Eine affine Beschreibung von Ketten

Hans Havlicek, Wien

1. Einleitung

Aus jeder Kettengeometrie $\Sigma(K,\mathcal{L})$ läßt sich in bekannter Weise nach Auszeichnung eines Punktes der affine Raum $A(K,\mathcal{L})$ ableiten. (Wir schließen uns den Begriffsbildungen aus [1] an.) Im vorliegenden Aufsatz wird eine geometrische Beschreibung der Menge der eigentlichen (affinen) Punkte von Ketten angegeben. In den drei klassischen Kettengeometrien $\Sigma(\mathbb{R},\mathcal{L})$ mit $\mathcal{L}=\mathbb{C},\mathbb{A},\mathbb{D}$ erhält man neben Geraden noch Ellipsen bzw. Hyperbeln bzw. Parabeln. Für die fünf dreidimensionalen reellen Kettengeometrien ermittelte H.J.SAMAGA [3],[9],[10] die affinen Ausschnitte der Ketten mit Hilfe einer von W.BENZ [1,S.315],[2] angegebenen Methode; außer Geraden treten noch Kegelschnitte und Kubiken, also reelle Normkurven auf.

Unter Benützung von projektiven Bündelisomorphismen lassen sich Normkurven in endlichdimensionalen projektiven Desargues-Räumen erklären [8]. Da jedoch eine Normkurve aus "sehr wenigen" Punkten bestehen kann, ist es nicht stets möglich von einer Normkurve auf ihre Erzeugung zurückzuschließen. Es ist daher zweckmäßig, nicht Normkurven, sondern die sie definierenden Abbildungen (Normisomorphismen) in den Vordergrund zu stellen. Vgl. [6].

Nach projektiver Erweiterung des affinen Raumes $A(K,\mathcal{L})$ betrachten wir eine Klasse von projektiven Bündelisomorphismen, welche eng mit der Winkelmessung in $\Sigma(K,\mathcal{L})$ zusammenhängen und durch die Algebra $(K,\mathcal{L})$ bestimmt sind. Die Menge der Nichtfernpunkte der durch diese projektiven Bündelisomorphismen erzeugten Punktmengen (im endlichdimensionalen Fall liegen Normkurven vor) sind dann genau die affinen Ausschnitte jener Ketten, welche mindestens zwei eigentliche Punkte besitzen.

2. Die Algebra $(K,\mathcal{L})$

2.1. Im folgenden ist $\mathcal{L}$ ein kommutativer Ring, $K\subset\mathcal{L}$ ein von $\mathcal{L}$ verschiedener Körper und $1\in K$ ein Einselement von $\mathcal{L}$. Wir bezeichnen die Einheitengruppe von $\mathcal{L}$ mit $\check{\mathfrak{U}}$ und setzen $\mathfrak{J}^\times := \mathfrak{J}\setminus\{0\}$ für alle $\mathfrak{J}\subset\mathcal{L}$; der nicht notwendig endlichdimensionale Vektorraum $(K,\mathcal{L})$ ist dann eine kommutative und assoziative Algebra, welche zur Definition geometrischer Strukturen herangezogen wird.

2.2. Der affine Raum $A(K,\mathcal{L})$ [1,S.101] besitzt die Punktmenge $\mathfrak{P}=\mathcal{L}$. Die projektive Erweiterung von $A(K,\mathcal{L})$ ist (bis auf Isomorphie) der projektive Raum $\Pi(K,K\oplus\mathcal{L})$ mit der Punktmenge $\bar{\mathfrak{P}} = \{(p,\varphi)K^\times \mid p\in K, \varphi\in\mathcal{L}, (p,\varphi)\neq(0,0)\}$. Die kanonische Einbettung $\bar{\iota}:\mathfrak{P}\to\bar{\mathfrak{P}}$ leistet $\varphi\mapsto(1,\varphi)K^\times$ für alle $\varphi\in\mathfrak{P}$; ihre Bildmenge $\mathfrak{P}\bar{\iota}$ ist die Menge der eigentlichen Punkte von $\bar{\mathfrak{P}}$. Die Punkte der Hyperebene $\{(0,\varphi)K^\times \mid \varphi\in\mathcal{L}^\times\}$ heißen Fernpunkte von $\bar{\mathfrak{P}}$. Ein Fernpunkt $(0,\varphi)K^\times$ wird regulär genannt, falls $\varphi\in\check{\mathfrak{U}}$ gilt.

