Proceedings of the Congress
of Geometry,Thessaloniki, 47-53 (1987)

LINIENGEOMETRISCHE MODELLE AFFINER 4-RÄUME

Hermann Schaal zum 60.Geburtstag gewidmet

Hans Havlicek

1. Einleitung

1.1. Sei P ein n-dimensionaler projektiver Pappos-Raum ($2 \le n < \infty$) und A ein fest gewählter (n-k-1)-dimensionaler Unterraum ($0 \le k \le n-1$). Nach R.METZ [12] trägt dann die Menge $\mathfrak{C}$ der Komplemente von A die Struktur eines $(n-k).(k+1)$-dimensionalen affinen Raumes, falls gewisse "verallgemeinerte Reguli" - das sind Segre-Varietäten [4] in Quotientenräumen von P - als affine Geraden angesehen werden[1]. Für k=0 liegt die bekannte Konstruktion eines affinen Raumes durch Schlitzen von P längs einer Hyperebene vor; k=n-1 läßt sich dual interpretieren. Daher sind nur die Fälle $1 \le k \le n-2$ von Interesse.

A.HERZER [10] zeigt, wie diese affinen Räume über eine "stereographische Projektion" der zugehörigen Graßmann-Varietät $G_{n,k}$ erhalten werden können. Weiters stellt er wichtige Querverbindungen zur Geometrie der Algebren her.

Etwa für n=3 und k=1 ist A=a eine Gerade. Für zwei verschiedene zu a windschiefe Geraden g,h erhält man die "affine Verbindungsgerade" <g,h> der "Punkte" g,h wie folgt: Gilt $g \cap h = \emptyset$, so existiert genau ein Regulus R, der a,g und h enthält, und $\langle g,h\rangle := R \setminus \{a\}$. Wenn g und h einen Schnittpunkt S haben, dann legen sie genau ein Geradenbüschel $G[S, g\vee h]$ fest, und $\langle g,h\rangle := G[S,g\vee h] \setminus ST$ mit $T := a \cap (g \vee h)$. (Die Bezeichnungsweise folgt [2] und [3].)

1.2. Lassen wir in 1.1 auch projektive Räume P zu, in denen der Satz von Pappos nicht gilt, so kann die Konstruktion eines affinen Raumes für $1 \le k \le n-2$ mit den Ansätzen aus [12] und [10]

[1] In [12] wird weiters vorausgesetzt, daß der Grundkörper K von P mindestens drei Elemente besitzt.

nicht übertragen werden, da dort der Satz von Pappos - oder eine dazu äquivalente Aussage - wesentlich eingeht.

In dieser Note wird gezeigt, wie man für kommutativen oder nicht kommutativen Grundkörper K im Falle n=3, k=1 aus der Menge der zu einer Geraden a windschiefen Geraden vierdimensionale affine Räume erhalten kann, deren Grundkörper zu K isomorph bzw. antiisomorph sind. Die affinen Geraden gewinnen wir dabei aus Geradenbüscheln, Reguli und - für einen echten Schiefkörper K - aus entarteten Kegelschnitten in Geradenfeldern oder Geradenbündeln.

Eine Verallgemeinerung auf beliebige Dimensionszahlen n,k ist möglich und wird kurz angedeutet. Allerdings dürften die dabei als "affine Geraden" auftretenden Mengen von k-Räumen bisher in der Literatur - von wenigen Ausnahmen abgesehen - nur für Pappos-Räume untersucht worden sein, wo sich die Ergebnisse aus [12] wiederfinden.

