

ERZEUGNISSE PROJEKTIVER BÜNDELISOMORPHISMEN

Hans Havlicek, TU Wien

Bericht Nr. 215

BERICHTE DER MATHEMATISCH-STATISTISCHEN SEKTION IM
FORSCHUNGSZENTRUM GRAZ

ERZEUGNISSE PROJEKTIVER BÜNDELISOMORPHISMEN*

Von Hans Havlicek, Wien

In diesem Bericht werden zunächst bekannte Ergebnisse über projektive Bündelisomorphismen und die von ihnen erzeugten Punktmengen sowie insbesondere Normisomorphismen und ihre Schmiegunterräume vorgestellt. Außerdem werden neben einigen Beispielen Sätze über die Gruppe der automorphen Kollineationen einer Normkurve und den Knoten eines Normisomorphismus angegeben.

1. EINLEITUNG

1.1 In einem n -dimensionalen reellen projektiven Raum Π ($2 \leq n < \infty$) gibt es im Sinne der projektiven Gruppe $PGL(\Pi)$ genau eine (rationale) Normkurve. Gilt $n=2$ bzw. $n=3$, so sind die Normkurven genau die Kegelschnitte bzw. die (windschiefen) Kubiken. Ein einfaches Beispiel einer Normkurve ist für gerade Dimension n die in der Einheitssphäre liegende Schraublinie

$$u \in (\mathbb{R}) \mapsto (\cos u, \sin u, \cos 2u, \sin 2u, \dots, \cos \frac{n}{2}u, \sin \frac{n}{2}u) \in (\mathbb{R}^n)$$

des euklidischen Raumes \mathbb{R}^n , wenn man diesen projektiv abschließt; das zeigt der Parameterwechsel $t = \tan \frac{u}{2}$.

Eine geometrische Erzeugung einer Normkurve geht vom Verband $u\Pi$ aller Unterräume von Π aus. Die Menge $u\Pi/P$ aller Unterräume durch einen Punkt P bildet das Bündel um P und ist isomorph zum Unterraumverband einer Hyperebene von Π . Wir betrachten die Bündel um zwei verschiedene Punkte P, Q und einen projektiven Bündelisomorphismus¹ $\zeta: u\Pi/P \rightarrow u\Pi/Q$, der keinen echten Unterraum von Π auf sich abbildet, also nicht entartet ist. Die Menge Γ aller Schnittpunkte unter ζ zugeordneter Geraden ist dann eine Normkurve durch P und Q .

Die Abbildung ζ kann auch dazu benützt werden, um im Punkt Q die Schmiegunterräume der Kurve Γ zu ermitteln. Setzt man Q als 0-Schmiegunterraum von Γ in Q fest, so erhält man den k -Schmiegunterraum $S_Q^{(k)}$ von Γ in Q als

$$S_Q^{(k)} = (S_Q^{(k-1)} \vee P) \zeta \quad (k=1, \dots, n-1). \quad (1)$$

Normkurven können auch mittels n projektiv bezogener Hyperebenenbüschel oder als Veronese-Varietäten erzeugt werden. Literatur: E. BERTINI [2; S. 318], W. BURAU [6; S. 166], W. K. CLIFFORD [7],

*Erweiterte Fassung eines beim 2. Österreichischen Geometrie-Kolloquium in Rein am 5. Mai 1983 gehaltenen Vortrages.

¹Es ist für $n > 2$ auch die Bezeichnung Bündelkollineation üblich; für $n=2$ ist ζ eine Projektivität.

C.SEGRE [31;S.894], G.VERONESE [36].

1.2 Sei nun allgemeiner $\Pi(P)$ ein projektiver Raum (vgl. [4]), dessen Dimension mindestens zwei, aber nicht notwendig endlich ist. Jeder projektive Bündelisomorphismus

$$\zeta: u\Pi/P \rightarrow u\Pi/Q$$

besitzt für $P \neq Q$ die Menge aller Punkte, die dem Durchschnitt je eines Paares unter ζ zugeordneter Geraden angehören, als sein *Erzeugnis* Γ . Wegen $P, Q \in \Gamma$ ist Γ nie leer. Der Durchschnitt aller unter ζ selbstzugeordneten Unterräume heißt der *Grundunterraum* von ζ und je nachdem dieser verschieden bzw. gleich P ist, wird ζ *entartet* bzw. *nicht entartet* genannt. Ist ζ insbesondere perspektiv, also eine *Perspektivität*, so besteht das Erzeugnis von ζ aus der Geraden PQ vereinigt mit einer zu P und Q komplementären Hyperebene (*Achse* von ζ). Andere Beispiele projektiver, nicht perspektiver Bündelisomorphismen unendlich-dimensionaler projektiver Räume treten in [13] auf; unter Umständen ist hier $\Gamma = \{P, Q\}$. Bei endlicher Dimension $n \geq 2$ wird das Erzeugnis eines entarteten bzw. nicht entarteten projektiven Bündelisomorphismus eine *entartete* bzw. *nicht entartete Normkurve* genannt, falls ζ keine Perspektivität ist. Für $n=2$ bzw. $n=3$ heißt eine Normkurve auch ein *Kegelschnitt* bzw. eine *Kubik*. Allerdings können ein entarteter und ein nicht entarteter projektiver Bündelisomorphismus dasselbe Erzeugnis besitzen: Etwa in einem projektiven Raum $\Pi = \Pi_{4,2}$ der Dimension $n=4$ und der Ordnung $q=2$ erzeugt ein nicht entarteter projektiver Bündelisomorphismus ein Dreieck; dieses ist auch das Erzeugnis eines entarteten projektiven Bündelisomorphismus, der die Ebene E des Dreiecks als Grundunterraum besitzt und keine Hyperebene durch E auf sich abbildet.