Jedes Element $\nu\in\mathcal{L}$ definiert einen linearen Endomorphismus f_ν des Vektorraumes $(K,\mathcal{L})$ mit $\varphi\mapsto\nu\varphi$ für alle $\varphi\in\mathcal{L}$. Ist insbesondere $\nu\in\check{\mathfrak{U}}$, so ist f_ν eine Bijektion und induziert in der Fernhyperebene von $\Pi(K,K\oplus\mathcal{L})$ eine projektive Kollineation $\bar{\kappa}_\nu$, die reguläre in reguläre Fernpunkte überführt[1]. Die Menge der regulären Fernpunkte trägt die Struktur einer zu $\check{\mathfrak{U}}/K^\times$ isomorphen kommutativen desarguesschen Inzidenzgruppe [7,S.63]. Gilt $\nu\notin\check{\mathfrak{U}}$, so ist f_ν nicht surjektiv, da $1\in\mathcal{L}$ nicht als Bild auftritt.

Die Kettengeometrie $\Sigma(K,\mathcal{L})$ [1,S.93] hat die Punktmenge $\tilde{\mathfrak{P}} = \{(\varphi_0,\varphi_1)\check{\mathfrak{U}} \mid \varphi_0,\varphi_1\in\mathcal{L}, \langle\varphi_0,\varphi_1\rangle=\mathcal{L}\}$; dabei bezeichnet $\langle\varphi_0,\varphi_1\rangle$ das von φ_0,φ_1 aufgespannte Ideal von $\mathcal{L}$. Nach Auszeichnung des Punktes $\tilde{W} = (0,1)\check{\mathfrak{U}}$ kann die Punktmenge des affines Raumes $A(K,\mathcal{L})$ mittels der Einbettung $\tilde{\iota}:\mathfrak{P}\to\tilde{\mathfrak{P}}$, welche $\varphi\mapsto(1,\varphi)\check{\mathfrak{U}}$ für alle $\varphi\in\mathcal{L}$ leistet, in die Punktmenge der Kettengeometrie $\Sigma(K,\mathcal{L})$ abgebildet werden. Genau die zu $\tilde{W}$ parallelen Punkte (uneigentliche Punkte von $\tilde{\mathfrak{P}}$) treten unter $\tilde{\iota}$ nicht als Bilder auf. Die Punkte der Menge $\mathfrak{P}\tilde{\iota}$ heißen eigentliche Punkte von $\tilde{\mathfrak{P}}$.

Mit jeder Geraden $g=\mathfrak{a}+\mathfrak{b}K$ des affinen Raumes $A(K,\mathcal{L})$ ist $\bar{g} := g\bar{\iota}\cup\{(0,\mathfrak{b})K^\times\}$ eine Gerade von $\Pi(K,K\oplus\mathcal{L})$; ist g regulär [1,S.104], so ergibt $\tilde{g} := g\tilde{\iota}\cup\{(0,1)\check{\mathfrak{U}}\}$ eine Kette von $\Sigma(K,\mathcal{L})$. Zwei reguläre Geraden $g_i=\mathfrak{a}+\mathfrak{b}_iK$ $(i=1,2)$ definieren projektive Geraden mit Fernpunkten $(0,\mathfrak{b}_i)K^\times$ und Ketten mit dem Winkelmaß [1,S.127] $\sphericalangle(\tilde{g}_1,\tilde{g}_2;\mathfrak{a}\tilde{\iota}) = \mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_1^{-1}K^\times$.

[1] Für $\dim(K,\mathcal{L})=2$ ist $\bar{\kappa}_\nu$ eine Projektivität der Ferngeraden.

