

Von der Darstellenden Geometrie zu Kartenentwürfen am Personal Computer

Von Hans HAVLICEK (Wien)

1. Die Erde ist keine *Kugel*. Selbst wenn wir topographische Details (Bödele, Leithagebirge, Mount Everest,...) außer Acht lassen, ist eine Kugel nur eine schlechte Annäherung für die Form der Erde. Besser geeignet ist ein *abgeplattetes Drehellipsoid*. Es gibt eine Reihe von international standardisierten *Erdellipsoiden*, die in der *Geodäsie*¹ und in amtlichen Kartenwerken Verwendung finden. Vgl. etwa [3], [8]. Das in Österreich benützte Erdellipsoid von Friedrich Wilhelm Bessel (1784-1846) stammt aus dem Jahre 1841 und hat den Äquatorradius bzw. Abstand Erdmitte - Pol

$$a = 6\,377\,397,15550 \text{ m bzw. } b = 6\,356\,078,96325 \text{ m.}$$

Der Vergleich des Äquatorumfangs ($= 2\pi a$) mit dem Umfang einer Meridianellipse ($\approx (3(a+b)/2 - \sqrt{ab})\pi$) ist eine nette Übungsaufgabe. Im Gegensatz zur Geodäsie kann für die *Geographie* doch von der Kugelgestalt der Erde ausgegangen werden, da die Abplattung $(a-b) : a \approx 1 : 299,15$ (für das Bessel-Ellipsoid) bei den üblichen kleinen Maßstäben kaum noch merkbar ist.

Ein *Globus* ist ein instruktives aber unhandliches Modell der Erdkugel. Wir fragen daher nach Abbildungen der Kugeloberfläche (oder eines Teiles davon) in eine Ebene. Solche Abbildungen heißen *Kartenentwürfe*, das Bild des dargestellten Kugelteils heißt eine *Karte*. Oft wird auch von *Kartenprojektionen* gesprochen, obwohl im geometrischen Sinn gar keine Projektionen vorliegen. Da eine Kugel nicht zu den abwickelbaren Flächen gehört, ist jede Karte mehr oder weniger verzerrt. Es ist ein zentrales Anliegen der Kartenentwurfslehre, die Verzerrungen unter gegebenen Nebenbedingungen möglichst klein zu halten.

Zur Beschreibung der Lage eines Punktes der Erdkugel dienen dessen *geographische Länge* λ und *geographische Breite* β ($-90^\circ \leq \beta \leq 90^\circ$, $-180^\circ < \lambda \leq 180^\circ$), wobei negative Vorzeichen für westliche Länge und südliche Breite verwendet werden (*Kugelkoordinaten*). Die geographische Länge der Pole ist unbestimmt. Im Gegensatz zum physikalisch ausgezeichneten Äquator ($\beta=0^\circ$) ist der *Nullmeridian* ($\lambda=0^\circ$) willkürlich gewählt: Es ist jener Halbmeridian, der durch das Observatorium von *Greenwich* (England) läuft. Auf älteren Karten findet sich oft der Nullmeridian von *Ferro* (auch *Hierro*), einer kanarischen Insel.

Anstelle der riesigen Erdkugel verwenden wir ein passend verkleinertes Modell, dessen Radius wir als Längeneinheit verwenden. Neben den Kugelkoordinaten benötigen wir auch ein *kartesisches* (x,y,z) -*Rechtssystem*, das so gewählt wird, daß der Ursprung U in die Kugelmitte fällt, $(1,0,0)$ der Schnittpunkt von Nullmeridian und Äquator ist, und der Nordpol N die Koordinaten $(0,0,1)$ hat. Ein Kugelpunkt $P(\lambda, \beta)$ hat dann die Raumkoordinaten

$$(1) \quad x = \cos\lambda \cos\beta, \quad y = \sin\lambda \cos\beta, \quad z = \sin\beta.$$

