LINEARE GERADENKOMPLEXE ÜBER SCHIEFKÖRPERN

Von Hans Havlicek

Fritz Hohenberg zum 80.Geburtstag gewidmet

§ 1 Einleitung

1.1 In der reellen Liniengeometrie versteht man unter einem linearen Geradenkomplex eine solche Menge von Geraden, welcher unter dem KLEINschen Übertragungsprinzip ein hyperebener Schnitt der PLÜCKER-Quadrik zugeordnet ist. In gleicher Weise können für jeden kommutativen Grundkörper K lineare Geradenkomplexe erklärt werden und man erhält zwei Typen, die sich wie folgt beschreiben lassen: Ein allgemeiner linearer Geradenkomplex – auch Gewinde genannt – ist die Menge der isotropen Geraden einer Nullpolarität, ein spezieller linearer Geradenkomplex – auch Gebüsch genannt – besteht aus allen Geraden, welche mit einer festen Geraden nichtleeren Durchschnitt haben. Vgl. dazu etwa [4,322], [8,30].

Für Char $K \neq 2$ stellt ein Gewinde ein Modell einer LIE-Geometrie [1,251] dar, wobei berührende Lie-Zykel und Geraden mit nichtleerem Durchschnitt einander entsprechen.

In dieser Note betrachten wir nun allgemeiner einen dreidimensionalen projektiven Raum mit einem nicht notwendig kommutativen Grundkörper K. Verwenden wir die oben angegebene Beschreibung eines Gebüsches jetzt als Definition, so ist über die derart erklärten Geradenmengen wenig zu sagen. Da es aber für einen echten Schiefkörper K weder Nullpolaritäten noch ein Punktmodell der Geradenmenge mit Eigenschaften analog der Plücker-Quadrik gibt [6,172], liefern die obigen Bemerkungen keinen Anhaltspunkt für eine Verallgemeinerung des Begriffs "Gewinde".

Eine Möglichkeit einer einheitlichen, von der Kommutativität des Grundkörpers unabhängigen Definition eines Gewindes bietet die auf J.SYLVESTER (1861) zurückgehende Erzeugung eines Gewindes mit Hilfe projektiv gekoppelter, verschränkter Geradenbüschel. Davon ausgehend diskutieren wir in dieser Note das Klassifikationsproblem für Gewinde im Sinne der projektiven Gruppe und die automorphen Kollineationen und Dualitäten eines Gewindes[1]. Wesentliches Hilfsmittel ist dabei die Kenntnis der Menge aller Gewindegeraden durch einen Punkt. Genau bei kommutativem Grundkörper K ist diese Menge – auch Komplexkegel genannt – stets ein Geradenbüschel. Für einen echten Schiefkörper K ergeben sich Querverbindungen zu den in [7],[11],[12,325] betrachteten entarteten Kegelschnitten.

1.2. Wir setzen im folgenden einen projektiven Raum über einem vierdimensionalen Rechtsvektorraum V mit nicht notwendig kommutativem Skalarkörper K voraus. Die Punktmenge dieses projektiven Raumes bezeichnen wir mit P. Für jeden Unterraum U von V sei $P(U):=\{xK\in P \mid x\in U\}$. Das Zentrum von K nennen wir Z.

Sei P ein Punkt und E eine Ebene durch P. Das Geradenbüschel G[P,E] bzw. das Geradenbündel G[P] besteht aus allen Geraden durch P in E bzw. aus allen Geraden durch P.

Die weitere Bezeichnungsweise folgt [2] und [3].