In projektiven Pappos-Räumen gehören die nicht entarteten Normkurven zu den Veronese-Varietäten.

Literatur: R.ARTZY [1], E.BERZ [3], H.BRAUNER [4;2.1;10.4], A.HERZER [16], W.KRÜGER [18],[19], T.G.OSTROM [22], R.RIESINGER [25],[26],[27], L.A.ROSATI [28],[29], B.SEGRE [30;S.306], H.TIMMERMANN [35], J.ZEUGE [37], sowie [12],[13],[14].

Die Erzeugnisse projektiver Bündelisomorphismen treten als Menge der Koinzidenzpunkte gewisser linearer Zweibildersysteme auf. Siehe [5],[21],[23],[24].

2. SCHMIEGUNTERRÄUME NICHT ENTARTETER PROJEKTIVER
BÜNDELISOMORPHISMEN

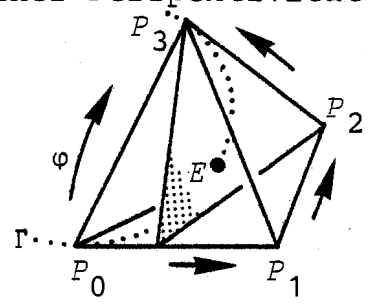
2.1 Wir betrachten im folgenden nicht entartete (n.e.) projektive Bündelisomorphismen eines n -dimensionalen projektiven Desargues-Raumes $\Pi(P)$ ($2 \leq n < \infty$) und die von ihnen erzeugten n.e. Normkurven, die wie in 1.1 als *Normkurven* bezeichnet werden.

Ein projektiver Bündelisomorphismus $\zeta: u\Pi/P \rightarrow u\Pi/Q$ ($P \neq Q$) ist genau dann nicht entartet, wenn die von ζ in einer zu P und Q komplementären Hyperebene H induzierte projektive Kollineation² $X \in H \mapsto (X \vee P)\zeta \cap H$ keinen von H verschiedenen Fixunterraum durch $J := (P \vee Q) \cap H$ besitzt. Da es mindestens eine projektive Kollineation σ von $\Pi(H)$ mit $J \vee J \sigma \vee \dots \vee J \sigma^{n-1} = H$ gibt, existieren stets n.e. projektive Bündelisomorphismen.

Geben wir eine geordnete Fundamentalmenge

$$F = \{P_0, \dots, P_n, E\}$$

von Π vor, so ist $P_2 \vee \dots \vee P_n \vee E$ Achse genau einer Perspektivität $u\Pi/P_0 \rightarrow u\Pi/P_1$. In gleicher Weise werden Perspektivitäten $u\Pi/P_1 \rightarrow u\Pi/P_2, \dots, u\Pi/P_{n-1} \rightarrow u\Pi/P_n$ erklärt. (Die Figur zeigt den Fall $n=3$.) Das Produkt dieser Perspektivitäten ist dann ein projektiver Bündelisomorphismus



$$\varphi: u\Pi/P_0 \rightarrow u\Pi/P_n,$$

welcher der durch F bestimmte *Normisomorphismus* heißt. In [19] ($n=2$) und [12; Satz 1] ($n \geq 2$) wird gezeigt, daß jeder n.e. projektive Bündelisomorphismus ein Normisomorphismus ist. Das Erzeugnis von φ ist eine Normkurve Γ , die P_0, P_n und E enthält. Da die projektive Gruppe $PGL(\Pi)$ transitiv auf der Menge der geordneten Fundamentalmengen operiert, gibt es im Sinne dieser Gruppe genau einen Normisomorphismus und genau eine Normkurve³.

Im projektiven Raum $\Pi(V, K)$ über einem $(n+1)$ -dimensionalen Rechtsvektorraum V mit Skalarkörper K kann die geordnete Fundamentalmenge F durch eine geordnete Basis $B = \{p_0, \dots, p_n\}$ von V festgelegt werden durch

$$P_0 = p_0 K, \dots, P_n = p_n K, E = e K \text{ mit } e = \sum_{j=0}^n p_j.$$

Der durch F bestimmte Normisomorphismus φ erzeugt nach [12; Satz 3] die Normkurve

²Für $n=2$ ist H eine Gerade und ζ induziert eine Projektivität.

³In einer projektiven Moufang-Ebene Π gibt es im Sinne ihrer Kollineationsgruppe $PFL(\Pi)$ genau einen Normisomorphismus und je zwei durch Normisomorphismen erzeugte Kegelschnitte sind kollinear-äquivalent [19].

$$\Gamma = \{x_t K \mid x_t = \sum_{j=0}^n p_j t^j, t \in K\} \cup \{p_n K\}, \quad (2)$$

und φ wird durch jenen linearen Vektorraumisomorphismus $g \in GL(V)$ induziert, welcher $p_0 \mapsto p_n, p_j \mapsto p_{j-1}$ ($j=1, \dots, n$) leistet; dabei gilt

$$(p_0 K \vee x K) \varphi = p_n K \vee (x g) K \quad (3)$$

für alle $x \in V \setminus p_0 K$.