In der Bildebene verwenden wir neben einem *kartesischen* (\bar{x}, \bar{y}) -*System* noch *Polarkoordinaten* (r, φ) mit $0 \leq r$, $-180^\circ < \varphi \leq 180^\circ$ und der Kopplung

$$(2) \quad \bar{x} = r \cos\varphi, \quad \bar{y} = r \sin\varphi.$$

2. Von der Darstellenden Geometrie her ist es naheliegend die Kugel mittels einer *Normalprojektion* abzubilden, wofür der Name *orthographische Projektion*² üblich ist. Sie wird *Thales von Milet* (etwa 640-546 v. Chr.) zugeschrieben. Wir untersuchen zunächst nur die Normalprojektion auf die Tangentialebene π im Nordpol N . Dabei gehe das (x,y) -System der Äquatorebene durch die Schiebung $U \mapsto N$ in das (\bar{x}, \bar{y}) -System über; wir betrachten jene Seite der Bildebene, die von der Kugel weg weist. Mit Kugelkoordinaten (λ, β) eines Kugelpunktes und Polarkoordinaten (r, φ) seines Bildes erhalten wir die Abbildungsgleichungen

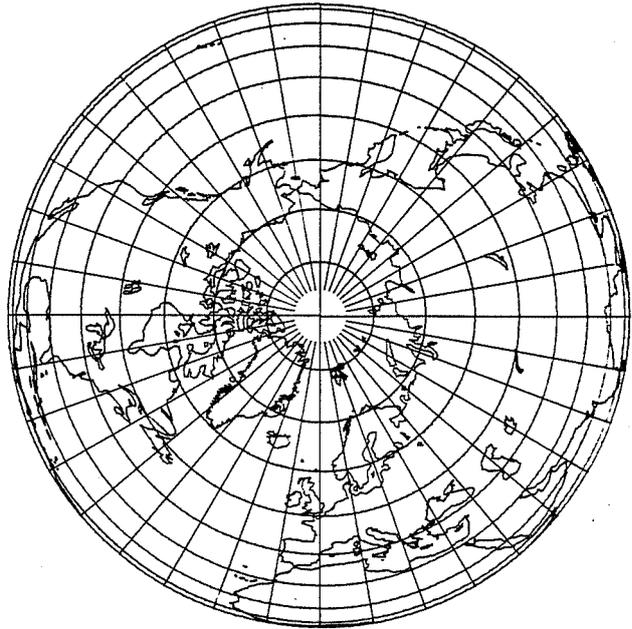
¹ Ursprüngliche griechische Bedeutung: *Feldteilungskunde*.

² *Orthographie* (gr.): *Rechtschreibung, Aufriß*.

$$(3) \quad r = \cos\beta, \quad \varphi = \lambda.$$

Nur die Nordhalbkugel wird seitenrichtig abgebildet, der Äquator ist eine natürliche Grenze des Entwurfs. Die orthographische Projektion wird für Landkarten kaum eingesetzt, eher für räumliche Ansichten der Erdkugel, etwa zu Beginn von TV-Weltnachrichten. Mondkarten in dieser Projektion kommen vor, weil sie fast das Bild des von der Erde aus gesehenen Mondes wiedergeben.

Für eine Landkarte ist die Lage der Erdkugel im Weltall ebensowenig interessant, wie die Tatsache, ob der Karte eine Projektion zugrunde liegt oder nicht. Wichtig ist hingegen, daß es möglich ist, aus der Karte in einfacher Weise Rückschlüsse auf die Kugel zu ziehen. Der Entwurf (3) hat die Eigenschaft, daß alle Breitenkreise *längentreu* abgebildet werden. Die Bogenlänge eines Breitenkreises nennen die Seeleute *Abweitung*, die Projektion (3) ist mithin *abweitungstreu*.