§ 2 SYLVESTER-Projektivitäten

2.1 Sind P_0, P_1 zwei verschiedene Punkte und E_0, E_1 zwei verschiedene Ebenen durch $P_0P_1 =: t$, so heißen die Geradenbüschel $G[P_0,E_0]$ und $G[P_1,E_1]$ verschränkt; eine Projektivität $\sigma: G[P_0,E_0] \to G[P_1,E_1]$ nennen wir für $t^{\sigma}=t$

eine Sylvester-Projektivität. Die Existenz von Sylvester-Projektivitäten ist trivial. Ferner gilt folgender

HILFSSATZ 1. Sind $\sigma: G[P_0, E_0] \to G[P_1, E_1]$ und $\sigma': G[P_0', E_0'] \to G[P_1', E_1']$ zwei Sylvester-Projektivitäten, so existiert eine projektive Kollineation $\varkappa \in PGL(P)$ mit $\sigma' = \varkappa^{-1}\sigma\varkappa$.

Beweis. Wir legen durch P_1 eine Hilfsgerade $h_0 \subset E_0$ und durch P_0 eine Hilfsgerade $h_1 \subset E_1$ so, daß diese windschief sind. Dann ist die Abbildung

$$(1) \qquad \begin{aligned} \varrho: h_0 &\to h_1 \\ X &\mapsto (XP_0)^{\sigma} \cap h_1 \end{aligned}$$

eine Perspektivität [2,145]; es gibt also eine Gerade l derart, daß die Ebenen durch l aus h_0 und h_1 genau in ϱ zugeordnete Punkte ausschneiden. Wegen $P_1^{\varrho} = P_0$ ist $l \cap t \neq \emptyset$. Umgekehrt ist σ durch h_0, h_1, l, t eindeutig bestimmt. Wir deuten das in der Form

$$\sigma = \sigma(h_0, h_1, l, t)$$

an. Ist $P_2 \in h_0 \setminus \{P_1\}$ und $P_3 := P_2^{\varrho}$, so gibt es einen Punkt $P \in l$ derart, daß (P_0, P_1, P_2, P_3, P) eine geordnete Fundamentalmenge ist. Analog kann $\sigma' = \sigma'(h_0', h_1', l', t')$ erreicht werden und es gibt Punkte $P_0', \ldots, P_3', P'$. Es existiert eine projektive Kollineation $\varkappa$ mit $P_0^{\varkappa} = P_0', \ldots, P_3^{\varkappa} = P_3', P^{\varkappa} = P'$ und dieses $\varkappa$ leistet das Gewünschte. □

Die Menge der Verbindungsgeraden unter ϱ zugeordneter Punkte ist bekanntlich ein Regulus [9],[12,319] mit h_0, h_1 und l als Leitgeraden.

SATZ 1. Sind $\sigma = \sigma(h_0, h_1, l, t)$ und $\sigma' = \sigma'(h_0', h_1', l', t')$ zwei Sylvester-Projektivitäten, so folgt $\sigma = \sigma'$ genau dann, wenn gilt

$$(2) \qquad \begin{aligned} h_0 \cap t &= h_0' \cap t', \qquad & h_1 \cap t &= h_1' \cap t', \\ h_0 \vee t &= h_0' \vee t', \qquad & h_1 \vee t &= h_1' \vee t', \end{aligned}$$

und[2]

$$(3) \qquad DV(l' \cap t, l \cap t, h_1 \cap t, h_0 \cap t) = DV(l' \vee t, l \vee t, h_1 \vee t, h_0 \vee t) \in Z.$$

Beweis. Die Bedingungen (2) sind äquivalent dazu, daß σ und σ' übereinstimmende Definitions- und Bildmenge haben.

Es gibt eine perspektive Kollineation $\varkappa_0$ mit Zentrum P_0 und Achse E_1 mit $h_0 \to h_0'$; unter $\varkappa_0$ sind alle Punkte von t und alle Ebenen durch t invariant. Vertauschung der Zeiger 0 und 1 liefert eine perspektive Kollineation $\varkappa_1$ mit analogen Eigenschaften. Gemäß (1) legen σ' und $\varkappa_1^{-1}\varkappa_0^{-1}\sigma\varkappa_0\varkappa_1$ je einen Regulus mit Leitgeraden h_0', h_1', l' bzw. $h_0', h_1', l^{\varkappa_0\varkappa_1}$ fest. Genau für $\sigma=\sigma'$ stimmen diese Reguli überein. Nach [12,321] ist letzteres zur Gültigkeit von (3) äquivalent.□

