HANS HAVLICEK

DIE AUTOMORPHEN KOLLINEATIONEN NICHT ENTARTETER NORMKURVEN

1. EINLEITUNG

1.1. Eine nicht entartete Normkurve[1] Γ eines n-dimensionalen projektiven Desargues-Raumes $\Pi=(P,G)$ ist das Erzeugnis eines nicht entarteten projektiven Bündelisomorphismus φ [8,S.429], der in jedem Punkt von Γ Schmiegunterräume besitzt. Diese Begriffsbildung führt auf das vollständige Erzeugnis $\Gamma^{(n-1)}$ der Abbildung φ [4,2.6]. Die Gruppe $G^{(n-1)}$ aller automorphen Kollineationen von $\Gamma^{(n-1)}$ ist trivialerweise eine Untergruppe der Gruppe G aller automorphen Kollineationen von Γ. Die Gruppe $G^{(n-1)}$ wird in [4,3.3] vollständig bestimmt und außerdem gezeigt, daß $G^{(n-1)}\neq G$ und $G^{(n-1)}=G$ möglich ist; letzteres gilt insbesondere für n=2 [4,3.5]. Wie man aus den Überlegungen zu Satz 8 in [8] entnehmen kann, gehört eine Kollineation aus G dann zu $G^{(n-1)}$, wenn sie die Schmiegunterräume von φ in mindestens einem regulären Punkt von Γ auf die Schmiegunterräume von φ im Bildpunkt abbildet und ein Algebraisierungskörper von Π ein Schiefkörper unendlichen Grades über seinem Zentrum ist.

In dieser Note wird bewiesen, daß für $n\geq 3$ genau dann $G^{(n-1)}\neq G$ gilt, wenn die Normkurve Γ höchstens n+2 Punkte, ein Algebraisierungskörper von Π also höchstens n+1 Elemente besitzt.[2]

1.2. Wir setzen einen n-dimensionalen projektiven Raum $\Pi(V,K)$ über einem (n+1)-dimensionalen Rechtsvektorraum (V,K) mit Skalarkörper K voraus ($2\leq n<\infty$) und bezeichnen mit Z(K) das Zentrum von K. Jeder Algebraisierungskörper von $\Pi(V,K)$ ist zu K isomorph.

Die folgenden Überlegungen werden zur Festlegung eines projektiven Bündelisomorphismus benötigt: Sei $\varrho=\varrho_1\dots\varrho_l\in PGL(\Pi)$ Produkt von perspektiven Kollineationen ϱ_i (i=1,...,l), deren Achsen einen festen Punkt E=eK enthalten. Jeder Automorphismus $f\in GL(V)$, der ϱ beschreibt, besitzt dann e als Eigenvektor zu einem Eigen-

[1] Wir betrachten ausschließlich nicht entartete Normkurven und bezeichnen diese kurz als Normkurven. Alle weiteren Begriffsbildungen und Notationen folgen [1],[2],[4]. Insbesondere ist ein Körper nicht notwendig kommutativ und ein Schiefkörper nicht kommutativ.

[2] Beschränkt man sich auf projektive Pappos-Räume, so ist das trivial [4, Fußnote 4].

wert aus dem Zentrum von K. Ist andererseits $f \in GL(V)$ vorgegeben und e Eigenvektor von f zu einem zentralen Eigenwert, so zeigt folgende Verallgemeinerung der Ergebnisse aus [10], daß die durch f induzierte projektive Kollineation ϱ Produkt von höchstens n perspektiven Kollineationen mit Achsen durch E ist: Nach Identifizierung des Bidualraumes V^{**} von V mit dem Vektorraum V legt $\mathrm{Ker}\, e \subset V^*$ eine Hyperebene des dualen projektiven Raumes $\Pi(V)^* = \Pi(V^*)$ fest und bestimmt einen affinen Ausschnitt von Π^*. Dieser ist (bis auf Translationen) zum affinen Raum über dem Linksvektorraum Ker e kanonisch isomorph. Da der Eigenwert zu e in Z(K) liegt, ist die von f in diesem affinen Raum induzierte Affinität teilverhältnistreu und kann vom Schiebanteil abgesehen durch einen linearen Automorphismus von Ker e beschrieben werden. Setzt man in [10] diese Linearität voraus, so folgt auch bei nicht kommutativem Körper K die gewünschte Faktorisierung.