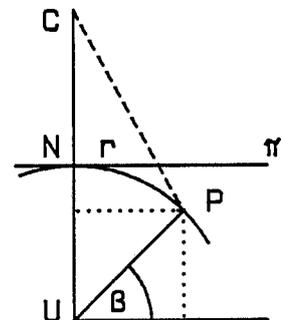


Orthographische Projektion

Betrachten wir nun eine *Zentralprojektion* durch ein Zentrum $C(0,0,c)$, $c \neq 1$, auf die Ebene π ($z = 1$). Ein solcher *perspektiver Entwurf* hat nach dem Strahlensatz bezüglich der oben betrachteten Koordinatensysteme die Abbildungsgleichungen

$$(4) \quad r = \frac{|c - 1| \cos\beta}{|c - \sin\beta|}, \quad \varphi = \lambda$$

und bildet eine Umgebung des Nordpols seitenrichtig ab; dabei wird jedoch für $c \leq 1$ mit der üblichen Konvention gebrochen, daß das Projektionszentrum und der Betrachter auf derselben Seite der Bildebene sind. Je nach der Lage von C stellt jener Breitenkreis der Kugel, der von der Verschwindungsebene oder der Polarebene von C ausgeschnitten wird, eine natürliche Grenze des Entwurfs dar. Es gibt zwei wichtige Sonderfälle (vgl. auch [2], [6], [12]):



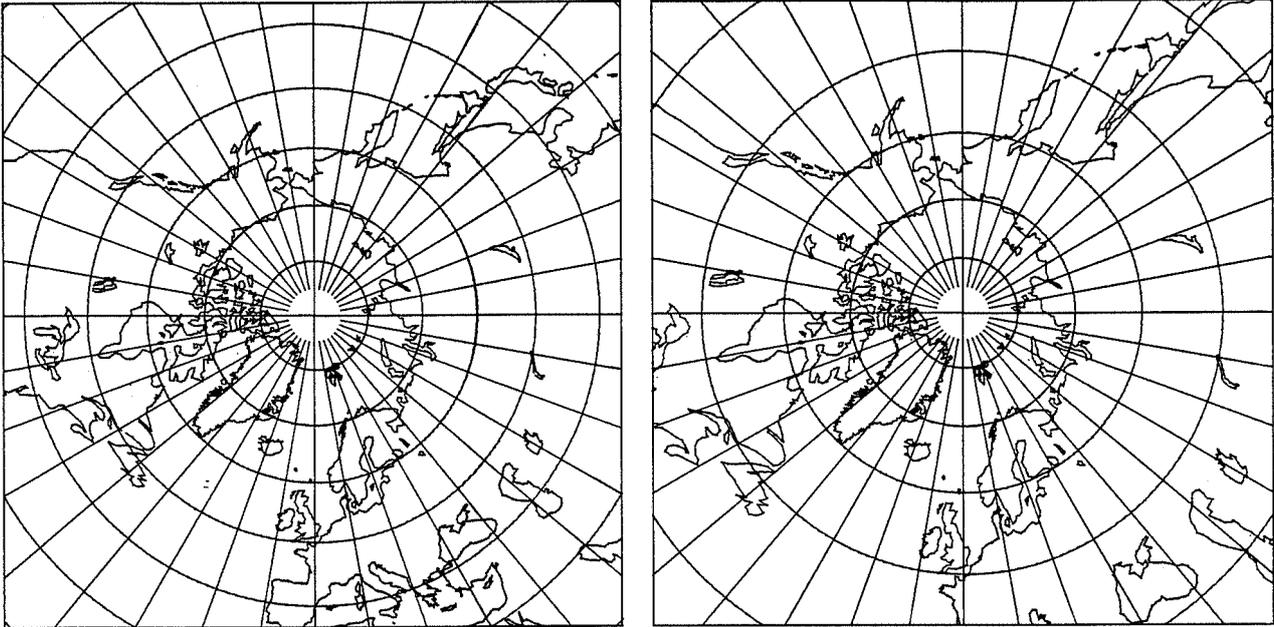
Die *stereographische Projektion*³ ($c = -1$) war schon Hipparch von Nicäa (160-125 v. Chr.) bekannt und ist *winkeltreu* (*konform*, *orthomorph*) und *kreistreu*; bloß Kreise durch das Projektionszentrum C werden auf Geraden abgebildet. Die Kreistreue wurde erst im 13. Jahrhundert durch Jordanus Nemorarius bewiesen, die Konformität endlich entdeckte Gerhard Kremer (1512-1594), besser bekannt unter seinem latinisierten Namen Mercator. Letzterer hat übrigens die Bezeichnung *Atlas* für eine Landkartensammlung eingeführt.