3. Projektive Bündelisomorphismen

3.1. Sei $\Pi=(\mathfrak{P},\mathfrak{G})$ ein projektiver Desargues-Raum und $(u\Pi,\vee,\cap)$ sein Unterraumverband. Die Menge aller Unterräume durch einen Unterraum $\mathfrak{M}\in u\Pi$ wird mit $u\Pi/\mathfrak{M}$ bezeichnet und ist ein Unterverband von $u\Pi$. Ist $\mathfrak{M}=\{P\}$ einpunktig[2], so heißt $u\Pi/P$ das Bündel um P. Die folgenden Definitionen ordnen sich im endlichdimensionalen Fall den Begriffsbildungen in [6],[8] unter.

Sind P,Q verschiedene Punkte von $\mathfrak{P}$, so heißt ein projektiver Verbandsisomorphismus $\zeta: u\Pi/P \rightarrow u\Pi/Q$ ein projektiver Bündelisomorphismus. Unter dem Erzeugnis c von ζ verstehen wir die Menge aller Punkte, die auf in ζ zugeordneten Geraden liegen. Der Durchschnitt $\mathfrak{P}_1$ aller in ζ selbstzugeordneten Unterräume heißt Grundunterraum von ζ; wir bezeichnen mit $\Pi_1(\mathfrak{P}_1)$ den durch $\mathfrak{P}_1$ bestimmten projektiven Raum. Durch $\mathfrak{T}_P^{(0)}=:P$ und $\mathfrak{T}_P^{(j)}:=(\mathfrak{T}_P^{(j-1)}\vee Q)\zeta^{-1}$ $(j\in\mathbb{N}$, $j<\dim\Pi_1(\mathfrak{P}_1))$ werden j-Schmiegunterräume von ζ in P definiert. Die j-Schmiegunterräume von ζ^{-1} in Q werden auch j-Schmiegunterräume von ζ in Q genannt.

3.2. Ist der Grundunterraum $\mathfrak{P}_1$ von ζ endlichdimensional ($\dim\Pi_1(\mathfrak{P}_1)=$ $=n$), so gehört er für n=1 dem Erzeugnis c von ζ an. Andernfalls ist $\mathfrak{P}_1$ die Punktmenge des projektiven Desargues-Raumes $\Pi_1(\mathfrak{P}_1)$; nach [6] gilt: Die Einschränkung $\zeta_1:=\zeta|(u\Pi_1/P)$ ist ein Normisomorphismus von $\Pi_1(\mathfrak{P}_1)$. In jedem Punkt des Erzeugnisses c_1 von ζ_1 sind j-Schmiegunterräume von ζ_1 $(0\leq j<n)$ erklärt. Diese Schmiegunterräume sind Sehnen von ζ_1. Normisomorphismen mit demselben Erzeugnis und denselben Schmiegunterräumen heißen assoziiert. Die Figuren 1,2,3 zeigen Erzeugnisse projektiver Bündelisomorphismen eines reellen projektiven 3-Raumes.

Wir zeigen für spätere Anwendungen noch folgenden

Hilfssatz. Ist $\Pi_1(\mathfrak{P}_1)$ ein n-dimensionaler projektiver Pappos-Raum und $\mathfrak{T}_R^{(j)}$ der j-Schmiegunterraum von ζ_1 in einem Punkt $R\neq P$, Q $(0\leq j\leq n-2)$, so ist der (j+1)-Schmiegunterraum $\mathfrak{T}_R^{(j+1)}$ von ζ_1 in R die einzige (j+1)-dimensionale Sehne von ζ_1, welche $\mathfrak{T}_R^{(j)}$ umfaßt und keinen von R verschiedenen Punkt des Erzeugnisses c_1 von ζ_1 enthält[3].

Beweis. Der Schmiegunterraum $\mathfrak{T}_R^{(j+1)}$ besitzt die angegebenen

[2] Wir schreiben statt $\{P\}$ auch kurz P.

[3] Vgl. die Definitionen in [5,S.196].

Eigenschaften nach [6,Satz 2],[6,Satz 5], da R regulärer Punkt [6,2.8] von c_1 ist, Zum Beweis der Eindeutigkeit verwenden wir Induktion nach $n=\dim\Pi_1(\mathfrak{P}_1)$.