1.3. Im folgenden ist $\mathcal{P}$ ein 3-dimensionaler projektiver Raum mit nicht notwendig kommutativem Grundkörper K.

Sind l_o, l_1, l_2 drei paarweise windschiefe Geraden, so ist die Menge aller Geraden, die l_o, l_1, l_2 in je einem Punkt treffen, ein Regulus $\mathcal{R}$. Eine Gerade, die jede Regulusgerade in je einem Punkt schneidet, wird Leitgerade des Regulus genannt. Setzen wir $L_i := e \cap l_i$ für eine Gerade $e \in \mathcal{R}$, so liegen genau jene Punkte $L \in e$ in einer Leitgeraden von $\mathcal{R}$, für die das Doppelverhältnis $DV(L, L_2, L_1, L_o)$ dem Zentrum Z von K angehört oder gleich ∞ ist [14,321],[11]. Durch drei seiner Geraden ist ein Regulus genau für K=Z bestimmt, da dann j e d e Treffgerade von drei Regulusgeraden eine Leitgerade ist (Satz von Dandelin [12,339]). Hingegen legen drei verschiedene Leitgeraden - per definitionem - genau einen Regulus fest; für $K \neq Z$ schneiden alle Leitgeraden aus jeder Regulusgeraden die Punkte einer Z-Kette [1,326] aus. Dual bilden die Verbindungsebenen einer Regulusgeraden mit allen Leitgeraden eine Z-Kette im Büschel der Ebenen durch diese Regulusgerade.

1.4. Sei $\mathcal{E}$ eine Ebene von $\mathcal{P}$. Vorgegeben seien in $\mathcal{E}$ zwei verschiedene Geradenbüschel $\mathcal{G}[P,\mathcal{E}]$, $\mathcal{G}[Q,\mathcal{E}]$ und eine Projektivität Ψ des ersten auf das zweite Geradenbüschel. Unter dem Erzeugnis von Ψ versteht man die Menge aller Punkte von $\mathcal{E}$, die im Schnitt zweier Geraden x,x^{Ψ} mit $x\in G[P,E]$ liegen.

Gelte weiters $(PQ)^{\Psi}=PQ$. Ist K kommutativ, so ist Ψ eine Perspektivität. Im Fall $K\neq Z$ muß Ψ keine Perspektivität sein. Falls keine Perspektivität Ψ vorliegt, dann ist das Erzeugnis ein entarteter Kegelschnitt Γ. Die Punkte P und Q sind Grundpunkte des Kegelschnitts [13], [8,62]. (In [14,325] werden diese entarteten Kegelschnitte "C-Konfigurationen" genannt und als ebene Schnitte eines Regulus gewonnen). Der durch Ψ erzeugte entartete Kegelschnitt Γ kann auch durch andere Projektivitäten $G[P,E]\to G[Q',E]$ erzeugt werden. Alle diese Punkte Q' bilden gemeinsam mit P eine Grundkette von Γ; diese ist eine Z-Kette der Geraden PQ. Für je zwei Punkte $\tilde{P}\neq\tilde{Q}$ dieser Grundkette existiert genau eine Projektivität $G[\tilde{P},E]\to G[\tilde{Q},E]$, welche Γ erzeugt. Vgl. dazu [8,69] (fundamental chains). Gibt man umgekehrt in E eine Z-Kette k_Z durch drei verschiedene kollineare Punkte P,Q,E vor und sind ferner G und H zwei weitere Punkte, deren Verbindungsgerade die Gerade PQ in einem der Kette k_Z nicht angehörigen Punkt schneidet, so gibt es genau einen entarteten Kegelschnitt Γ durch G,H mit k_Z als Grundkette: Nach [8,62-64] besitzt jeder entartete Kegelschnitt Γ zu dieser Angabe eine erzeugende Projektivität $\Psi:G[P,E]\to G[Q,E]$, die sich als Einschränkung des Produkts $\gamma_0\gamma_1=\gamma_1\gamma_0$ zweier perspektiver Kollineationen γ_0,γ_1 von E darstellen läßt. Dabei ist γ_1 involutorisch, führt P in Q über und hat eine Achse, welche einen beliebigen Punkt aus $k_Z\setminus\{P,Q\}$, also etwa E, mit einem beliebigen Punkt aus $\Gamma\setminus PQ$, also etwa G, verbindet[2]. Die Kollineation γ_0 ist dann eine Homologie mit Zentrum G und Achse PQ. Durch die Forderung $H\in\Gamma$ ist γ_0 eindeutig festgelegt, sodaß höchstens ein entarteter Kegelschnitt zu dieser Angabe existiert. Umgekehrt rechnet man leicht nach (vgl.[8,62], daß $\gamma_0\gamma_1|G[P,E]$ tatsächlich den gesuchten entarteten Kegelschnitt erzeugt.