Ein *regulärer Punkt* der Normkurve Γ ist dadurch gekennzeichnet, daß jede Gerade durch ihn höchstens einen weiteren Punkt von Γ enthält. Die Punkte P_0, P_n, E sind reguläre Normkurvenpunkte. Durch jeden nicht regulären Punkt geht also mindestens eine Gerade, die mehr als zwei Punkte mit Γ gemeinsam hat; jede solche Gerade trägt dann sogar unendlich viele Normkurvenpunkte. Genau nicht reguläre Punkte von Γ haben in (2) einen Parameterwert, der dem Zentrum von K nicht angehört. Die in [14;2.3], [26;S.434], [30;S.334] angegebenen Beweise dieser Ergebnisse benützen algebraische Sätze [10] bzw. [15]. Vgl. auch [12;2.8].

Die gegenseitige Lage der Punkte von Γ wird in [14] erörtert. Speziell in einem n -dimensionalen projektiven Pappos-Raum $\Pi = \Pi_{n,q}$ der Ordnung q , hat Γ genau $q+1$ Punkte, und je m dieser Punkte ($1 \leq m \leq \min\{n+1, q+1\}$) sind unabhängig. Diese Eigenschaften können zur Kennzeichnung von Normkurven verwendet werden. Siehe [17; S.168], [30;S.270], [32], [33], [34]. Vgl. auch [8;S.151], [21] für andere Kennzeichnungen von Kegelschnitten.

2.2 Es läge nahe, die analog (1) erklärten Unterräume als Schmiegunterräume der Normkurve Γ im Punkt P_n zu bezeichnen. In [14] wird jedoch gezeigt, daß diese Unterräume nur für $n=2$ sowie $n \geq 3$ und $|\Gamma| \geq n+3$ durch die Normkurve Γ alleine festgelegt werden, also von der Auswahl des erzeugenden Normisomorphismus unabhängig sind.

Als Beispiel mag ein Normisomorphismus φ zur geordneten Fundamentalmenge $\{P_0, \dots, P_3, E\}$ eines dreidimensionalen endlichen projektiven Raumes der Ordnung $q=3$ dienen. Hier ist Γ ein Tetraeder $\{P_0, P_3, E, E_1\}$. Die harmonische Homologie κ mit Zentrum P_0 und Achse $P_3 \vee E \vee E_1$ läßt Γ punktweise fest, sodaß auch $\kappa^{-1} \varphi \kappa: u\Pi/P_0 \rightarrow u\Pi/P_3$ die Normkurve Γ erzeugt. Benützen wir einerseits κ und andererseits $\kappa^{-1} \varphi \kappa$ zur Konstruktion des "1-Schmiegunter- raumes" ("Tangente") im Punkt P_3 , so erhalten wir die Geraden $(P_0 P_3) \varphi$ bzw. $(P_0 P_3) \varphi \kappa$. Aus $P_0 P_3 \notin P_0 \vee E \vee E_1$ folgt jedoch $(P_0 P_3) \varphi \notin (P_0 \vee E \vee E_1) \varphi = P_3 \vee E \vee E_1$, was $(P_0 P_3) \varphi \neq (P_0 P_3) \varphi \kappa$ bewirkt.

Um Einschränkungen hinsichtlich der betrachteten projektiven

Räume zu vermeiden, werden die gemäß (1) erklärten Unterräume als die *Schmiegunterräume des Normisomorphismus* φ im Punkt P_n definiert; in [12] wird ferner gezeigt, wie rein synthetisch in jedem Punkt X der durch φ erzeugten Normkurve k -Schmiegunterräume $S_X^{(k)}$ von φ ($k=0, \dots, n-1$) so erklärt werden können, daß man speziell in reellen Räumen wieder die bekannten Schmiegunterräume erhält. Insbesondere in den Punkten P_0 und P_n gilt $S_{P_0}^{(k)} = P_0 \vee \dots \vee P_k$, $S_{P_n}^{(k)} = P_n \vee \dots \vee P_{n-k}$ ($k=0, \dots, n-1$).

Nennt man jede Hyperebene sowie jeden k -dimensionalen Unterraum M von Π ($0 \leq k \leq n-2$) eine *Sehne* von φ , falls M eine Darstellung der Form $M = L \cap L\varphi$ mit $P_0 \in L$ und $\dim \Pi(L) = k+1$ gestattet, so sind alle Schmiegunterräume von φ auch Sehnen von φ . Einfache Verallgemeinerung eines Hilfssatzes in [13] liefert eine Kennzeichnung der Schmiegunterräume in einem regulären Punkt $R \in \Gamma$: Der k -Schmiegunterraum von φ in R ($1 \leq k \leq n-1$) ist die einzige k -dimensionale Sehne von φ durch $S_R^{(k-1)}$, welche keinen von R verschiedenen Normkurvenpunkt besitzt. (Eine Tangente in einem nicht regulären Normkurvenpunkt kann unendlich viele Punkte von Γ enthalten [3].)