(1) Ein Normisomorphismus einer projektiven Pappos-Ebene ist eine Steiner-Erzeugung eines Kegelschnitts. Die 1-Schmiegunterräume von ζ_1 sind genau die Kegelschnittstangenten und haben nach [4,S.58,59] die gewünschte Eigenschaft.

(2) Der Normisomorphismus ζ_1 induziert für $n\geq 3$ in $u\Pi_1/R$ den Normisomorphismus $\zeta_R :\!= \zeta_1|(u\Pi_1/PR)$ und die (j+1)-dimensionalen Sehnen von ζ_1 durch R ($j\geq 1$) sind als Elemente von $u\Pi_1/R$ genau die j-dimensionalen Sehnen von ζ_R. Die (j+1)-Schmiegunterräume von ζ_1 in R sind identisch mit den j-Schmiegunterräumen von ζ_R in $\mathfrak{T}_R^{(1)}$. Nach [6,2.3] enthält jede von $\mathfrak{T}_R^{(1)}$ verschiedene geradlinige Sehne von ζ_1 genau einen von R verschiedenen Punkt des Erzeugnisses c_1. Damit ist der Hilfssatz für j=0 gezeigt.

Wir legen durch den j-Schmiegunterraum von ζ_1 in R ($1\leq j\leq n-2$) eine (j+1)-dimensionale Sehne $\mathfrak{m}$ von ζ_1. In $u\Pi/R$ ist $\mathfrak{m}$ eine j-dimensionale Sehne von ζ_R durch den (j-1)-Schmiegunterraum von ζ_R in $\mathfrak{T}_R^{(1)}$. Da $u\Pi/R$ die Dimension n-1 besitzt, enthält $\mathfrak{m}$ nach Induktionsannahme genau dann kein von $\mathfrak{T}_R^{(1)}$ verschiedenes Element des Erzeugnisses von ζ_R und damit keinen von R verschiedenen Punkt von c_1, wenn $\mathfrak{m}$ in $u\Pi/R$ der j-Schmiegunterraum von ζ_R in $\mathfrak{T}_R^{(1)}$, also in $u\Pi$ der (j+1)-Schmiegunterraum von ζ_1 in R ist.□

4. Darstellung von Ketten

4.1. Durch ein Tripel $(\mathfrak{g},\mathfrak{q},\iota K^\times)\in\mathcal{L}\times\mathcal{L}\times\check{\mathfrak{U}}/K^\times$ mit $\mathfrak{g}-\mathfrak{q}\in\check{\mathfrak{U}}$ sind in $\Sigma(K,\mathcal{L})$ die Kette $\tilde{s}:=((1,\mathfrak{g})\check{\mathfrak{U}},(1,\mathfrak{q})\check{\mathfrak{U}},\tilde{W})$ und jene Kette $\tilde{t}$ durch $(1,\mathfrak{q})\check{\mathfrak{U}}$ und $\tilde{W}$, für die $\sphericalangle(\tilde{s}\tilde{t};(1,\mathfrak{q})\check{\mathfrak{U}})=\iota K^\times$ gilt, mitbestimmt. Es existiert dann genau eine Kette $\tilde{c}$ durch $(1,\mathfrak{g})\check{\mathfrak{U}}$ und $(1,\mathfrak{q})\check{\mathfrak{U}}$, welche $\tilde{t}$ in $(1,\mathfrak{q})\check{\mathfrak{U}}$ berührt. Umgekehrt kann jede Kette $\tilde{c}$ mit mindestens zwei eigentlichen Punkten durch mindestens ein solches Tripel eindeutig festgelegt werden[4].

---

[4] Ketten mit genau einem bzw. keinem eigentlichen Punkt existieren dann und nur dann, wenn zu einem Punkt von $\tilde{\mathfrak{P}}$ genau ein bzw. kein nicht paralleler Punkt auf der Kette $\bar{K}:=K\tilde{\cup}\cup\{\tilde{W}\}$ liegt. Dieses Kriterium kann analog zur Bedingung (†) in [1,S.314] auch rein algebraisch formuliert werden.