Die Bedingung (3) zeigt, daß bei nicht kommutativem Grundkörper K durch σ in der Geraden t bzw. im Ebenenbüschel um t (=Kogerade) je eine Z-Kette [1,326]

$$k_Z=(h_0\cap t, h_1\cap t, l\cap t)_Z \quad \text{bzw.} \quad k_Z^* = (h_0\vee t, h_1\vee t, l\vee t)_Z$$

mitbestimmt ist. Vgl. 3.2.

2.2. Wir bezeichnen mit $\Sigma°$ die Menge aller zu t windschiefen Geraden x, welche zwei unter σ zugeordnete Geraden y, y^σ treffen. Ferner sei $\Sigma^\times$ die Menge aller jener Treffgeraden x von t, die mit zwei verschiedenen Geraden $x_1, x_2 \in \Sigma°$ in einem Geradenbüschel liegen, vermehrt um $\{t\}$.

Die Geradenmenge $\Sigma := \Sigma° \cup \Sigma^\times$ nennen wir ein Gewinde und σ eine Sylvester-Erzeugung von Σ. Die Punkte P_0, P_1 werden Grundpunkte bezüglich Σ genannt. Soll hervorgehoben werden, daß Σ von σ erzeugt wird, so schreiben wir $\Sigma(\sigma)$. Wir bezeichnen Σ auch als einen allgemeinen linearen Geradenkomplex.

Ist P ein PAPPOS-Raum, also K kommutativ, so ist die obige Definition mit den üblichen Definitionen äquivalent [2,187]. Insbesondere ist dann $\Sigma^\times$ ein parabolisches Netz.

Aus Hilfssatz 1 folgt unmittelbar

SATZ 2. Sind Σ und Σ' zwei Gewinde im projektiven Raum P, so gibt es eine projektive Kollineation $\varkappa \in PGL(P)$ mit $\Sigma^\varkappa = \Sigma'$.

2.3. Für jeden Punkt $A \in P$ bezeichne Σ_A den durch $\Sigma_A := \Sigma(\sigma) \cap G[A]$ definierten Komplexkegel zur Spitze A. Die Bestimmung der Geradenmenge Σ_A geschieht in drei Schritten:

Fall 1: $A \in E_0 \setminus t$ oder $A \in E_1 \setminus t$. Hier ist Σ_A das Geradenbüschel $G[A, (AP_0)^\sigma]$ bzw. $G[A, (AP_1)^{\sigma^{-1}}]$. Wir nennen jeden Punkt A, für den Σ_A ein Geradenbüschel ist, einen regulären Punkt bezüglich Σ.

Fall 2: $A \in P \setminus (E_0 \cup E_1)$. Es gibt eine Basis $\{p_0, \dots, p_3\}$ von V mit

$$h_0 = P[p_1, p_2],\ h_1 = P[p_0, p_3],\ l = P[p_0+p_1, p_2+p_3],\ t = P[p_0, p_1],$$

was $P_0 = p_0K$, $P_1 = p_1K$ ergibt. Wir dürfen

$$A = (p_0a_0 + p_1a_1 + p_2 - p_3a_3)K \text{ mit } a_i \in K,\ a_3 \neq 0$$

voraussetzen. Die Verkettung von σ mit der Projektion π zum Zentrum A auf die Ebene E_0 ist die Projektivität

$$\sigma\pi : G[P_0, E_0] \rightarrow G[P_1, E_0],$$

welche die Gerade t fest läßt. Jede Gerade $x \in \Sigma_A \cap \Sigma^\circ$ ist dadurch gekennzeichnet, daß ihr Spurpunkt $X := x \cap E_0$ nicht auf t liegt und $(P_0 X)^{\sigma\pi} = P_1 X$ erfüllt ist. Das ist äquivalent dazu, daß X im eigentlichen Teil Γ° des Erzeugnisses Γ von $\sigma\pi$ [7,65] liegt.

