegt nach A 3.2.4 eine Basis von $\boldsymbol{T}$ vor. Die i-te Koordinatenform ordnet jeder Funktion

$$\sum_{j\in\mathbb{N}} c_j f_j : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \sum_{j\in\mathbb{N}} c_j x^j$$

die Zahl $c_i \in \mathbb{R}$ zu. Die Linearform

$$\int_0^1 (\,\cdot\,)\mathrm{d}x : \boldsymbol{T} \to \mathbb{R} : f \mapsto \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$$

ordnet *allen* Basisfunktionen einen Wert $\neq 0$ zu, da

$$\int_0^1 x^j \mathrm{d}x = \frac{1}{j+1} \neq 0 \quad \text{für alle} \quad j \in \mathbb{N}.$$

Die Evaluierungsabbildung $v_1 : \boldsymbol{T} \to \mathbb{R} : f \mapsto f(1)$ ordnet ebenfalls *allen* Basisfunktionen einen Wert $\neq 0$ zu, da $f_j(1) = 1$ für alle $j \in \mathbb{N}$. Diese beiden Linearformen lassen sich daher aus den Koordinatenformen nicht linear kombinieren.
Die Evaluierungsabbildung v_0 leistet $f_j \mapsto 0$ für fast alle $j \in \mathbb{N}$. Nur für $j = 0$ gilt $f_0 \mapsto 1$. In der Tat ist v_0 die Koordinatenform zum Index $j = 0$. (Die anderen Koordinatenformen sind keine Evaluierungsabbildungen.)

Bemerkung 4.3.5 Jeder Vektorraum $\boldsymbol{V}$ ist nach Satz 3.4.2 (a) linear isomorph zu einem Vektorraum $K^{\langle I\rangle}$. Es lässt sich leicht zeigen, dass dann $\boldsymbol{V}^*$ linear isomorph zu K^I ist. Bei endlicher Indexmenge I gilt $K^{\langle I\rangle} = K^I$. Bei unendlicher Indexmenge sind $K^{\langle I\rangle}$ und K^I niemals linear isomorph, wie ohne Beweis mitgeteilt sei.

Aufgaben

A 4.3.1 Es seien $\boldsymbol{V}$ ein Vektorraum über K und $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3)$ eine Basis von $\boldsymbol{V}$.

(a) Zeige: Für alle $t \in K$ bilden $\boldsymbol{c}_{1,t} := \boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{c}_{2,t} := \boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_2$, $\boldsymbol{c}_{3,t} := t\boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_2 + \boldsymbol{b}_3$ eine Basis $\boldsymbol{C}_t := (\boldsymbol{c}_{1,t}, \boldsymbol{c}_{2,t}, \boldsymbol{c}_{3,t})$ von $\boldsymbol{V}$.

(b) Bestimme die zu $\boldsymbol{C}_t$ duale Basis $\boldsymbol{C}_t^* = (\boldsymbol{c}_{1,t}^*, \boldsymbol{c}_{2,t}^*, \boldsymbol{c}_{3,t}^*)$.

Anleitung: Erfasse Vektoren $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{V}$ durch ihre Koordinatenspalten $\langle \boldsymbol{B}^*, \boldsymbol{x}\rangle$ und Linearformen $\boldsymbol{a}^* \in \boldsymbol{V}^*$ durch ihre Koordinatenmatrizen $\langle \boldsymbol{a}^*, \boldsymbol{B}\rangle$.

A 4.3.2 Im Vektorraum $\mathbb{R}^{\langle\mathbb{N}\rangle}$ sei die kanonische Basis $(\boldsymbol{e}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\boldsymbol{e}_n = (\delta_{in})_{i\in\mathbb{N}}$ gegeben.