Die Projektivität $\tilde{\delta}\in PGL(2,\mathcal{L})$, welche
$(\mathfrak{l}_0,\mathfrak{l}_1)\check{\mathfrak{U}}\mapsto(\mathfrak{l}_1-\iota\mathfrak{l}_0,\mathfrak{q}\mathfrak{l}_1-\mathfrak{p}\iota\mathfrak{l}_0)\check{\mathfrak{U}}$ für alle $(\mathfrak{l}_0,\mathfrak{l}_1)\check{\mathfrak{U}}\in\tilde{\mathfrak{P}}$
leistet, führt $\tilde{K}$ in die Kette $\tilde{c}$ über, sodaß gilt

$$\tilde{c}=\{(k_1-\iota k_0,\mathfrak{q}k_1-\mathfrak{p}\iota k_0)\check{\mathfrak{U}}\mid k_0,k_1\in K,(k_0,k_1)\neq(0,0)\}. \qquad (1)$$

Im affinen Raum $A(K,\mathcal{L})$ besitzt daher die Punktmenge $c:=\tilde{c}\tilde{\iota}^{-1}$ die Darstellung

$$c=\{(\mathfrak{q}k-\mathfrak{p}\iota)(k-\iota)^{-1}\mid k\in K,(k-\iota)\in\check{\mathfrak{U}}\}\cup\{\mathfrak{q}\}. \qquad (2)$$

Im projektiven Raum $\Pi(K,K\oplus\mathcal{L})$ definiert das Tripel $(\mathfrak{p},\mathfrak{q},\iota K^\times)$ genau einen projektiven Bündelisomorphismus $\bar{\psi}:u\Pi/(1,\mathfrak{p})K^\times\to u\Pi/(1,\mathfrak{q})K^\times$ mit

$$((1,\mathfrak{p})K^\times\vee(0,\mathfrak{l})K^\times)\mapsto((1,\mathfrak{q})K^\times\vee(0,\iota\mathfrak{l})K^\times) \text{ für alle } \mathfrak{l}\in\mathcal{L}^\times. \qquad (3)$$

Wir nennen $\bar{\psi}$ einen $\check{\mathfrak{U}}/K^\times$-Bündelisomorphismus zum Faktor $\iota K^\times$.

Jeder Kette, welche mindestens zwei eigentliche Punkte besitzt, ist somit eine Klasse von $\check{\mathfrak{U}}/K^\times$-Bündelisomorphismen zugeordnet. Im folgenden setzen wir die Kette $\tilde{c}$ mit der Darstellung (1) voraus.

Satz 1. Die Menge der eigentlichen Punkte des Erzeugnisses $\bar{c}$ des gemäß (3) erklärten $\check{\mathfrak{U}}/K^\times$-Bündelisomorphismus $\bar{\psi}$ ist identisch mit dem Bild der Kette $\tilde{c}$ unter der Einbettung $\tilde{\iota}^{-1}\bar{\iota}:\mathfrak{p}\tilde{\iota}\to\bar{\mathfrak{P}}$. Ein Fernpunkt $(0,\mathfrak{f})K^\times$ gehört genau dann dem Erzeugnis $\bar{c}$ von $\bar{\psi}$ an, falls $\mathfrak{f}\in\mathcal{L}^\times$ im Annulatorideal eines Elementes $(k-\iota)$, $k\in K^\times$ liegt.

Beweis. (1) Die Punktmengen $\bar{c}$ und $\tilde{c}\tilde{\iota}^{-1}\bar{\iota}$ haben die Punkte $(1,\mathfrak{p})K^\times$, $(1,\mathfrak{q})K^\times$ gemeinsam. Für jeden Punkt $(1,\mathfrak{l})\check{\mathfrak{U}}\in\tilde{c}$, $\mathfrak{l}\neq\mathfrak{p},\mathfrak{q}$, schließen die Ketten $\tilde{g}_0:=((1,\mathfrak{p})\check{\mathfrak{U}},(1,\mathfrak{l})\check{\mathfrak{U}},\tilde{W})$ und $\tilde{g}_1:=((1,\mathfrak{q})\check{\mathfrak{U}},(1,\mathfrak{l})\check{\mathfrak{U}},\tilde{W})$ einen Winkel vom Maß $\measuredangle(\tilde{g}_0\tilde{g}_1;(1,\mathfrak{l})\check{\mathfrak{U}})=\iota K^\times$ ein. Das folgt für $\tilde{W}\notin\tilde{c}$ aus dem "Peripheriewinkelsatz" [1,S.130] und ist andernfalls wegen $\tilde{g}_0=\tilde{g}_1=\tilde{c}$ trivial. Nach 2.2 sind dann die projektiven Geraden $\bar{g}_0,\bar{g}_1$ in $\bar{\psi}$ zugeordnet.