Für $c = 0$ erhalten wir die *gnomonische* (auch *orthodromische*) *Projektion*⁴: Ihre geometrische Bedeutung liegt darin, daß *geodätische Kurven* (*Orthodromen*) der Kugel, also Großkreisbogen, in geradlinige und damit ebenfalls geodätische Kurven der Karte übergehen. Da ein *kürzester Weg* zwischen zwei Punkten einer Fläche immer längs einer geodätischen Linie verläuft, erscheint in dieser Karte eine kürzeste Verbindung irgendzweier Kugelpunkte geradlinig. Darauf hat wohl erstmalig der Schiffskapitän Samuel Sturmy im Jahre 1679 hingewiesen. Wenige Jahre später (1691) beschäftigte sich auch Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) mit dieser Eigenschaft der gnomonischen Projektion. Deren großer

³ Stereo- (gr.) in Zusammensetzungen: *Fest-*, *Körper-*. Der wenig treffende Name *stereographische Projektion* stammt von Aguilionius (1613).

⁴ *Gnomon* (gr.): *Sonnenzeiger*, *Sonnenuhrzeiger*. Der Entwurf wurde zum Zeichnen von Sonnenuhren benützt. *Dromos* (gr.): *Rennbahn*, *Orthodromie* (gr.): "Geradelauf" der Schiffe. Bekanntere Zusammensetzungen des Wortes Dromos sind *Kosmodrom* und *Autodrom*.

Nachteil ist ihre starke Verzerrung, die mit Annäherung zum Äquator drastisch ($r = \cot\beta$) zunimmt. Der Äquator selbst hat kein Bild.



Stereographische und gnomonische Projektion

Andere perspektive Entwürfe sind vom theoretischen Standpunkt unbedeutend. Eine gewisse praktische Bedeutung haben perspektive Entwürfe in den letzten Jahrzehnten durch Satellitenphotos der Erde erlangt. Geostationäre Satelliten (z.B. zur Wetterbeobachtung) stehen allerdings nicht über dem Nordpol sondern ca. 36 000 km über dem Äquator.

3. Alle bisher besprochenen Kartenentwürfe sind Beispiele sogenannter *azimutaler Entwürfe*⁵ mit *normaler Lage* der *Entwurfsachse* (vgl. Abschnitt 4). Sie sind durch Abbildungsgleichungen der Form

$$(5) \quad r = \rho(\beta) \text{ mit } \rho(90^\circ) = 0, \quad \varphi = \lambda$$

gekennzeichnet. Jeder solche Entwurf ist im Nordpol winkeltreu. Setzen wir

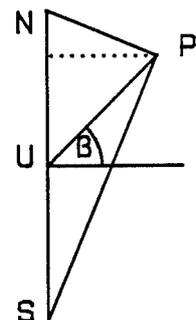
$$(6) \quad \rho(\beta) = \text{arc}(90^\circ - \beta),$$

so erhalten wir den *abstandstreuen azimutalen Entwurf*. Alle Längengrade und damit alle Abstände vom Nordpol erscheinen *unverzerrt*. Nur der Südpol *S* hat kein Bild, allerdings ist schon die Darstellung der Südhalbkugel kaum brauchbar. Der Entwurf geht auf Ptolemäus (87-165 n. Chr.) zurück und wurde in der Neuzeit schon 1524 von Giovanni Vespucci, einem Neffen von Amerigo Vespucci⁶, angewandt. Gelegentlich wird dieser Entwurf nach Guillaume Postel benannt, der ihn 1581 für eine Landkarte benutzte.