2. Konstruktion affiner 4-Räume

2.1. Unter den Voraussetzungen aus 1.3 seien a eine Gerade und E_0,E_1,E_2 drei verschiedene Ebenen durch a. Für $K\neq Z$ legen diese genau eine Z-Kette $E_Z[a]$ im Ebenenbüschel $E[a]$ fest; zur Vermeidung von Fallunterscheidungen sei $E_Z[a]:=E[a]$ im Fall K=Z. Wir ordnen je zwei verschiedenen zu a windschiefen Geraden g,h

[2] In der 5.Zeile von [8,63] wird diese Kollineationsachse falsch beschrieben.

eine Geradenmenge $<g,h>$ zu:

Fall 1: g windschief h. Es gibt nach 1.3 genau einen Regulus $\mathcal{R}$, der a,g,h enthält und in den Ebenen E_o, E_1, E_2 (und damit in jeder Ebene von $E_Z[a]$) eine Leitgerade besitzt. Wir setzen $<g,h>:=\mathcal{R}\setminus\{a\}$.

Fall 2: $g\cap h=S$ und $(S\vee a)\in E_Z[a]$. Hier sei $<g,h>$ das durch g,h bestimmte Geradenbüschel vermindert um die einzige zu a nicht windschiefe Gerade dieses Büschels.

Fall 3: $g\cap h=S$ und $(S\vee a)\notin E_Z[a]$. Nun gilt notwendig $K\neq Z$. Nach 1.4 ist in der zu $g\vee h$ dualen projektiven Ebene, also im Geradenfeld $G[g\vee h]$, genau ein entarteter Kegelschnitt Γ bestimmt, der g und h enthält und die Schnittgeraden der Ebenen von $E_Z[a]$ mit $g\vee h$ als Grundkette besitzt. Wir sprechen von einem *entarteten Geradenkegelschnitt*, da die Elemente von Γ Geraden sind. Die Menge der zu a windschiefen Geraden von Γ sei $<g,h>$.

Alle Elationen von P mit Achse durch a und Zentrum in a erzeugen eine Kollineationsgruppe T(a). Mit diesen Begriffen folgt der

SATZ. *Die Menge* $\mathbf{C}$ *der zu* a *windschiefen Geraden von* P *erhält die Struktur eines 4-dimensionalen affinen Raumes, wenn als "affine Geraden" die Mengen* $<g,h>$ *gewählt werden, und zwei "affine Geraden"* $<g_i,h_i>$ $(i=1,2)$ *genau dann parallel genannt werden, falls eine Kollineation* τ *aus der Gruppe* T(a) *existiert, welche* $<g_1,h_1>^\tau=<g_2,h_2>$ *leistet*[3].

Beweis. Wir zeichnen in P die Ebene E_o als Fernebene aus, fassen also P als projektiv abgeschlossenen affinen Raum auf. Dann existiert ein 3-dimensionaler K-Rechtsvektorraum **W** derart, daß der affine Raum A(**W**) zu $P\setminus E_o$ isomorph ist. Mit α bezeichnen wir eine (fest gewählte) Affinität $P\setminus E_o\to\mathbf{W}$.

Schneiden die Geraden einer Menge $<g,h>$ aus E_1, E_2 je mehr als einen Punkt aus, dann paßt die Abbildung

(1) $\qquad x\cap E_1 \mapsto x\cap E_2 \quad (x\in<g,h>)$

nach Konstruktion in eine fernpunkttreue Projektivität Ψ einer Geraden von E_1 auf eine Gerade von E_2.