(2) Haben zwei Geraden $(1,\mathfrak{p})K^\times\vee(0,\mathfrak{l})K^\times$ und $(1,\mathfrak{q})K^\times\vee(0,\iota\mathfrak{l})K^\times$ den eigentlichen Punkt $(1,\mathfrak{p}+\mathfrak{l})K^\times\neq(1,\mathfrak{p})K^\times,(1,\mathfrak{q})K^\times$ gemeinsam, so folgt $(\mathfrak{p}+\mathfrak{l}-\mathfrak{q})K^\times=\iota\mathfrak{l}K^\times$, also $\mathfrak{l}(k-\iota)=(\mathfrak{q}-\mathfrak{p})k\in\check{\mathfrak{U}}$ mit $k\in K^\times$, was $\mathfrak{l}$, $(k-\iota)\in\check{\mathfrak{U}}$ und $\mathfrak{p}+\mathfrak{l}=(\mathfrak{q}k-\mathfrak{p}\iota)(k-\iota)^{-1}$ ergibt. Damit ist $(1,\mathfrak{p}+\mathfrak{l})\check{\mathfrak{U}}\in\tilde{c}$.

(3) Ein Fernpunkt $(0,\mathfrak{f})K^\times$ von $\bar{c}$ gestattet als Fixpunkt der

projektiven Kollineation $\bar{\kappa}_\iota$ die angegebene Kennzeichnung. □

Nach Beweisschritt (3) kann ein zu $\tilde{W}$ paralleler Punkt $(k-\iota, \mathfrak{q}k-\mathfrak{g}\iota)\check{\mathfrak{U}} \in \tilde{c}$ genau dann durch den zum Eigenwert $k \in K^\times$ von f_ι gehörenden Fixpunktunterraum von $\bar{\kappa}_\iota$ repräsentiert werden, wenn $k-\iota$ Nullteiler von $\mathcal{L}$ ist.

Satz 2. Jeder durch die Kette $\tilde{c}$ festgelegte $\check{\mathfrak{U}}/K^\times$-Bündelisomorphismus $\bar{\psi}': u\Pi/(1,\mathfrak{g}')K^\times \to u\Pi/(1,\mathfrak{q}')K^\times$ besitzt dasselbe Erzeugnis wie der Bündelisomorphismus $\bar{\psi}$ mit der Darstellung (3). Insbesondere für $\mathfrak{q}'=\mathfrak{q}$ haben $\bar{\psi}$ und $\bar{\psi}'$ dieselben Schmiegunterräume im Punkt $(1,\mathfrak{q})K^\times$.

Beweis. Sei zunächst $\mathfrak{q}'=\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{g} \neq \mathfrak{g}' = (\mathfrak{q}p-\mathfrak{g}\iota)(p-\iota)^{-1}$, $p \in K^\times$. Der $\check{\mathfrak{U}}/K^\times$-Bündelisomorphismus $\bar{\psi}'$ besitzt ein Erzeugnis $\bar{c}'$. Nach Satz 1 haben $\bar{c}$ und $\bar{c}'$ dieselben eigentlichen Punkte. Wegen $(1,\mathfrak{g})\check{\mathfrak{U}} \in \tilde{c}$ gehört $\bar{\psi}'$ zum Faktor $\iota' K^\times$ mit $\iota' = p-\iota$. Die Eigenvektoren von f_ι zum Eigenwert k sind genau die Eigenvektoren von $f_{\iota'}$ zum Eigenwert $p-k$; daher sind auch die Fernpunkte von $\bar{c}$ und $\bar{c}'$ identisch.