Schließlich wollen wir die Funktion ρ so bestimmen, daß der Entwurf *flächentreu* (*äquivalent, isomer*) wird. Vergleichen wir den Flächeninhalt einer von einem Breitenkreis berandeten Kugelkalotte durch *N* mit dem Flächeninhalt ihres Bildes (einer Kreisscheibe), so folgt $2\pi(1 - \sin\beta) = \pi\rho^2(\beta)$ für alle $\beta \in [-90^\circ, 90^\circ]$, also die *notwendige Bedingung*

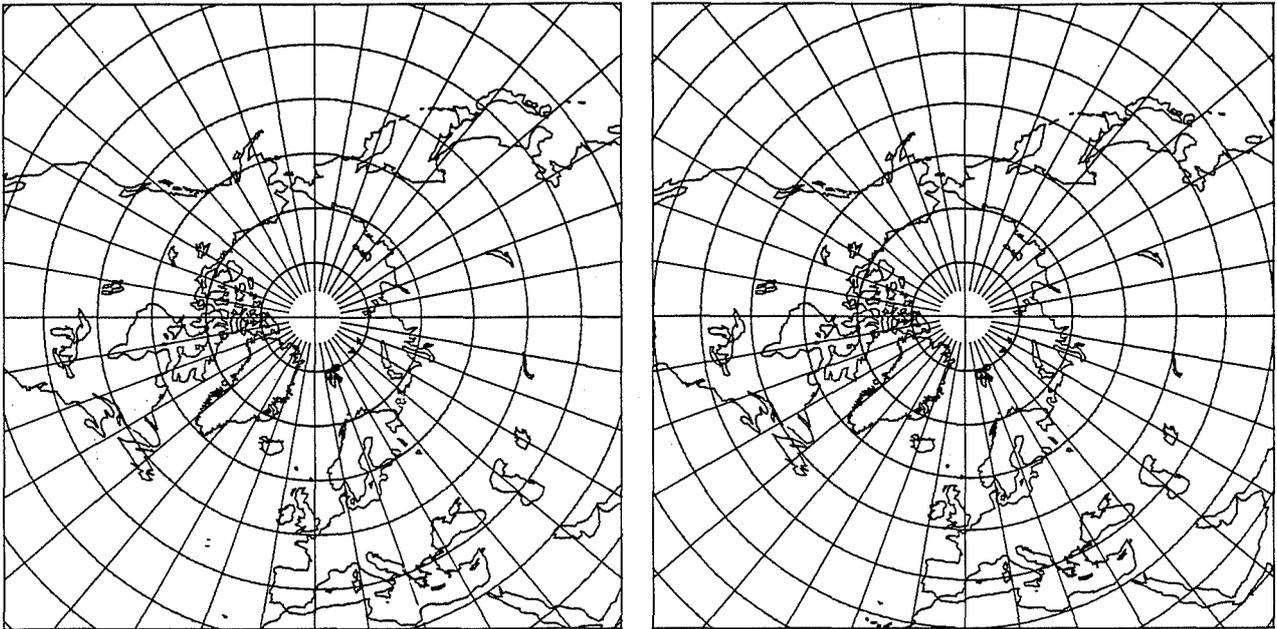
$$(7) \quad \rho(\beta) = \sqrt{2(1 - \sin\beta)}.$$

Wir übergehen den Beweis, daß (7) tatsächlich einen flächentreuen Entwurf liefert. Vgl. etwa [3]. Dieser Entwurf wurde 1772 von Johann Heinrich Lambert (1728-1777) angegeben und ist auch konstruktiv leicht nachvollziehbar (vgl. Figur). Im rechtwinkligen Dreieck *NPS* gilt nach dem Kathetensatz $NP = \sqrt{2(1 - \sin\beta)}$.



⁵Das Wort *Azimuth* kommt aus dem Arabischen und bezeichnet jenen Winkel, den eine Tangente der Erdkugel in ihrem Berührungspunkt mit der Nordrichtung einschließt.

⁶Aus dessen Namen leitet sich die Bezeichnung *Amerika* her.