Liegt $<g,h>$ in einem Regulus, dann hat dieser eine Leitgerade l_o in E_o. Unter Ψ zugeordnete Punkte liegen daher in zueinander

[3] Eine Zusammenfassung der verschiedenen Möglichkeiten, affine Räume axiomatisch zu definieren, enthält [6]. Wir greifen im folgenden auf Hilfsmittel der linearen Algebra zurück.

parallelen Ebenen oder in der Fernebene, sodaß eine teilverhältnistreue Projektivität Ψ vorliegt[4].

Bei einem Geradenbüschel, das $\langle g,h\rangle$ enthält, ist Ψ ebenfalls teilverhältnistreu; wegen $(S\vee a)\in E_Z[a]$ kann nämlich $\alpha^{-1}\Psi\alpha$ in $A(\mathbf{W})$ abgesehen von Translationen durch eine lineare Dilatation $\mathbf{x}(\in\mathbf{W}) \mapsto \mathbf{x}c$ $(c\in Z\setminus\{0\})$ induziert werden.

Wird schließlich $\langle g,h\rangle$ durch einen entarteten Geradenkegelschnitt Γ bestimmt, so ist Ψ eine Γ erzeugende Projektivität. Dual zum Vorgehen in 1.4 kann Ψ durch zwei perspektive Kollineationen gewonnen werden, wobei wir voraussetzen dürfen, daß dem Punkt E aus 1.4 nun die Ferngerade der Ebene $g\vee h$ entspricht. Es liegen daher jetzt die Zentren dieser perspektiven Kollineationen in der Fernebene; daraus liest man ab, daß Ψ Produkt von Parallelperspektivitäten und daher teilverhältnistreu ist.

Die Affinität α bildet $E_1\setminus E_o$ bzw. $E_2\setminus E_o$ auf zwei parallele Nebenklassen $\mathbf{e}_1+\mathbf{E}$ bzw. $\mathbf{e}_2+\mathbf{E}$ von $\mathbf{W}$ ab. Für $g,h\in\mathfrak{C}$ $(g\neq h)$ setzen wir $(g\cap E_i)^\alpha=\mathbf{e}_i+\mathbf{g}_i$ bzw. $(h\cap E_i)^\alpha=\mathbf{e}_i+\mathbf{h}_i$ $(i=1,2)$. Das α-Bild von $\langle g,h\rangle$ wird dann gemäß (1) durch die Punktepaare

(2) $\qquad (\mathbf{e}_1+\mathbf{g}_1(1-u)+\mathbf{h}_1u,\ \mathbf{e}_2+\mathbf{g}_2(1-u)+\mathbf{h}_2u)$ mit $u\in K$

beschrieben: Für $\mathbf{g}_1=\mathbf{h}_1$ oder $\mathbf{g}_2=\mathbf{h}_2$ ist das trivial, andernfalls lehrt dies die Teilverhältnistreue der Projektivität Ψ.

Wir erweitern $\mathbf{W}$ zu einem 4-dimensionalen K-Rechtsvektorraum $\mathbf{V}\supset\mathbf{W}$. Es seien $\mathbf{B}_1$ ein Komplement von $\mathbf{E}$, also $\mathbf{V}=\mathbf{B}_1\oplus\mathbf{E}$, und $f\in\mathrm{Hom}_K(\mathbf{E},\mathbf{B}_1)$ eine Bijektion. Dann ist der Untervektorraum

(3) $\qquad \mathbf{B}_2:=\{\mathbf{x}+\mathbf{x}^f \mid \mathbf{x}\in\mathbf{E}\}$

ein Komplement von $\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}_1$ in $\mathbf{V}$. Durch

(4) $\quad g(\in\mathfrak{C})\mapsto(g\cap E_1,g\cap E_2)\mapsto(\mathbf{e}_1+\mathbf{g}_1,\mathbf{e}_2+\mathbf{g}_2)\mapsto\mathbf{g}_2+(\mathbf{g}_2-\mathbf{g}_1)^f(\in\mathbf{V})$

wird $\mathfrak{C}$ bijektiv auf $\mathbf{V}$ abgebildet und die Mengen $\langle g,h\rangle$ genau auf die Geraden von $A(\mathbf{V})$; vgl. auch [7,109]. Die α-transformierte Gruppe $T(a)$ ist genau die Translationsgruppe von $A(\mathbf{V})$.□