Eine Gerade $P[p_0, p_1 u + p_2]$ $(u \in K)$ hat das $\sigma\pi$-Bild $P[p_1, p_0(u + a_0 a_3^{-1}) + p_2 a_3^{-1}]$. Der Schnittpunkt dieser beiden Geraden führt auf die Parameterdarstellung

(4) $$\Gamma^\circ = \{y_u K \mid y_u = p_0(u a_3 + a_0) + p_1 u + p_2),\ u \in K\}.$$

Genau die Punkte der Menge

(5) $$n := \{x_u K \mid x_u = p_0 + p_1 u^{-1} a_3 u,\ u \in K \setminus \{0\}\}$$

sind jene Punkte von t, die mit zwei verschiedenen Punkten von Γ° kollinear liegen [7,66].

Für $a_3 \in Z$ ist $\sigma\pi$ eine Perspektivität, $\Gamma^\circ \cup n$ eine Gerade und $\Gamma = \Gamma^\circ \cup t$ die Vereinigung zweier Geraden. Dann ist aber A regulär bzgl. Σ.

Ist andererseits $a_3 \notin Z$, so erzeugt $\sigma\pi$ einen entarteten Kegelschnitt und n hat die unendliche Mächtigkeit der Konjugiertenklasse von a_3 in K. Damit ist Σ_A der Geradenkegel zur Spitze A über der echten Teilmenge $\Gamma^\circ \cup n$ des entarteten Kegelschnitts Γ. Wir nennen A in diesem Fall einen singulären Punkt 1.Art bzgl. Σ.

Fall 3: $A \in t$. Wir schließen an Fall 2 an und setzen

$$A = (p_0 a_0 + p_1 a_1)K \text{ mit } (a_0, a_1) \neq (0,0).$$

Für $a_0 = 0$ bzw. $a_1 = 0$ gilt $A = P_1$ bzw. $A = P_0$ und Σ_A ergibt sich als Geradenbüschel $G[P_1, E_0]$ bzw. $G[P_0, E_1]$, d.h. A ist regulär bzgl. Σ. Andernfalls sei $a := a_0 a_1^{-1}$; nach (5) gehört eine Gerade genau dann zu Σ_A, wenn sie in einer Ebene der Form

(6) $$P[p_0, p_1, p_2 - p_3 u^{-1} a u] \quad \text{mit } u \in K \setminus \{0\}$$

angehört. Daher ist A für $a \in Z$ regulär bezüglich Σ. Für $a \notin Z$ ist Σ_A die Vereinigungsmenge einer, durch die Konjugiertenklasse von a in K indizierten, unendlichen Familie von Geradenbüscheln mit Trägerebenen durch t. Wir nennen A einen singulären Punkt 2.Art bzgl. Σ.

Eine andere Beschreibung von Σ_A $(A \in t)$ stützt sich auf die Familie $\{\mu_i \mid i \in I\}$

aller Projektivitäten, welche

$P_0 \mapsto E_1, P_1 \mapsto E_0, l\cap t \mapsto H$ leisten, wobei H die zu $E_0, E_1, l\vee t$ vierte harmonische Ebene ist. Dann folgt

$$\Sigma_A = \bigcup_{i\in I} G[A, A^{\mu_i}].$$

Die zugehörige einfache Rechnung sei dem Leser überlassen.

Zusammenfassend gilt: Genau bei kommutativem Grundkörper K ist jeder Punkt $A\in P$ regulär bzgl Σ. Bei nicht kommutativem K zerfällt P in drei Klassen. Je nachdem A regulär, singulär von 1.Art oder singulär von 2.Art bzgl. Σ ist, enthält Σ_A genau ein, kein [7,65] oder unendlich viele Geradenbüschel. Die Gerade t ist dadurch ausgezeichnet, daß sie alle singulären Punkte 2.Art trägt. Daher ist für einen echten Schiefkörper K die auf σ beruhende Zerlegung $\Sigma=\Sigma^{\circ}\cup\Sigma^{\times}$ von der Auswahl einer Sylvester-Erzeugung unabhängig. Vgl. 3.2.