Alle projektiven Kollineationen, welche die angegebene perspektive Erzeugung gestatten, bilden eine Gruppe, welche scharf transitiv auf der Menge jener geordneten Basen von Π operiert, die gemeinsam mit E eine Fundamentalmenge bilden. Das kann durch Rechnung[3] oder mit [10] gezeigt werden.

2. KONJUGIERTE PUNKTE

2.1. Nach [4] gelten folgende Aussagen: Ein nicht entarteter projektiver Bündelisomorphismus

$$\varphi : u\Pi/P_0 \to u\Pi/P_n$$

des Bündels um einen Punkt P_0 auf das Bündel um einen Punkt $P_n \neq P_0$ ist stets ein durch eine geordnete Fundamentalmenge

$$F = \{P_0, \ldots, P_n, E\}$$

von Π festgelegter Normisomorphismus. Es gibt dann eine geordnete Basis

$$B = \{p_0, \ldots, p_n\}$$

von V so, daß $P_j = p_j K$ $(j=0,\ldots,n)$ und $E = eK$ mit[4] $e = \sum_j p_j$ gilt. Die Abbildung $g \in GL(V)$ mit $p_0 g = p_n$, $p_j g = p_{j-1}$ $(j=1,\ldots,n)$ beschreibt den Normisomorphismus φ vermöge

$$(p_0 K \vee xK)\varphi = p_n K \vee (xg)K$$

für alle $x \in V \setminus p_0 K$, und die von φ erzeugte Normkurve Γ besitzt die

---

[3] Vgl. [2,S.28]

[4] Wenn nicht anders angegeben wird von 0 bis n summiert.

Darstellung

$$\Gamma = \{x_t K \mid x_t = \sum_j p_j t^j,\ t \in K\} \cup \{p_n K\},$$

wobei der Parameterwert t des Punktes $x_t K$ durch die Fundamentalmenge F nur bis auf innere Automorphismen von K bestimmt ist.

2.2. Sei M_1 eine Sehne von φ [4,2.3], welche durch einen Unterraum $U_1 \subset V$ beschrieben wird, und $\dim \Pi(M_1) \geq 1$ mit P_0, $P_n \not\subset M_1$. Die durch den Normisomorphismus φ in $\Pi(M_1)$ induzierte projektive Kollineation[5] $\varkappa_1 \in PGL(\Pi(M_1))$ leistet

$$X\varkappa_1 = (X \vee P_0)\varphi \cap M_1$$

für alle Punkte $X \subset M_1$ und wird durch die Abbildung $gp_1 =: g_1 \in GL(U_1)$ beschrieben, wobei $p_1 : U_1 \oplus p_n K \to U_1$ die Projektion auf U_1 in Richtung $p_n K$ bezeichnet. Die Fixpunkte der Kollineation $\varkappa_1$ sind genau die in M_1 enthaltenen Normkurvenpunkte $x_t K$ und x_t ist wegen

$$x_t g p_1 = (\sum_j p_j t^j) g p_1 = (\sum_{j=0}^{n-1} p_j t^{j+1} + p_n) p_1 = x_t t$$

Eigenvektor von g_1 zum Eigenwert t. Vgl. [9].

2.3. Zwei Normkurvenpunkte U, $V \in \Gamma$ heißen konjugiert, falls U=V gilt oder in der Geraden UV mindestens drei verschiedene Punkte von Γ liegen. Jeder reguläre Punkt von Γ ist nur zu sich selbst konjugiert [4,2.8].