Besitzt $\bar{\psi}$ in $(1,\mathfrak{q})K^\times$ einen j-Schmiegunterraum, so wird dieser von $(1,\mathfrak{q})K^\times$ und den unabhängigen Fernpunkten $(0,\iota(\mathfrak{g}-\mathfrak{q}))K^\times, \ldots, (0,\iota^j(\mathfrak{g}-\mathfrak{q}))K^\times$ aufgespannt, sodaß die Vektormenge $\mathfrak{W}_j := \{1,\iota,\ldots,\iota^{j-1}\}$ l.u. ist. Da ein Schmiegunterraum stets echt im Grundunterraum enthalten ist, muß auch $\mathfrak{W}_{j+1} := \{1,\iota,\ldots,\iota^j\}$ l.u. sein. Ist umgekehrt $\mathfrak{W}_{j+1}$ l.u., so existiert in $(1,\mathfrak{q})K^\times$ ein j-Schmiegunterraum von $\bar{\psi}$. Analog ist die Existenz eines j-Schmiegunterraumes von $\bar{\psi}'$ äquivalent zu $\mathfrak{W}'_{j+1} := \{1,(p-\iota),\ldots,(p-\iota)^j\}$ l.u. Da die Hüllen von $\mathfrak{W}_j$ und $\mathfrak{W}'_j$ bzw. $\mathfrak{W}_{j+1}$ und $\mathfrak{W}'_{j+1}$ übereinstimmen, sind die Schmiegunterräume gleich.

Die erste Behauptung des Satzes folt für $\mathfrak{q}' \neq \mathfrak{q}$ durch "Dazwischenschalten" eines $\check{\mathfrak{U}}/K^\times$-Bündelisomorphismus $\bar{\psi}'': u\Pi/(1,\mathfrak{q})K^\times \to u\Pi/ /(1,\mathfrak{q}')K^\times$. □

Die gemeinsame Tangente (1-Schmiegunterraum) $\bar{t}$ von $\bar{\psi}, \bar{\psi}'$ in $(1,\mathfrak{q})K^\times = (1,\mathfrak{q}')K^\times$ wird durch jene Kette $\tilde{t}$ von $\Sigma(K,\mathcal{L})$ definiert, welche $\tilde{W}$ enthält und $\tilde{c}$ in $(1,\mathfrak{q})\check{\mathfrak{U}}$ berührt. Eine Kette $\tilde{d}$ mit eigentlichen Punkten $(1,\mathfrak{q})\check{\mathfrak{U}}$, $(1,\mathfrak{r})\check{\mathfrak{U}}$ berührt daher $\tilde{c}$ genau dann in $(1,\mathfrak{q})\check{\mathfrak{U}}$, wenn der durch $\tilde{d}$ festgelegte $\check{\mathfrak{U}}/K^\times$-Bündelisomorphismus

$u\Pi/(1,\nu)K^\times \to u\Pi/(1,\psi)K^\times$ in $(1,\psi)K^\times$ die Tangente $\bar{t}$ besitzt. Dieses Ergebnis wird in [9],[10] im Sonderfall $K=\mathbb{R}$, $\dim(K,\mathcal{L})=3$ mit Methoden der Differentialgeometrie hergeleitet. Es ist zu beachten, daß die Gerade $\bar{t}$ nicht notwendig dem von der Punktmenge $\bar{c}$ aufgespannten Unterraum angehört[5].

Wir können die Kette $\tilde{c}$ mit einer Projektivität $\tilde{\gamma}$, welche $\tilde{W}$ fest läßt, in eine Kette durch $(1,0)\check{\mathfrak{U}}$ und $(1,1)\check{\mathfrak{U}}$ überführen. Da $\tilde{\gamma}$ in $A(K,\mathcal{L})$ eine projektive Affinität induziert [1,S.105] gelte im folgenden o.B.d.A. $\varphi=0$, $\psi=1$, sodaß (2) übergeht in

$$c=\{k(k-\nu)^{-1} \mid k\in K, (k-\nu)\in\check{\mathfrak{U}}\}\cup\{1\}. \qquad (4)$$