2.4 Die Annulatorabbildung λ bildet den Unterraumverband von P antiisomorph auf den Unterraumverband des zu P dualen projektiven Raumes P^{*} ab [2,109]. Mit $\sigma=\sigma(h_0,h_1,l,t)$ ist $\sigma^{*}=\sigma^{*}(h_0{}^{\lambda},h_1{}^{\lambda},l^{\lambda},t^{\lambda})$ Sylvester-Erzeugung eines Gewindes Σ^{*} im Dualraum P^{*} und es gilt $\Sigma^{*}=\Sigma^{\lambda}$, d.h. Σ^{*} besteht aus allen jenen Ebenenbüscheln (=Kogeraden), deren Trägergerade in Σ liegt. Damit läßt sich die Menge der Komplexgeraden von Σ in einer Ebene dual zu 2.3 ermitteln[3]. Die Begriffe reguläre Ebene, singuläre Ebene 1.Art und singuläre Ebene 2.Art können sinngemäß eingeführt werden.

§ 3 Erzeugungen und automorphe Kollinationen

3.1 Jedem bzgl. $\Sigma(\sigma)$ regulären Punkt $X\in P$ können wir die Trägerebene des Geradenbüschels Σ_X zuweisen. Wir bezeichnen diese Ebene mit X^{γ}. Es gilt

(7) $\qquad X\in Y^{\gamma} \iff Y\in X^{\gamma} \qquad (X,Y\in P$ regulär bzgl. $\Sigma)$

und γ ist Bijektion der Menge der regulären Punkte bzgl. Σ auf die Menge der regulären Ebenen bzgl. Σ. Ist K kommutativ, so ist Σ die Menge der isotropen Geraden der Nullpolarität γ.

3.2. Die Frage nach allen Sylvester-Erzeugungen von $\Sigma(\sigma)$ beantwortet der folgende

SATZ 3. Sind P_0', P_1' zwei verschiedene reguläre Punkte bzgl. eines Gewindes $\Sigma(\sigma)$, und trägt eine Ebene durch $t':=P_0'P_1'$ keine singulären Punkte 1.Art bzgl. $\Sigma(\sigma)$, so gibt es eine Sylvester-Erzeugung $\sigma':G[P_0',P_1'^{\nu}] \to G[P_1',P_0'^{\nu}]$ von $\Sigma(\sigma)$. Jede Sylvester-Erzeugung von $\Sigma(\sigma)$ hat diese Bauart.

Beweis. Sei $E_0':=P_1'^{\nu}$ und $E_1':=P_0'^{\nu}$. Ist K nicht kommutativ, so folgt $t=t'$, denn genau reguläre Ebenen durch t tragen dann keine singulären Punkte 1.Art. Wir definieren eine Abbildung

$$\text{(8)}\qquad \begin{aligned}&\sigma':G[P_0',E_0'] \to G[P_1',E_1']\\ &(P_0'X) \mapsto E_1'\cap X^{\nu} \text{ für } X\in E_0'\setminus t',\ t' \mapsto t'.\end{aligned}$$

Es bleibt zu zeigen, daß Definition (8) sinnvoll ist. Wegen $X\in E_0'=P_1'^{\nu}$ folgt $P_1'\in X^{\nu}$, also gehört $E_1'\cap X^{\nu}$ dem Geradenbüschel $G[P_1',E_1']$ an. Sind ferner $P_0',X,\tilde{X}$ drei verschiedene kollineare Punkte in E_0' und ist $Y\in E_1'\cap X^{\nu}$ mit $Y\neq P_1'$, so gilt $Y^{\nu}= Y\vee X^{\nu}\vee P_0'$ nach (7). Analog liefert (7) dann $\tilde{X}^{\nu}=\tilde{X}\vee P_1'\vee Y$; damit ist die Definition von $(P_0'X)^{\sigma'}$ unabhängig von der Auswahl des Punktes X. Neben den Ebenen E_0' und E_1' gibt es im Ebenenbüschel um t' noch mindestens eine reguläre Ebene, denn das Zentrum Z von K enthält mindestens zwei Elemente. Wählen wir in einer solchen Ebene einen Punkt $A\notin t'$, so ist Σ_A ein Geradenbüschel. Die Abbildung σ' kann dann als Produkt von Perspektivitäten