Sind $U = x_u K$ und $V = x_v K$ zwei verschiedene nicht reguläre Punkte von Γ, so gilt u, $v \in K \setminus Z(K)$. Die Gerade UV ist Sehne von φ und enthält P_0, P_n nicht. Nach 2.2 besitzt die von φ in UV induzierte Projektivität genau dann einen von U und V verschiedenen Fixpunkt $W = (x_u + x_v w)K$ $(w \in K \setminus \{0\})$, wenn $x_u + x_v w$, $x_u u + x_v v w$ linear abhängig sind, also $wu = vw$ bzw.

$$u = w^{-1} v w \tag{1}$$

erfüllt ist. Gilt (1), so ergibt $\{(x_u + x_v ws)K\} \cup \{x_v K\}$ für s im Zentralisator von u die stets unendliche Fixpunktmenge von $\varkappa_1$. Vgl. dazu [5], [7,S.409], [11,S.334].

Jene linearen Vektorraumautomorphismen, welche

$$p_j \mapsto p_j c \quad (j=0,\dots,n)$$

mit $c \in K \setminus \{0\}$ leisten, beschreiben genau die Abbildungen der

[5] Wir zählen die Projektivitäten einer Geraden zu den projektiven Kollineationen.

Gruppe $F \subset PGL(\Pi)$ aller projektiven Kollineationen, welche die Fundamentalmenge F punktweise fest lassen. Die Bahn eines Punktes $(\sum_j p_j y_j)K$ unter F ist die Punktmenge

$$\{(\sum_j p_j c y_j)K \mid c \in K\setminus\{0\}\}$$

und genau dann einpunktig, wenn $y_j = z_j y$ mit $z_j \in Z(K)$ und $y \in K\setminus\{0\}$ gilt. Ein Punkt mit einpunktiger Bahn heißt zentral bezüglich F. Jeder Verbindungsraum zentraler Punkte und der leere Unterraum (zentrale Unterräume) sind unter F stabil. Umgekehrt ist auch jeder stabile Unterraum zentral, wie ein Induktionsbeweis nach der Unterraumdimension leicht zeigt.

Die zu einem Normkurvenpunkt $x_t K$ konjugierten Punkte bilden nach (1) genau die Bahn von $x_t K$ unter F und spannen einen Unterraum K_t auf.

SATZ 1. Ist $t \in K$ über $Z(K)$ algebraisch vom Grad m bzw. transzendent, so gilt $\dim\Pi(K_t) = \min\{m-1, n\}$ bzw. $\dim\Pi(K_t) = n$.

Beweis. (1) Eine zentrale Hyperebene H kann mittels der zu B dualen Basis $B^* = \{p_0^*, \ldots, p_n^*\}$ als Kern einer nichttrivialen Linearform $\sum_j h_j p_j^*$ mit $h_j \in Z(K)$ dargestellt werden. Ein Punkt $x_t K$ liegt genau dann in H, wenn t eine Nullstelle des Polynoms

$$h_n x^n + h_{n-1} x^{n-1} + \ldots + h_0 \quad (\neq 0)$$

in der Unbestimmten x ist. Setzen wir t als transzendent oder algebraisch vom Grad $m > n$ voraus, so ist $x_t K$ und damit der zentrale Unterraum K_t in keiner zentralen Hyperebene enthalten, also $\dim\Pi(K_t) = n$.