Abstandstreuer und flächentreuer azimutaler Entwurf

Abschließend nennen wir ohne Herleitung einige Daten zur *Längenverzerrung*. Es bezeichne c die Länge einer Kurve, die ganz der Kalotte $\beta \geq 80^\circ$ bzw. $\beta \geq 70^\circ$ angehört, und \bar{c} die Länge ihrer Bildkurve. Für den Quotienten $q = \bar{c}/c$ gilt dann:

Entwurf	$\beta \geq 80^\circ$	$\beta \geq 70^\circ$
orthographische Projektion	$0,9848 \leq q \leq 1,0000$	$0,9397 \leq q \leq 1,0000$
stereographische Projektion	$1,0000 < q \leq 1,0077$	$1,0000 < q \leq 1,0311$
gnomonische Projektion	$1,0000 < q \leq 1,0311$	$1,0000 < q \leq 1,1325$
abstandstreuer azimutaler Entwurf	$1,0000 \leq q \leq 1,0051$	$1,0000 \leq q \leq 1,0206$
flächentreuer azimutaler Entwurf	$0,9962 \leq q \leq 1,0038$	$0,9848 \leq q \leq 1,0154$

Die Tabelle zeigt klar, daß der flächentreue azimutale Entwurf die weitaus günstigsten Verzerrungswerte besitzt. Vielen Karten im Österreichischen Atlas für Höhere Schulen liegt dieser Entwurf ("*Flächentreue Azimutalprojektion*") zugrunde.

4. Die vorgestellten Entwürfe waren bisher an die Tangentialebene π im Nordpol gebunden. Ersetzen wir nun π durch eine beliebige Kugeltangentialebene τ mit Berührungspunkt T , so kann die geometrische Konstruktion für den jeweiligen Entwurf unmittelbar übertragen werden. Die Verbindungsgerade von T mit der Kugelmittle U heißt die *Entwurfsachse*. Je nachdem ob TU durch einen Pol der Kugel geht, in der Äquatorebene liegt, oder allgemeine Lage hat, spricht man von einem *normalachsigen* bzw. *querachsigen* bzw. *schiefachsigen* Entwurf.

Zur rechnerischen Behandlung führen wir bei $T \neq N$ neue Kugelkoordinaten $(\tilde{\lambda}, \tilde{\beta})$ und ein neues $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ -Rechtssystem ein. Es seien (t_x, t_y, t_z) die alten kartesischen Koordinaten von T , die sich aus den geographischen Koordinaten von T nach Formel (1) berechnen.

Falls T nicht in den Südpol S fällt, hat das $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ -System seinen Ursprung in U und besitzt die Einheitspunkte (mit alten Koordinaten)

$$\begin{aligned}
 \tilde{Z} = T &: (t_x, t_y, t_z) =: \tilde{z}, \\
 (8) \quad \tilde{X} &: (t_x^2 + t_y^2)^{-1/2} (-t_y, t_x, 0) =: \tilde{x}, \\
 \tilde{Y} &: (t_x^2 + t_y^2)^{-1/2} (-t_x t_z, -t_y t_z, (t_x^2 + t_y^2)^{-1/2}) = \tilde{z} \times \tilde{x} =: \tilde{y}.
 \end{aligned}$$

Hat ein Kugelpunkt P den alten Koordinatenvektor $p = (p_x, p_y, p_z)$, so ist

$$(9) \quad \tilde{p} = (\tilde{p}_x, \tilde{p}_y, \tilde{p}_z) := (p \cdot \tilde{x}, p \cdot \tilde{y}, p \cdot \tilde{z})$$

der neue Koordinatenvektor, und die neuen Kugelkoordinaten berechnen sich zu

$$(10) \quad \tilde{\lambda} = \arctan(\tilde{p}_y / \tilde{p}_x) = \operatorname{arccot}(\tilde{p}_x / \tilde{p}_y), \quad \tilde{\beta} = \arcsin(\tilde{p}_z).$$

Die Formel für $\tilde{\lambda}$ versagt, falls P mit T oder dessen Gegenpunkt zusammenfällt.