$$G[P_0',E_0'] \;\bar{\wedge}\; G[A,A^{\nu}] \;\bar{\wedge}\; G[P_1',E_1']$$

geschrieben werden, was sie als Projektivität erweist. Nach Konstruktion ist σ' eine Sylvester-Erzeugung von $\Sigma(\sigma)$.

Die Gültigkeit der letzten Aussage von Satz 3 folgt aus 2.3. □

Der Beweis von Satz 3 zeigt, in welcher Weise bei nicht kommutativem Grundkörper die Menge der Sylvester-Erzeugungen von Σ eingeschränkt ist: Genau die Paare verschiedener Punkte der Z-Kette $k_Z\subset t$ können als Grundpunkte herangezogen werden. Die Z-Kette k_Z ist daher allein durch die Geradenmenge Σ bestimmt und hängt nicht von der Auswahl einer Sylvester-Erzeugung ab. Dual läßt sich k_Z^* beschreiben.

3.3. Die folgende Begriffsbildung dient der Beschreibung automorpher Kollineationen eines Gewindes: Eine geordnete Fundamentalmenge $(Q_0,\ldots,Q_3,Q)$ heißt Σ-angepaßt, wenn gilt

(I) Q_0 und Q_1 sind Grundpunkte bzgl. Σ,

(II) Q ist regulärer Punkt bzgl. Σ,

(III) Q_1Q_2, Q_0Q_3 sowie die beiden Treffgeraden durch Q an Q_1Q_2 und Q_0Q_3 bzw. Q_0Q_2 und Q_1Q_3 gehören Σ an.

Die im Beweis von Hilfssatz 1 angegebenen Punkte $P_0,\ldots,P_3,P$ bilden – in dieser Reihenfolge – eine Σ-angepaßte Fundamentalmenge[4].

SATZ 4. Eine automorphe Kollineation $\varkappa \in P\Gamma L(P)$ eines Gewindes $\Sigma(\sigma)$ ist dadurch gekennzeichnet, daß sie eine Σ-angepaßte, geordnete Fundamentalmenge in eine ebensolche Fundamentalmenge überführt.

Beweis. (1) Für $\Sigma^{\varkappa}=\Sigma$ gehen wir von den im Beweis von Hilfssatz 1 festgelegten Punkten $P_0,\dots,P_3,P$ aus. Wegen $\Sigma=\Sigma(\varkappa^{-1}\sigma\varkappa)$ sind $P_0^{\varkappa}$ und $P_1^{\varkappa}$ Grundpunkte bzgl. Σ und mit P ist auch $P^{\varkappa}$ regulär bzgl. Σ. Damit ist aber $(P_0^{\varkappa},\dots P_3^{\varkappa},P^{\varkappa})$ ein Σ-angepaßtes Quintupel.

(2) Seien $(P_0',\dots,P_3',P')$ und ihr $\varkappa$-Bild zwei Σ-angepaßte, geordnete Fundamentalmengen; nach Satz 2 existiert eine Sylvester-Erzeugung σ' des Gewindes Σ, welche wir in der Form $\sigma'(P_1'P_2',P_0'P_3',l',P_0'P_1')$ ansetzen können; dabei bezeichne l' die Treffgerade durch P' an $P_0'P_1'$ und $P_2'P_3'$. In gleicher Weise legt $(P_0'^{\varkappa},\dots,P_3'^{\varkappa},P'^{\varkappa})$ eine Sylvester-Erzeugung σ'' von Σ fest. Aus $\sigma''=\varkappa^{-1}\sigma\varkappa$ folgt $\Sigma=\Sigma(\sigma')=\Sigma(\sigma'')=\Sigma^{\varkappa}$. $\square$