2.2. Schließen wir $A(\mathbf{V})$ projektiv ab, so legen die durch $\mathbf{B}_1,\mathbf{B}_2,\mathbf{E}_o$ festgelegten Ferngeraden genau einen Regulus R_∞ mit diesen Leitgeraden fest. Je nachdem eine affine Gerade $\langle g,h\rangle$ durch einen Regulus, ein Geradenbüschel oder einen entarteten Geradenkegelschnitt festgelegt wird, bestimmt ihr α-Bild einen Fernpunkt der

---

[4] Die teilverhältnistreuen Projektivitäten werden auch als affine Projektivitäten bezeichnet und sind die in [5] betrachteten "Deformationen"; für sie gilt der dort formulierte "Fundamentalsatz der affinen Geometrie".

keiner Geraden, bzw. einer Leitgeraden bzw. einer Geraden, aber keiner Leitgeraden des Regulus R_∞ angehört. In ähnlicher Weise lassen sich auch die Ebenen und Hyperebenen des affinen Raumes $\mathbf{C}$ einteilen. Wir wollen das hier nicht näher diskutieren[5].

3. Verallgemeinerung

3.1. Gehen wir nun von einem n-dimensionalen desarguesschen projektiven Raum P $(2\le n<\infty)$ und einem $(n-k-1)$-dimensionalen Unterraum A aus $(0\le k\le n-1)$. Durch A legen wir $k+1$ $(n-k)$-dimensionale Unterräume $E_1,\dots,E_{k+1}$ und eine Hyperebene H derart, daß diese eine Fundamentalfigur des Quotientenraumes P/A bilden. Analog 2.1 gibt es eine Affinität α von $P\setminus H$ auf einen affinen Raum $A(\mathbf{W})$ über einem n-dimensionalen K-Rechtsvektorraum $\mathbf{W}$. Die α-Bilder der affinen Unterräume $E_i\setminus H$ sind zueinander parallele Nebenklassen der Form $\mathbf{e}_i+\mathbf{E}$ von $\mathbf{W}$; die Punkte $\mathbf{e}_i$ von $A(\mathbf{W})$ sind affin unabhängig $(i=1,\dots,k+1)$.

Nun betten wir $\mathbf{W}$ in einen $(n-k).(k+1)$-dimensionalen K-Rechtsvektorraum $\mathbf{V}$ ein, den wir als direkte Summe

$$\mathbf{V} = \mathbf{E}\oplus\mathbf{B}_1\oplus\dots\oplus\mathbf{B}_k$$

mit durchwegs $(n-k)$-dimensionalen Untervektorräumen ansetzen können. Weiters seien Bijektionen $f_i\in\mathrm{Hom}_K(\mathbf{E},\mathbf{B}_i)$ gegeben. Dann ist

$$\mathbf{B}_{k+1} := \{\mathbf{x}+\mathbf{x}^{f_1}+\dots+\mathbf{x}^{f_k} \mid \mathbf{x}\in\mathbf{E}\}$$

ein $(n-k)$-dimensionaler Untervektorraum von $\mathbf{V}$. Für $j=1,\dots,k+1$ sei

$$\mathbf{A}_j := (\oplus\mathbf{B}_i \mid j\neq i\in\{1,\dots,k+1\}),$$

womit $\mathbf{V}=\mathbf{E}\oplus\mathbf{A}_j$ folgt. Mittels der Projektionen p_j von $\mathbf{V}$ auf $\mathbf{E}$ in Richtung $\mathbf{A}_j$ können wir gemäß

$$(5)\qquad \mathbf{x}\mapsto(\mathbf{x}^{p_1}+\mathbf{e}_1,\mathbf{x}^{p_2}+\mathbf{e}_2,\dots,\mathbf{x}^{p_{k+1}}+\mathbf{e}_{k+1})$$