Falls T im Südpol liegt, rechnen wir direkt gemäß

$$(11) \quad \tilde{\lambda} = -\lambda, \quad \tilde{\beta} = -\beta$$

auf neue Kugelkoordinaten um und bestimmen das neue räumliche Koordinatensystem wie in Abschnitt 1 ausgehend von (λ, β) .

Die neuen Koordinaten (λ, β) werden auch *Netzlänge* und *Netzbreite* genannt. Treten diese Koordinaten an die Stelle von (λ, β) , so gelten die Abbildungsgleichungen (3) - (7) unverändert, wenn wir das (\bar{x}, \bar{y}) -System der Bildebene jetzt durch die Schiebung $U \mapsto T$ aus dem (x, y) -System gewinnen.

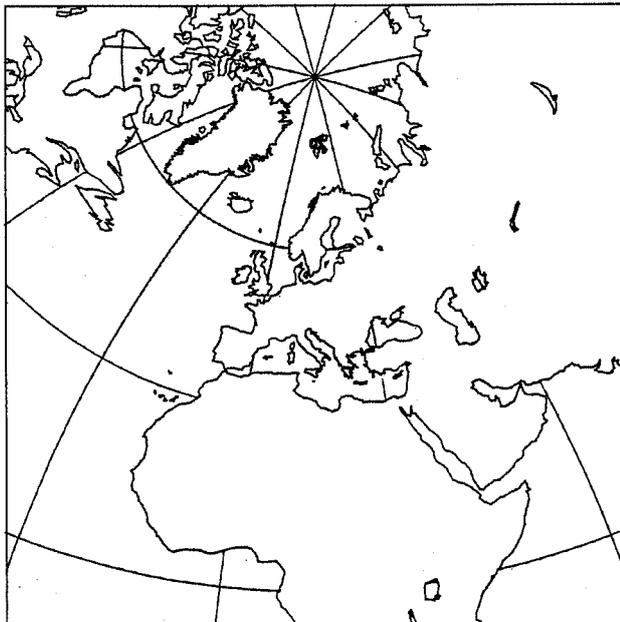
Bei den folgenden Zeichnungen ist jeweils die Länge und Breite von T in Klammern angegeben.



Flächentreuer azimutaler Entwurf (0, 0)



Orthographische Projektion (140, -20)



Stereographische Projektion (15, 48)



Abstandstreuer azimutaler Entwurf (87, 28)

5. Mit den bisherigen Untersuchungen haben wir das mathematische Rüstzeug zur rechnergestützten Konstruktion von Karten, etwa mit einem Personal Computer. Die nötigen Transformationen sind

$$(12) \quad (\lambda, \beta) \xrightarrow{(1)} (p_x, p_y, p_z) \xrightarrow{(9)} (\tilde{p}_x, \tilde{p}_y, \tilde{p}_z) \xrightarrow{(10)} (\tilde{\lambda}, \tilde{\beta}) \xrightarrow{(*)} (r, \varphi) \xrightarrow{(2)} (\bar{x}, \bar{y}),$$

wobei (*) die gewünschten Abbildungsgleichungen bezeichnet. Es ist nicht zweckmäßig hier händisch zu substituieren und so wahre Monsterausdrücke zu

generieren. Besser sind kleine *Unterprogramme*, die jeweils eine Transformation durchführen. Für $T = N$ oder $T = S$ verkürzt sich der Rechenaufwand.

Probleme macht naturgemäß die Berechnung von λ in (10) bereits nahe T bzw. nahe dessen Gegenpunkt. Im ersten Fall kann λ *willkürlich* gewählt werden; (*) liefert in jedem Fall $r \approx 0$, sodaß der Wert für $\varphi = \lambda$ belanglos ist. Im Gegenpunkt von T ist der Situation so nicht beizukommen. Hier sollte eine kleine Kalotte rund um diesen Punkt von Rechnung und Zeichnung ausgeschlossen werden. Zu diesem Zweck werden die Punktkoordinaten durch ein Unterprogramm ausgesiebt. Eine solche Routine ist auch dann einzusetzen, wenn nur ein Kugelteil gezeichnet werden soll.