In $\Pi(V, K)$ können die Schmiegunterräume von φ durch lineare Vektorraumendomorphismen $d^{(k)}: V \rightarrow V$ beschrieben werden, die folgendermaßen bestimmt sind:

$$\begin{aligned} p_j d^{(k)} &:= p_{j+k} \binom{j+k}{j} \quad (j=0, \dots, n-k), \\ p_j \in \text{Ker } d^{(k)} &\quad (j=n-k+1, \dots, n), \end{aligned} \quad (k=0, \dots, n-1).$$

Für alle $k=0, \dots, n-1$ folgt dann nach [12; Satz 3]

$$S_{x_t K}^{(k)} = x_t K \vee (x_t d^{(1)}) K \vee \dots \vee (x_t d^{(k)}) K \quad (4)$$

mit $t \in K$.

Die Menge $\{(X = S_X^{(0)}, S_X^{(1)}, \dots, S_X^{(n-1)}) \mid X \in \Gamma\}$ von Fahnen aus Schmiegunterräumen des Normisomorphismus φ bildet sein *vollständiges Erzeugnis* $\Gamma^{(n-1)}$, und Normisomorphismen mit demselben vollständigen Erzeugnis heißen *assoziiert*.

3. NICHTASSOZIIERTE ERZEUGUNGEN EINER NORMKURVE

3.1 Die Gruppe $G^{(n-1)}$ aller automorphen Kollineationen des vollständigen Erzeugnisses von φ ist eine Untergruppe der Gruppe G aller automorphen Kollineationen der durch φ erzeugten Normkurve Γ . Die Kollineationsgruppe $\text{PGL}(\Pi) \cap G^{(n-1)}$ operiert dreifach transitiv auf der Menge der regulären Punkte von Γ und in einem projektiven Pappos-Raum sogar scharf dreifach transitiv [12; Satz 6].

Nach [14] sind folgende Aussagen äquivalent:

- (a) Die Normkurve Γ besitzt mindestens $n+3$ Punkte oder es gilt $n=2$.
- (b) Die Gruppen G und $G^{(n-1)}$ stimmen überein.
- (c) Je zwei Normisomorphismen mit Erzeugnis Γ sind assoziiert.

3.2 Wir setzen nun $\Pi = \Pi_{n,q}$ als endlichen projektiven Pappos-Raum der Ordnung $q=p^s$ voraus, wobei p eine Primzahl ist.

Jene Untergruppe von $G^{(n-1)}$, welche P_0, P_n und E einzeln fix läßt, ist zur Automorphismengruppe des Galois-Feldes $GF(q)$ isomorph⁴ und enthält daher genau s Kollineationen. Die Gruppe $PGL(\Pi_{n,q}) \cap G^{(n-1)}$ hat die Ordnung $(q+1)q(q-1)$, was insgesamt ergibt

$$|G^{(n-1)}| = s(q^3 - q). \quad (5)$$

Die Bestimmung der Gruppe G stützt sich auf folgenden

HILFSSATZ. Ist U ein k -dimensionaler Unterraum von $\Pi_{n,q}$ mit $1 \leq k \leq n-1$, so gibt es

$$(q^{n+1} - q^{k+1})(q^{n+1} - q^{k+2}) \dots (q^{n+1} - q^n) \quad (6)$$

Kollineationen von $\Pi_{n,q}$, welche U punktweise fest lassen.

Beweis. Jede Kollineation, die U punktweise fest läßt, ist wegen $k \geq 1$ projektiv. Sei $A = \{A_0, \dots, A_k, \dots, A_n, A\}$ eine geordnete Fundamentalmenge von $\Pi_{n,q}$ mit $U = A_0 \vee \dots \vee A_k$ und ferner $\bar{A} = (A_{k+1} \vee \dots \vee A_n \vee A) \cap U$. Durch eine weitere geordnete Fundamentalmenge $A' = \{A'_0, \dots, A'_k, \dots, A'_n, A'\}$ wird genau eine Kollineation mit Fixpunkttraum U bestimmt, falls $A_0 = A'_0, \dots, A_k = A'_k$ und $\bar{A} = (A'_{k+1} \vee \dots \vee A'_n \vee A') \cap U$ gilt. Der Punkt A'_{k+1} kann auf $|P| - |U| = q^n + \dots + q^{k+1}$ Arten gewählt werden, A'_{k+2} auf $q^n + \dots + q^{k+2}$ Arten usw. Der Punkt A' ist an den $(n-k)$ -dimensionalen Unterraum mit der Basis $\{A'_{k+1}, \dots, A'_n, \bar{A}\}$ gebunden und muß diese Basis zu einer Fundamentalmenge ergänzen, was $(q-1)^{n-k}$ Möglichkeiten zur Wahl von A' ergibt. Produktbildung liefert (6). \square

SATZ 1. In $\Pi_{n,q}$ mit $q \leq n+1$ besitzt die Gruppe G aller automorphen Kollineationen der Normkurve Γ die Ordnung

$$\begin{aligned} & s(q+1)! \text{ für } q=n+1 \\ & s(q+1)!(q-1)^q \text{ für } q=n \text{ und} \\ & s(q+1)!(q-1)^q (q^{n+1} - q^{q+1})(q^{n+1} - q^{q+2}) \dots (q^{n+1} - q^n) \text{ für } q < n. \end{aligned} \quad (7)$$

Die Untergruppe $PGL(\Pi_{n,q}) \cap G$ hat $|G|s^{-1}$ Elemente. Es gibt genau $|G|((q+1)!)^{-1}$ Kollineationen und $|G|(s(q+1)!)^{-1}$ projektive Kollineationen von $\Pi_{n,q}$, die Γ punktweise fest lassen.