Das bekannte Transitivitätsverhalten der projektiven Gruppe PGL(P) liefert nun

SATZ 5. Die Gruppe $PGL(P,\Sigma)$ aller automorphen projektiven Kollineationen eines Gewindes Σ operiert transitiv auf der Menge der Σ-angepaßten, geordneten Fundamentalmengen von P.

3.4. Falls der Grundkörper K einen Antiautomorphismus gestattet, gibt es auch automorphe Dualitäten von Σ, wie die Verkettung einer beliebigen Dualität δ mit einer geeigneten Kollination $\varkappa$ zeigt; dabei ist $\varkappa$ so zu wählen, daß das Gewinde Σ^{δ} in Σ übergeht, was nach Satz 2 stets möglich ist.

Literatur:

[1] Benz, W.: Vorlesungen über Geometrie der Algebren, Grundlehren Bd.197, Berlin-Heidelberg-New York, Springer, 1973.
[2] Brauner, H.: Geometrie projektiver Räume I, Mannheim-Wien-Zürich, BI-Wissenschaftsverlag, 1976.
[3] Brauner, H.: Geometrie projektiver Räume II, Mannheim-Wien-Zürich, BI-Wissenschaftsverlag, 1976.
[4] Burau, W.: Mehrdimensionale projektive und höhere Geometrie, Berlin, VEB Dt. Verlag d.Wissenschaften, 1961.
[5] Dieudonné, J.: La Géométrie des Groupes Classiques, Berlin-Heidelberg-New York, Springer, 1971.
[6] Havlicek, H.: Zur Theorie linearer Abbildungen II, J.Geometry 16, 168-180 (1981).
[7] Havlicek, H.: Applications of Results on Generalized Polynomial Identities in Desarguesian Projective Spaces, in: R.Kaya, P.Plaumann, K.Strambach (eds.): Rings and Geometry, Dordrecht, D.Reidel, 1985.
[8] Hirschfeld, J.W.P.: Finite Projective Spaces of Three Dimensions, Oxford, Clarendon Press, 1985.

[9] Krüger, W.: Regelscharen und Regelflächen in dreidimensionalen desarguesschen Räumen, Math.Z.93, 404-415 (1966).
[10] Müller, K.P.: Zur Geometrie der symplektischen Gruppe im reellen dreidimensionalen Raum, Diss.Univ.Stuttgart, 1970.
[11] Riesinger, R.: Entartete Steinerkegelschnitte in nichtpapposschen Desarguesebenen, Monatsh.Math.89, 243-251 (1980).
[12] Segre, B.: Lectures on Modern Geometry, Roma, Ed.Cremonese, 1962.

Anschrift des Autors:
Hans Havlicek
Institut für Geometrie
Technische Universität
Wiedner Hauptstraße 8-10
A-1040 Wien
Österreich

Fußnoten:

[1] Bei kommutativem Grundkörper K ist die Gruppe der automorphen Kollineationen eines Gewindes die bekannte Gruppe $P\Gamma Sp_4(K)$ [5,19]. Eine ausführliche Diskussion für reelle Räume enthält [10]. Vgl. auch [4,388].
[2] Wegen (2) gilt $t=t'$. Mit DV bezeichnen wir ein Doppelverhältnis.
[3] In der reellen Liniengeometrie ist die Bezeichnung Komplexkurve üblich.
[4] Bei Char $K \neq 2$ könnte man auch sechs Geraden analog den in [1,41] betrachteten Lie-Figuren zur Beschreibung automorpher Kollineationen eines Gewindes heranziehen, wobei allerdings gewisse Schnittpunkte dieser Geraden regulär bzw. Grundpunkte sein müssen.