(2) Sei t algebraisch vom Grad $m \leq n$ und

$$h_m x^m + h_{m-1} x^{m-1} + \ldots + h_0 \quad (h_m = 1)$$

das Minimalpolynom von t mit Koeffizienten aus $Z(K)$. Die geometrische Bedeutung des Minimalpolynoms liegt darin, daß zwar eine zentrale Hyperebene H durch $P_n, P_{n-1}, \ldots, P_{m+1}, x_t K$, aber keine zentrale Hyperebene durch $P_n, P_{n-1}, \ldots, P_m, x_t K$ existiert. Mit $x_t K$ ist dann auch K_t in H enthalten und Gleiches gilt für alle Hyperebenen

$$\mathrm{Ker}(\sum_{j=0}^{m} h_j p_{j+i}^*) \quad (i = 0, \ldots, n-m),$$

was $\dim\Pi(K_t) \leq m-1$ ergibt. Aus $\dim\Pi(K_t) < m-1$ folgt jedoch die Existenz einer zentralen Hyperebene durch $P_n, \ldots, P_m, K_t$, also ein Widerspruch. □

SATZ 2. Sei M_1 ein k-dimensionaler Unterraum von Π ($1 \leq k \leq n-1$) mit einer Basis $\{Q_0,\dots,Q_k\} \subset \Gamma$. Die Basispunkte sind genau dann paarweise konjugiert, wenn ein Punkt $Q_{k+1} \in \Gamma \cap M_1$ so existiert, daß $\{Q_0,\dots,Q_k,Q_{k+1}\}$ eine Fundamentalmenge von $\Pi(M_1)$ ist[6].

Beweis. (1) Enthält M_1 den Punkt P_0 bzw. P_n, so liegen alle weiteren Normkurvenpunkte von M_1 notwendig im höchstens (k-1)-dimensionalen Unterraum $M_1 \cap M_1\varphi$ bzw. $M_1 \cap M_1\varphi^{-1}$. Dann ist aber der reguläre Normkurvenpunkt P_0 bzw. P_n notwendig ein Basispunkt und keine der beiden Aussagen des Kriteriums gilt in $\Pi(M_1)$.

(2) Liegt weder P_0 noch P_n in M_1, so induziert der Normisomorphismus φ in M_1 nach 2.2 eine projektive Kollineation $\varkappa_1$. Da das Kriterium für k=1 gilt, können wir Induktion nach k verwenden.

Bei paarweise konjugierten Punkten $Q_0,\dots,Q_k$ folgt aus der Induktionsannahme die Existenz einer Fundamentalmenge $\{Q_0,\dots, Q_{k-1},Q'_k\}$ von $\Pi(Q_0 \vee \dots \vee Q_{k-1})$. Dann sind aber auch Q_k und Q'_k konjugiert, und ihre Verbindungsgerade trägt den gesuchten Normkurvenpunkt Q_{k+1}.

Ist andererseits eine Fundamentalmenge $\{Q_0,\dots,Q_k,Q_{k+1}\}$ vorgegeben, so ist $Q'_k := Q_kQ_{k+1} \cap (Q_0 \vee \dots \vee Q_{k-1})$ Fixpunkt von $\varkappa_1$, also ein Punkt von Γ. Da Q_{k+1}, Q_k, Q'_k verschieden und kollinear sind, ergibt die Induktionsannahme die paarweise Konjugiertheit der Punkte $Q_0,\dots,Q_k$.$\square$

3. AUTOMORPHE KOLLINEATIONEN

3.1. Eine automorphe Kollineation $\sigma \in G$ der Normkurve Γ führt den Γ erzeugenden Normisomorphismus φ in den Normisomorphismus $\sigma^{-1}\varphi\sigma$ über, der ebenfalls Γ erzeugt. Es gibt eine automorphe Kollineation $\mu \in G^{(n-1)}$ des vollständigen Erzeugnisses $\Gamma^{(n-1)}$ von φ mit $P_0\sigma\mu = P_0$ und $P_n\sigma\mu = P_n$, da $G^{(n-1)}$ dreifach transitiv auf der Menge der regulären Punkte von Γ operiert. Die Kollineation σ gehört genau dann nicht zu $G^{(n-1)}$, wenn φ und $\mu^{-1}\sigma^{-1}\varphi\sigma\mu$ zwei verschiedene Normisomorphismen sind; wie in 1.1 angegeben gilt in einer projektiven Desargues-Ebene stets $G^{(n-1)} = G$.