⁴Die beiden Gruppen sind als Transformationsgruppen auf $\Gamma \setminus \{P_n\}$ bzw. $GF(q)$ isomorph.

*Beweis*⁵: Jede der $(q+1)!$ Permutationen von Γ wird durch eine Anzahl von Kollineationen von Π induziert, die wir bestimmen. Gilt $q \leq n$, so ist Γ Basis eines q -dimensionalen Unterraumes U und kann auf $(q-1)^q$ Arten zu einer Fundamentalmenge von $\Pi(U)$ ergänzt werden. Je zwei geordnete Fundamentalmengen von $\Pi(U)$ legen genau s Kollineationen von $\Pi(U)$ fest; für $q < n$ gibt (6) an, wieviele verschiedene Kollineationen von $\Pi_{n,q}$ als Fortsetzung einer Kollineation von $\Pi(U)$ auftreten. Analoge Überlegungen gelten für $q=n+1$; hier ist Γ eine Fundamentalmenge von Π . \square

Ein Normisomorphismus $\varphi': u\Pi/P_0 \rightarrow u\Pi/P_n$, der Γ erzeugt, wird durch genau eine geordnete Fundamentalmenge $F' = \{P'_0, \dots, P'_n, E'\}$ mit $P'_0 = P_0$, $P'_n = P_n$ und $E' = E$ festgelegt [12; Satz 4]. Man erhält je- jede dieser Fundamentalmengen genau einmal, wenn man auf F die

$$|G| (s(q^3 - q))^{-1} \quad (8)$$

projektiven Kollineationen der Gruppe $\text{PGL}(\Pi_{n,q}) \cap G$ anwendet, die P_0, P_n, E als Fixpunkte besitzen. Da zu jedem die Normkurve Γ erzeugenden Normisomorphismus genau ein assoziierter Normisomorphismus $u\Pi/P_0 \rightarrow u\Pi/P_n$ existiert [12; Satz 5], gibt (8) zugleich an, in wieviele Klassen paarweise assoziierter Normisomorphismen die Menge aller Erzeugungen von Γ zerfällt. Die untenstehende Tabelle zeigt einige Zahlenwerte von (8).

	$n=3$	4	5	6	7
$q=2$	8	384	86 016	82 575 360	327 659 028 480
3	8	1 296	2 519 424	47 753 162 496	$\sim 8,055 \cdot 10^{15}$
4	2	162	497 664	30 576 476 160	$\sim 3,156 \cdot 10^{16}$
5	1	6	6 144	384 000 000	$7,200 \cdot 10^{13}$
7	1	1	1	120	33 592 320

3.3 Für $q < n$ spannt die Normkurve Γ einen echten Unterraum U von $\Pi_{n,q}$ auf. Um die rechnerische Behandlung zu vereinfachen, bestimmen wir in $\Pi(V, K = \text{GF}(q))$ eine Basis von $\Pi(U)$, deren Punkte durch solche Vektoren festgelegt werden, die bezüglich der Vektorraumbasis B nur 0 oder 1 als Koordinaten besitzen.

Da für alle $t \in \text{GF}(q)$ gilt $t^q = t$, stimmt U mit dem Durchschnitt der $n-q$ Hyperebenen

$$\text{Ker}(-p_j^* + p_{q-1+j}^*) \quad (j=1, \dots, n-q)$$

überein. Dabei ist $B^* = \{p_0^*, \dots, p_n^*\}$ die zu B duale Basis. Wir setzen für $i=1, \dots, q-1$

⁵Satz 1 ist für $n=2$ wegen $G=G^{(1)}$ nach (5) richtig.

$$u_i := \sum_{m=0}^{l_i} p_{m(q-1)+i} \text{ mit }^6 l_i := [(n-1-i)(q-1)^{-1}]. \quad (9)$$

Dann ist $\{p_0K, p_nK\} \cup \{u_iK \mid i=1, \dots, q-1\}$ die gesuchte Basis.

4. DER KNOTEN EINES NORMISOMORPHISMUS

4.1 Der projektive Desargues-Raum $\Pi(P)$ und sein Dualraum $\Pi^*(P^*)$ besitzen die Unterraumverbände $u\Pi$ bzw. $u\Pi^*$, und die Annulatorabbildung $\lambda: u\Pi \rightarrow u\Pi^*$ ist ein Verbandsantiisomorphismus, der insbesondere jeder Hyperebene von Π einen Punkt von Π^* zuordnet. Im zu $\Pi(V, K)$ dualen projektiven Raum $\Pi(V, K)^* = \Pi(V^*, K)$ wird durch die zu B duale Basis $B^* = \{p_0^*, \dots, p_n^*\}$ des zu V dualen Vektorraumes V^* ein Normisomorphismus φ^* festgelegt. Der lineare Vektorraumendomorphismus $h^*: V^* \rightarrow V^*$, welcher

$$p_j^* \mapsto (-1)^j \binom{n}{j} p_{n-j}^* \quad (j=0, \dots, n) \quad (10)$$

leistet, induziert eine lineare Abbildung $\chi^*: u\Pi^* \rightarrow u\Pi^*$. Verkettung mit $\lambda^{-1}: u\Pi^* \rightarrow u\Pi$ ergibt eine Abbildung, welche die von φ^* erzeugte Normkurve Γ^* bijektiv auf die Menge der Schmieghyperebenen des vermöge B bestimmten Normisomorphismus φ abbildet [12; Satz 7].