(a) Zeige, dass die Familie $(\boldsymbol{b}_j)_{j\in\mathbb{N}}$ mit

$$\boldsymbol{b}_0 := (1,0,0,0,\ldots),\quad \boldsymbol{b}_1 := (-1,1,0,\ldots),\quad \boldsymbol{b}_2 := (0,-1,1,0,\ldots),\quad \ldots$$

ebenfalls eine Basis von $\mathbb{R}^{\langle\mathbb{N}\rangle}$ ist.

(b) Berechne $\langle \boldsymbol{b}_j^*, (a_i)_{i\in\mathbb{N}}\rangle \in \mathbb{R}$ und gib an, welche der Linearformen $\boldsymbol{b}_j^*$ in der Hülle von $(\boldsymbol{e}_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ liegen.

Hinweis: $\langle \boldsymbol{b}_0^*, (a_i)_{i\in\mathbb{N}}\rangle = \sum_{i\in\mathbb{N}} a_i$. Warum ist diese Summe endlich?

A 4.3.3 Fortsetzung von A 4.3.2: Zeige, dass die Abbildung $f : (\mathbb{R}^{\langle\mathbb{N}\rangle})^* \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \boldsymbol{a}^* \mapsto (\langle \boldsymbol{a}^*, \boldsymbol{e}_n\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ eine lineare Bijektion ist. ($\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ist der Vektorraum *aller* Folgen $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$.)

Bemerkung: Damit ist die Tatsache, dass ein unendlichdimensionaler Vektorraum und sein dualer Vektorraum niemals linear isomorph sind, zwar nicht bewiesen, aber vielleicht ein wenig plausibel gemacht.

4.4 Koordinatenwechsel

4.4.1 Wir haben bisher beim Rechnen mit Koordinaten immer eine feste Basis vorausgesetzt. Oft ist es aber notwendig, von einer Koordinatendarstellung auf andere Koordinaten umzurechnen. Das nötige Handwerkszeug haben wir schon entwickelt, es müssen nur die betreffenden Sätze richtig eingesetzt werden. Wir setzen im Folgenden einen Vektorraum $\boldsymbol{V}$ mit $\dim \boldsymbol{V} = n < \infty$ voraus.

Sind $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_n)$ und $\tilde{\boldsymbol{B}} = (\tilde{\boldsymbol{b}}_1, \tilde{\boldsymbol{b}}_2, \ldots, \tilde{\boldsymbol{b}}_n)$ Basen von $\boldsymbol{V}$, so wird die lineare Bijektion

$$\tilde{\boldsymbol{B}}^* \circ (\boldsymbol{B}^*)^{-1} : K^{n\times 1} \to K^{n\times 1}$$

ein *Koordinatenwechsel* genannt. Wegen

$$\tilde{\boldsymbol{B}}^* \circ (\boldsymbol{B}^*)^{-1} = \tilde{\boldsymbol{B}}^* \circ \mathrm{id}_{\boldsymbol{V}} \circ (\boldsymbol{B}^*)^{-1}$$

können wir einen Koordinatenwechsel als Koordinatendarstellung der Identität von $\boldsymbol{V}$ bezüglich der beiden Basen $\boldsymbol{B}$ und $\tilde{\boldsymbol{B}}$ interpretieren; vgl. 3.4.6. Die Matrix

$$\langle \tilde{\boldsymbol{B}}^*, \mathrm{id}_{\boldsymbol{V}}(\boldsymbol{B})\rangle = \langle \tilde{\boldsymbol{B}}^*, \boldsymbol{B}\rangle \in \mathrm{GL}_n(K)$$

heißt die zum Koordinatenwechsel gehörige *Transformationsmatrix*. Die Koordinatentransformation $\langle \boldsymbol{B}^*, \boldsymbol{x}\rangle \mapsto \langle \tilde{\boldsymbol{B}}^*, \boldsymbol{x}\rangle$ ist daher durch

$$\langle \tilde{\boldsymbol{B}}^*, \boldsymbol{B}\rangle \cdot \langle \boldsymbol{B}^*, \boldsymbol{x}\rangle = \langle \tilde{\boldsymbol{B}}^*, \boldsymbol{x}\rangle$$