jedem Punkt von $A(\mathbf{V})$ $k+1$ affin unabhängige Punkte von $A(\mathbf{W})$ zuordnen. Das α^{-1}-Bild des Verbindungsraumes dieser Punkte bestimmt einen Unterraum von P, welcher zu A bzgl. P komplementär ist. Wir bekommen so eine Bijektion von $\mathbf{V}$ auf die Menge $\mathbf{C}$ der zu A komplementären Unterräume, sodaß $\mathbf{C}$ die Struktur eines zu $A(\mathbf{V})$ isomorphen affinen Raumes erhält.

---
[5] Die in [9] betrachteten linearen Geradenkomplexe führen auf zwei Typen von Hyperebenen von $\mathbf{C}$; daneben gibt es für $K\neq Z$ noch weitere Typen.

3.2. Die bisherigen Ergebnisse lassen sich dualisieren. Dann erhält man Modelle affiner Räume, deren Grundkörper zu K antiisomorph sind. Es ist also - auch für k=0 und k=n-1 - in mannigfacher Weise möglich, die Menge $\mathfrak{C}$ der Komplemente eines Unterraumes A mit einer affinen Struktur zu versehen, je nachdem von welcher Fundamentalfigur im Quotientenraum P/A bzw. (dual) von welcher Fundamentalfigur im Unterraum A man ausgeht. Genau für einen kommutativen Grundkörper K erhält man in jedem Fall denselben affinen Raum.

LITERATUR

[1] Benz, W.: Vorlesungen über Geometrie der Algebren, Grundlehren Bd.197, Berlin-Heidelberg-New York, Springer, 1973.

[2] Brauner, H.: Geometrie projektiver Räume I, Mannheim-Wien-Zürich, BI-Wissenschaftsverlag, 1976.

[3] Brauner, H.: Geometrie projektiver Räume II, Mannheim-Wien-Zürich, BI-Wissenschaftsverlag, 1976.

[4] Burau, W.: Mehrdimensionale projektive und höhere Geometrie, Berlin, VEB Dt.Verlag d.Wissenschaften, 1961.

[5] Fritsch, R.: Einbettung affiner Räume, Math.Phys.Sem.Ber.22, 146-157 (1975).

[6] Fritsch, R.: Bemerkungen zur Axiomatik affiner Räume, Mitt. Math.Sem.Gießen 132, 23-28 (1978).

[7] Havlicek, H.: Die linearen Geradenabbildungen aus dreidimensionalen projektiven Pappos-Räumen, Sb.Österr.Akad.d. Wissensch., math.-naturw.Kl., Abt.II 192, 99-111 (1983).

[8] Havlicek, H.: Applications of Results on Generalized Polynomial Identities in Desarguesian Projective Spaces, in: R.Kaya, P.Plaumann, K.Strambach (eds.): Rings and Geometry, Dordrecht, D.Reidel, 1985.

[9] Havlicek, H.: Lineare Geradenkomplexe über Schiefkörpern (eingereicht bei Arch.Math.).

[10] Herzer, A.: Hom(U,V) und affine Graßmann-Geometrie, Mitt. Math.Sem.Gießen 164 (Coxeter-Festschrift), 199-215 (1984).

[11] Krüger, W.: Regelscharen und Regelflächen in dreidimensionalen desarguesschen Räumen, Math.Z.93, 404-415 (1966).

[12] Metz, R.: Der affine Raum verallgemeinerter Reguli, Geom. Dedicata 10, 337-367 (1981).

[13] Riesinger, R.: Entartete Steinerkegelschnitte in nichtpapposschen Desarguesebenen, Monatsh.Math.89, 243-251 (1980).

[14] Segre, B.: Lectures on Modern Geometry, Roma, Ed.Cremonese, 1962.

Hans Havlicek
Institut für Geometrie
Technische Universität
Wiedner Hauptstraße 8-10
A-1040 Wien - Österreich