Unter dem *Knoten* eines Normisomorphismus versteht man den Durchschnitt aller seiner Schmieghyperebenen, also seiner $(n-1)$ -Schmiegunterräume. Damit gilt für den Knoten K von φ

$$K = \bigcap_{X^* \in \Gamma^*} (X^* \chi^* \lambda^{-1}) = \left(\bigvee_{X^* \in \Gamma^*} X^* \right) \chi^* \lambda^{-1}, \quad (11)$$

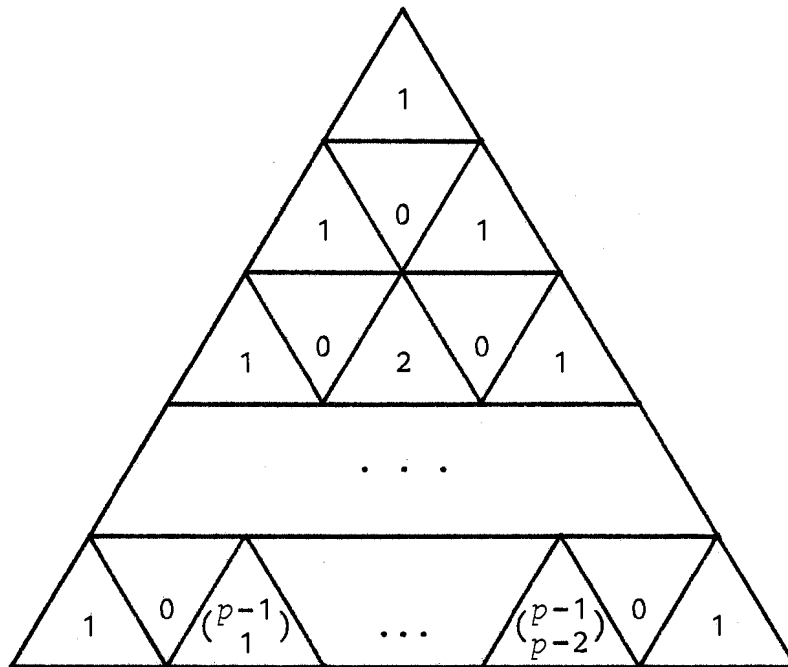
denn χ^* ist mit dem Verbinden in Π^* verträglich [11; S.154].

Bei $\text{Char}K=0$ ist χ^* bijektiv und Γ^* spannt ganz P^* auf, was insgesamt $K = P^* \lambda^{-1} = \emptyset$ ergibt.

4.2 Für einen Körper K der Charakteristik $p > 0$ stimmt der Rang des Vektorraumendomorphismus h^* mit der Anzahl der nicht durch p teilbaren Binomialkoeffizienten in (10) überein.

Sei $\Delta(p)$ das modulo p reduzierte Pascal-Dreieck der Binomialkoeffizienten; wir zählen die Zeilen von $\Delta(p)$ bei Null beginnend. Bezeichnet $\Delta^j(p)$ das aus den Zeilen $0, \dots, p^j-1$ gebildete Teildreieck von $\Delta(p)$, so folgt mit [9; S.43], daß $\Delta^{j+1}(p)$ die auf Seite 9 dargestellte Bauart hat. Dabei steht \triangle_m für das gliedweise mit $m \in \mathbb{N}$ multiplizierte und modulo p reduzierte Teildreieck $\Delta^j(p)$ und ∇_0 für ein aus Nullen bestehendes Teildreieck.

⁶Die $[\]$ -Funktion $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$ ist durch $0 \leq y - [y] < 1$ definiert.



Da das Teildreieck $\Delta^1(p)$ nur von Null verschiedene Zahlen enthält, hat jedes dieser zu $\Delta^j(p)$ proportionalen Teildreiecke aus $\Delta^{j+1}(p)$ an denselben Stellen von Null verschiedene Zahlen wie $\Delta^j(p)$. In Verschärfung von [16;Satz 2] gilt folgender

SATZ 2. Ist $c_j p^j + c_{j-1} p^{j-1} + \dots + c_0$ die p -adische Darstellung der Zahl $n = \dim \Pi$, so besitzt h^* den Rang

$$\text{rg} h^* = (c_j + 1)(c_{j-1} + 1) \dots (c_0 + 1). \quad (12)$$

Falls K mindestens n Elemente enthält, folgt

$$\dim \Pi(K) = n - \text{rg} h^*. \quad (13)$$

Beweis. (1) Da (12) für $j=0$ gilt, können wir Induktion nach j verwenden. Für $j > 0$ gehört die n -te Zeile von $\Delta(p)$ dem Teildreieck $\Delta^{j+1}(p)$ an und "schneidet" genau $c_j + 1$ der zu $\Delta^j(p)$ proportionalen Teildreiecke von $\Delta^{j+1}(p)$ jeweils in ihrer $(c_{j-1} p^{j-1} + \dots + c_0)$ -ten Zeile. Nach Induktionsannahme hat diese genau $(c_{j-1} + 1) \dots (c_0 + 1)$ von Null verschiedene Zahlen. Das zeigt die Richtigkeit von (12).