SATZ 3. Ein von φ verschiedener Normisomorphismus

---

[6] In M_1 liegen daher nur Normkurvenpunkte aus höchstens k+1 Konjugiertenklassen, da jeder von $Q_0,\dots,Q_k$ verschiedene Punkt in M_1 mit einer Teilmenge dieser Basis eine Fundamentalmenge eines Unterraumes von $\Pi(M_1)$ bildet. Vgl. [3,S.206].

$$\varphi' : u\Pi/P_0 \to u\Pi/P_n$$

mit dem Erzeugnis Γ existiert für $n \geq 3$ genau dann, wenn $\Gamma \setminus \{P_0, P_n\}$ in einer Hyperebene enthalten ist.

Beweis. (1) Sei der von $\Gamma \setminus \{P_0, P_n\}$ aufgespannte Unterraum N in einer Hyperebene enthalten. Da N eine Basis aus Normkurvenpunkten besitzt, kann nach Satz 2 weder P_0 noch P_n in N liegen; es gibt also eine Hyperebene H, welche die Gerade P_0P_n in genau einem Punkt $Z \neq P_0, P_n$ schneidet. Die perspektive Kollineation σ mit Zentrum Z, Achse H und $P_0 \mapsto P_n$ läßt Γ fest und führt die Tangente (1-Schmiegunterraum) P_0P_1 von φ in P_0 in eine P_0P_1 schneidende Gerade durch P_n über. Wegen $n \geq 3$ ist diese Bildgerade nicht die Tangente P_nP_{n-1} von φ in P_n und daher $\sigma \notin G^{(n-1)}$, sodaß $G^{(n-1)} \neq G$ und die Existenz von $\varphi' \neq \varphi$ folgt.

(2) Ist $\Gamma \setminus \{P_0, P_n\}$ nicht in einer Hyperebene enthalten, so gibt es eine Basis $\{Q_0 = E, Q_1, \ldots, Q_n\} \subset \Gamma \setminus \{P_0, P_n\}$ von Π und $E \ni (\sum_j p_j)K$ ist regulärer Punkt von Γ. Nach Satz 2 gehören P_0 und P_n keiner Basishyperebene an. Wir setzen $M_1 := Q_0 \vee \ldots \vee Q_{n-1}$ und $Q_n' := P_0Q_n \cap M_1$ bzw. $Q_n'' := P_nQ_n \cap M_1$. Damit sind $\{Q_0, \ldots, Q_{n-1}, Q_n'\}$ und $\{Q_0, \ldots, Q_{n-1}, Q_n''\}$ Fundamentalmengen von $\Pi(M_1)$.

Je zwei Normisomorphismen $u\Pi/P_0 \to u\Pi/P_n$, die Γ erzeugen, induzieren dann in der Hyperebene M_1 projektive Kollineationen mit $Q_i \mapsto Q_i$ $(i=0,\ldots,n-1)$, $Q_n' \mapsto Q_n''$. Da $Q_0 = E$ ein regulärer Punkt von Γ ist, können beide projektiven Kollineationen nach 1.2 und 2.2 in ein Produkt perspektiver Kollineationen von $\Pi(M_1)$ mit Achsen durch Q_0 zerlegt werden und sind nach 1.2 identisch, was die Gleichheit der beiden Normisomorphismen und $G^{(n-1)} = G$ bewirkt. □

SATZ 4. Die Punktmenge $\Gamma \setminus \{P_0, P_n\}$ ist genau dann in einer Hyperebene enthalten, wenn der Skalarkörper K höchstens n+1 Elemente enthält.