Zum Zeichnen des *Gradnetzes* können die Eingangsdaten (λ, β) in (12) aus zwei ineinander verschachtelten FOR-NEXT Schleifen kommen. Für die Längengrade läuft λ in der äußeren Schleife etwa in 10° -, 20° - oder 30° -Schritten, in der inneren Schleife läuft β mit kleiner Schrittweite. Bei den Breitenkreisen tauschen λ und β ihre Rollen.

Sollen *Küstenlinien*, *politische Grenzen* oder ähnliches gezeichnet werden, so wird eine einfache *Datenbank* (*sequentielle Punkteliste*) benötigt. Bewährt haben sich hier *ASCII-Files*, da sie mit den üblichen *Textverarbeitungsprogrammen* editiert werden können. Jede Eintragung umfaßt einen *Steuercode* und ein Paar (λ, β) . Der Steuercode gibt an, ob der betreffende Punkt ein Anfangs- oder Folgepunkt des zu zeichnenden Polygons ist, steuert also, ob das Programm einen MOVE- oder DRAW-Befehl veranlassen soll. Das Einlesen der Daten kann in einer WHILE-WEND Schleife mit der Abbruchbedingung END OF FILE organisiert werden. Zweckmäßigerweise werden die Daten vor dem Programmablauf von Diskette oder Festplatte auf eine *virtuelle Platte* im Arbeitsspeicher (RAMDISK.SYS, VDISK.SYS) kopiert um die Zugriffszeit zu verbessern.

Den Illustrationen dieses Artikels liegt eine Punkteliste für Küstenlinien mit ca. 9 000 Eintragungen zugrunde, die mittels eines *Digitalisiertabletts* erstellt wurde. Aber auch schon mit bedeutend größerer Auflösung lassen sich schöne Ergebnisse erzielen. Vgl. etwa die Illustrationen in [9].

Literatur:

- [1] BREUSING, A.: Das Verebnen der Kugeloberfläche für Gradnetzentwürfe, Leipzig, Wagner & Debes, 1892.
- [2] HOHENBERG, F.: Konstruktive Geometrie in der Technik, 3. Aufl., Wien - New York, Springer, 1966.
- [3] HOSCHEK, J.: Mathematische Grundlagen der Kartographie, 2. Aufl., Mannheim - Wien - Zürich, BI - Wissenschaftsverlag, 1984.
- [4] KOPP, G.: Mathematische Geographie im Geometrischen Zeichnen I, II, IBDG Jg. 4, 47 - 50 (1985) und IBDG Jg. 5, 45 - 48 (1986).
- [5] MAYRHOFER P., J.P. TSCHUPIK: Geometrische Ermittlung der Sonnen-deklination, IBDG Jg. 1, 31 - 36 (1982).
- [6] MÜLLER, E., E. KRUPPA: Lehrbuch der darstellenden Geometrie, 6. Aufl., Springer, Wien, 1961.
- [7] MÜLLER, T.: Wo liegt der Mount Everest? IBDG Jg. 4, 57 - 59 (1985).
- [8] RICHARDUS P., R.K. ALDER: Map Projections, 2nd ed., Amsterdam, North Holland, 1974.
- [9] SCHUPPAR, B.: Kartographie mit dem Tischcomputer, Didaktik d. Math. 1, 43 - 64 (1982).
- [10] STACHEL, H.: Landkarten in der Darstellenden Geometrie, IBDG Jg. 2, 24 - 29 (1983).
- [11] STRUBECKER K., G. SCHEFFERS: Wie findet und zeichnet man Gradnetze von Land- und Sternkarten? 2. Aufl., Stuttgart, Teubner, 1956.
- [12] WUNDERLICH, W.: Darstellende Geometrie II, Mannheim, BI - Hochschul-taschenbücher Verlag, 1967.
- [13] ZÖPPRITZ, K., A. BLUDAU: Leitfaden der Kartenentwurfslehre, Leipzig - Berlin, Teubner, 1912.

Weitere einschlägige Literatur kann [3] entnommen werden.