(2) Die Normkurve Γ^* spannt genau für $|K| \geq n$ (bzw. $|\Gamma^*| \geq n+1$) ganz P^* auf [14], sodaß $n - (\text{rg} h^* - 1) - 1$ die Dimension des Knotens angibt. \square

4.3 Für $K = \text{GF}(q)$ mit $q = p^s < n$ besitzt der von Γ^* aufgespannte echte Unterraum U^* von Π^* nach (9) die Basis $\{Kp_0^*, Kp_n^*\} \cup \{Ku_i^* \mid i=1, \dots, q-1\}$. Die Vektoren p_0^* und p_n^* gehören $\text{Ker} h^*$ nicht an; $u_i^* \notin \text{Ker} h^*$ ist genau dann erfüllt, wenn mindestens einer der Binomialkoeffizienten

$$\binom{n}{m(q-1)+i} \quad (m=0, \dots, l_i)$$

nicht durch p teilbar ist, was mit Hilfe von $\Delta(p)$ überprüft werden kann. Die Menge

$$\{p_0^* h^*, p_n^* h^*\} \cup \{u_i^* h^* \mid u_i^* \notin \text{Ker} h^*, 1 \leq i \leq q-1\}$$

ist linear unabhängig; hat sie genau r Elemente, so folgt

$$\dim \Pi(K) = n - r. \quad (14)$$

Sei zum Beispiel $K = \text{GF}(3)$ und $n=6$. Das modulo 3 reduzierte Pascal-Dreieck berechnen wir nach 4.2 zu

$$\begin{array}{cccccccc} & & & & & & & 1 \\ & & & & & & & 1 & 1 \\ & & & & & & & 1 & 2 & 1 \\ & & & & & & & 1 & 0 & 0 & 1 \\ & & & & & & & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ & & & & & & & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ & & & & & & & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ & & & & & & & 1 & 1 & 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ & & & & & & & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ & & & & & & & \dots & & & & & & & & \end{array}$$

und gemäß (9) gilt $u_1^* = p_1^* + p_3^* + p_5^*$, $u_2^* = p_2^* + p_4^*$. Die 6. Zeile von $\Delta(3)$ liefert $u_1^* h^* = 2p_3^*$, $u_2^* \in \text{Ker} h^*$, also $r=3$. Mit (14) folgt $\dim \Pi(K) = 3$.

4.4 Die Dimension des Knotens K "mißt" die gegenseitige Lage der Schmieghyperebenen von φ . Etwa für $\text{Char} K = p = n$ ist die Menge der Schmieghyperebenen stets Teilmenge eines Hyperebenenbüschels. Jedoch kann auch bei $K = \emptyset$ die Menge der Tangenten eines Normisomorphismus ein gegenüber reellen Räumen stark abweichendes Verhalten besitzen. Das zeigt ein abschließendes Beispiel, in dem wir einen projektiven Raum $\Pi(V, K)$ mit Dimension $n=3$ und $\text{Char} K = 2$ voraussetzen. Für $K \neq \text{GF}(2)$ ist der Knoten K dann leer.

Die Tangente des Normisomorphismus φ im Punkt P_3 ist nach 2.2 die Gerade $P_3 P_2$, die Tangente in $x_t K$ enthält für alle $t \in K$ gemäß (4) wegen $\text{Char} K = 2$ den Punkt $(p_1 + p_3 t^2) K$. Damit ist aber $P_1 P_3$ eine Leitgerade der Tangentenmenge von φ . Da die Gruppe aller automorphen Kollineationen des vollständigen Erzeugnisses $\Gamma^{(2)}$ von φ transitiv auf der Menge der regulären Punkte der erzeugten Kubik Γ operiert, geht durch jeden regulären Kubikpunkt eine solche Leitgerade. Die Tangenten von φ in P_0, P_3 und E sind windschief, also auch je zwei dieser Leitgeraden. Die Tangentenmenge von φ ist daher Teilmenge eines Regulus. Ist speziell der Monomorphismus $t \mapsto t^2$ des Körpers K in sich auch surjektiv, also K ein perfekter Körper, so bilden die Tangenten von φ einen Regulus. Vgl. [18], [30; S.314].

LITERATUR:

- [1] ARTZY, R.: The conic $y=x^2$ in Moufang planes, Aequationes Math. 6 (1971), 30-35.
- [2] BERTINI, E.: Einführung in die projektive Geometrie mehrdimensionaler Räume, Wien: Seidel & Sohn, 1924.
- [3] BERZ, E.: Kegelschnitte in desarguesschen Ebenen, Math.Z. 78 (1962), 55-85.
- [4] BRAUNER, H.: Geometrie projektiver Räume I,II, Mannheim-Wien-Zürich: BI-Wissenschaftsverlag, 1976.
- [5] BRAUNER, H.: Lineare Abbildungsmethoden, Skriptum einer Vorlesung an der TU Wien im Wintersemester 1982/83.
- [6] BURAU, W.: Mehrdimensionale projektive und höhere Geometrie, Berlin: VEB Dt. Verlag d. Wissenschaften, 1961.
- [7] CLIFFORD, W.K.: On the classification of loci, Phil.Trans. Roy.Soc.II (1878), 663-681. (In: Mathematical Papers, London: Macmillan and Co., 1882.)
- [8] DEMBOWSKI, P.: Finite Geometries, Berlin-Heidelberg-New York: Springer, 1968.
- [9] DYNKIN, E., USPENSKI, W.A.: Mathematische Unterhaltungen II, Aufgaben aus der Zahlentheorie, Berlin: VEB Dt. Verlag d. Wissenschaften, 1966.
- [10] GORDON, B., MOTZKIN, T.S.: On the zeros of polynomials over division rings, Trans.Amer.Math.Soc 116 (1965), 218-226. Correction ibid. 122 (1966), 547.
- [11] HAVLICEK, H.: Zur Theorie linearer Abbildungen I, J.Geometry 16 (1981), 152-167.
- [12] HAVLICEK, H.: Normisomorphismen und Normkurven endlichdimensionaler projektiver Desargues-Räume, Mh.Math 95 (1983), 203-218.
- [13] HAVLICEK, H.: Eine affine Beschreibung von Ketten, Abh. Math.Sem.Univ.Hamburg 53 (1983), 267-276.
- [14] HAVLICEK, H.: Die automorphen Kollineationen nicht entarteter Normkurven (erscheint demnächst).
- [15] HERSTEIN, I.N.: Conjugates in Division Rings, Proc.Amer. Math.Soc. 7 (1956), 1021-1022.
- [16] HERZER, A.: Die Schmieghyperebenen an die Veronese-Mannigfaltigkeit bei beliebiger Charakteristik, J.Geometry 18 (1982), 140-154.
- [17] HIRSCHFELD, J.W.P.: Projective Geometries over Finite Fields, Oxford: Oxford University Press, 1979.
- [18] KRÜGER, W.: Regelscharen und Regelflächen in dreidimensionalen desarguesschen Räumen, Math.Z. 93 (1966), 404-415.
- [19] KRÜGER, W.: Kegelschnitte in Moufangebene, Math.Z.120 (1971), 40-60.
- [20] MÄURER, H.: Symmetries of Quadrics, In: Plaumann, P., Strambach, K. (Hrsg.): Geometry - von Staudt's Point of View, Dordrecht: D.Reidel, 1981.

- [21] MÜLLER, E., KRUPPA, E.: Vorlesungen über Darstellende Geometrie, Bd.I, Die linearen Abbildungen, Leipzig-Wien: F.Deuticke, 1923.
- [22] OSTROM, T.G.: Conicoids: Conic-like Figures in Non-Pappian Planes, In: Plaumann, P., Strambach, K. (Hrsg.): Geometry-von Staudt's Point of View, Dordrecht: D.Reidel, 1981.
- [23] RABL, K.: Über die Koinzidenzgebilde von linearen Zweibilderverfahren für den n -dimensionalen Raum I, Sitz. Ber.Akad.Wiss.Wien, math.naturw.Kl., Abt.II, 187 (1978), 197-218.
- [24] RABL, K.: Über die Koinzidenzgebilde von linearen Zweibilderverfahren für den n -dimensionalen Raum II, Sitz. Ber.Akad.Wiss.Wien, math.naturw.Kl., Abt.II, 188 (1979), 79-100.
- [25] RIESINGER, R.: Entartete Steinerkegelschnitte in nicht-papposschen Desarguesebenen, Mh.Math. 89 (1980), 243-251.
- [26] RIESINGER, R.: Normkurven in endlichdimensionalen Desarguesräumen, Geom.Dedicata 10 (1981), 427-449.
- [27] RIESINGER, R.: Geometrische Überlegungen zum rechten Eigenwert-Problem für Matrizen über Schiefkörpern, Geom. Dedicata 12 (1982), 401-405.
- [28] ROSATI, L.A.: Su alcune varietà dello spazio proiettivo sopra un corpo non commutativo, Ann.Mat.pura appl, IV Ser., 59 (1962), 213-227.
- [29] ROSATI, L.A.: Su alcuni problemi di geometria non lineare sopra un corpo sghembo, Atti Acad.naz.Lincei, VII Ser., Rend., Cl.sci.fis.mat.natur 36 (1964), 615-622.
- [30] SEGRE, B.: Lectures on Modern Geometry, Roma: Ed. Cremonese, 1962.
- [31] SEGRE, C.: Mehrdimensionale Räume, Encyklopädie d. Math. Wissenschaften, III,2,2A, Leipzig: Teubner, 1921-1928.
- [32] THAS, J.A.: Normal rational curves and k -arcs in Galois-spaces, Rend. Mat. 1 (1968), 331-334.
- [33] THAS, J.A.: Connection between the Grassmannian $G_{k-1;n}$ and the set of k -arcs of the Galois space $S_{n,q}$, Rend. Mat. 2 (1969), 121-134.
- [34] THAS, J.A.: Normal rational curves and $(q+2)$ -arcs in a Galois space $S_{q-2,q}$ ($q=2^h$), Atti Acad.Naz.Lincei, Rend.47 (1969), 249-252.
- [35] TIMMERMANN, H.: Descrizioni geometriche sintetiche di geometrie proiettive con caratteristica $p>0$, Ann.Mat.pura appl., IV Ser., 114 (1977), 121-139.
- [36] VERONESE, G.: Behandlung der projectivischen Verhältnisse der Räume von verschiedenen Dimensionen durch das Princip des Projicirens und Schneidens, Math.Ann. 19 (1882), 161-234.
- [37] ZEUGE, J.: Die Schmiegräume an die Veronesemannigfaltigkeit, Mitt.Math.Ges.Hamburg, Bd.X, Heft 5 (1977), 391-393.

Anschrift des Verfassers: Hans HAVLICEK
Institut für Geometrie der TU Wien
Gußhausstraße 27-29
A-1040 Wien, Österreich.