Beweis. Hat das Zentrum Z(K) des Körpers K mindestens n+2 Elemente, so liegen in $\Gamma \setminus \{P_0, P_n\}$ mindestens n+1 reguläre Punkte, die nach Satz 2 den ganzen Raum aufspannen. Ist hingegen $|Z(K)| \leq n+1$ und K ein Schiefkörper, so existiert mindestens ein über Z(K) transzendentes Element t in K [7, S.410]. Die Menge der zu x_tK konjugierten Punkte ist in $\Gamma \setminus \{P_0, P_n\}$ enthalten und spannt nach Satz 1 den ganzen Raum auf.

Die Umkehrung ist trivial wegen $|\Gamma| = |K| + 1$. □

Zusammenfassend folgt die Gültigkeit des am Ende von 1.1 formulierten Kriteriums. Übrigens kann Satz 4 auch mit Hilfe von Ergebnissen über Polynomialidentitäten [3,S.162f] bewiesen werden. Aus der Existenz einer Hyperebene $\mathrm{Ker}(\sum_j h_j p_j^*)$, welche $\Gamma \setminus \{P_0, P_n\}$ enthält, erkennt man nämlich, daß das nichttriviale Polynom

$$h_n x^{n+1} + h_{n-1} x^n + \ldots + h_0 x$$

in K identisch verschwindet.

3.2. Sei $K=GF(q)$, $q \leq n+1$ und $n \geq 3$. Eine Normkurve ist dann nach Satz 2 entweder eine Fundamentalmenge von Π oder eine unabhängige Punktmenge. Es kann Kollineationen aus $G \setminus G^{(n-1)}$ geben, welche Γ sogar punktweise fest lassen. Jede solche Kollineation $\varkappa$ ist nicht die Identität. Ist Γ eine Fundamentalmenge, so ist $\varkappa$ notwendig nicht projektiv und die Existenz von $\varkappa$ ist äquivalent dazu, daß $GF(q)$ nichttriviale Automorphismen gestattet, also daß q keine Primzahl ist. Ist dagegen Γ eine unabhängige Punktmenge, so existieren stets sogar projektive Kollineationen mit der angegebenen Eigenschaft. Vgl. dazu auch die Einleitung von [4] und [6,S.154].

BIBLIOGRAPHIE

1. Brauner, H.: Geometrie projektiver Räume I, BI-Wissenschaftsverlag, Mannheim-Wien-Zürich, 1976.
2. Brauner, H.: Geometrie projektiver Räume II, BI-Wissenschaftsverlag, Mannheim-Wien-Zürich, 1976.
3. Cohn, P.M.: Skew Field Constructions, Cambridge U.P., Cambridge, 1977.
4. Havlicek, H.: 'Normisomorphismen und Normkurven endlichdimensionaler projektiver Desargues-Räume', Monatsh. Math, (erscheint 1983).
5. Herstein, I.N.: 'Conjugates in Division Rings', Proc.Am.Math. Soc. 7, 1021-1022 (1956).
6. Herzer, A.: 'Die Schmieghyperebenen an die Veronese-Mannigfaltigkeit bei beliebiger Charakteristik', J.Geometry 18, 140-154 (1982).
7. Krüger, W.: 'Regelscharen und Regelflächen in dreidimensionalen desarguesschen Räumen', Math.Z. 93, 404-415 (1966).
8. Riesinger, R.: 'Normkurven in endlichdimensionalen Desarguesräumen', Geom.Dedicata 10, 427-449 (1981).
9. Riesinger, R.: 'Geometrische Überlegungen zum rechten Eigenwert-Problem für Matrizen über Schiefkörpern', Geom.Dedicata 12, 401-405 (1982).
10. Schaal, H.: 'Zur perspektiven Zerlegung und Fixpunktskonstruktion der Affinitäten in $A^n(K)$', Arch.Math. 38, 116-123 (1982).
11. Segre, B.: Lectures on Modern Geometry, Ed.Cremonese, Roma, 1962.

Anschrift des Verfassers:
Hans Havlicek
Institut für Geometrie
Technische Universität
Gußhausstraße 27-29
A-1040 Wien
Österreich