4.2. Ist ν algebraisch über K, so existiert im Polynomring $K[x]$ in der Unbestimmten x das eindeutig bestimmte Minimalpolynom

$$m(x)=x^n+m_{n-1}x^{n-1}+\ldots+m_0, \quad (n\geq 1)$$

des Elementes ν. Die Algebra $(K,\mathcal{L}_1)$ mit $\mathcal{L}_1:=K[\nu]$ ist die kleinste Unteralgebra von $(K,\mathcal{L})$, welche $K\cup\{\nu\}$ enthält, also $\bar{\mathfrak{m}}:=\{(0,\varphi)K^\times \mid \varphi\in\mathcal{L}_1^\times\}$ der kleinste $\bar{\pi}_\nu$-Fixunterraum durch den Punkt $(0,1)K^\times$ und somit $\bar{\mathfrak{P}}_1:=(1,0)K^\times\vee\bar{\mathfrak{m}}$ der Grundunterraum von $\bar{\Psi}$. Der Unterraum $\bar{\mathfrak{P}}_1$ ist die Punktmenge des projektiven Raumes $\Pi_1(K,K\oplus\mathcal{L}_1)$ und es gilt $\dim\Pi_1=\mathrm{grad}\,m(x)$.

Der Fall n=1 führt auf $\nu\in K^\times$, $\bar{\pi}_\nu=\mathrm{id}$, $\bar{\mathfrak{P}}_1=(1,0)K^\times\vee(1,1)K^\times$ und bedarf keiner weiteren Diskussion. (Vgl. Fig.1.)

Setzen wir $n\geq 2$ voraus, so ist $\bar{\Psi}_1:=\bar{\Psi}|u\Pi_1/(1,0)K^\times$ ein Normisomorphismus von $\Pi_1(K,K\oplus\mathcal{L}_1)$ mit dem Erzeugnis $\bar{c}_1=\bar{c}\cap\bar{\mathfrak{P}}_1$. Die Menge der eigentlichen Punkte von $\bar{c}$ ist nach [2,S.173] und Satz 1 in $\bar{\mathfrak{P}}_1$ enthalten. Gilt $(k-\nu)\notin\check{\mathfrak{U}}$ für ein $k\in K^\times$, so besitzt $f_{k-\nu}$ den invarianten Unterraum $\mathcal{L}_1$ und $f_{k-\nu}|\mathcal{L}_1$ hat als nicht surjektiver linearer Vektorraumendomorphismus wegen $\dim(K,\mathcal{L}_1)=n$ einen nichttrivialen Kern. Daher ist $k-\nu$ Nullteiler von $\mathcal{L}_1$ und k Eigenwert von f_ν. Der zugehörige Fixpunktunterraum von $\bar{\pi}_\nu$ schneidet $\bar{\mathfrak{P}}_1$ nach einem nichtleeren Unterraum; da $\bar{c}_1$ keine Gerade umfaßt [8, S.433], ist dieser Durchschnitt einpunktig.(Vgl. Fig.2.)

-----

[5] Etwa für $K=GF(2)$ und $\mathcal{L}=GF(8)$ ist $\bar{c}$ ein Dreieck und $\bar{t}$ gehört nicht der Dreiecksebene an.

Besitzt $\bar{c}_1$ Fernpunkte, so ist die Abbildung

$$(k-\iota,k)\breve{\mathfrak{U}} \mapsto (0,\ell)K^\times,\ k\in K^\times,\ k-\iota\notin\breve{\mathfrak{U}} \tag{5}$$

mit $\ell\in\mathcal{L}_1^\times$, $(k-\iota)\ell=0$ eine Bijektion der Menge der uneigentlichen Punkte von $\tilde{c}$ auf die stets endliche Menge der Fernpunkte von $\bar{c}_1$. Da $m(x)$ Minimalpolynom und charakteristisches Polynom der Abbildung f_ι ist, gibt die Anzahl l der verschiedenen Nullstellen von $m(x)$ (ohne Berücksichtigung von Vielfachheiten) die Anzahl der Fernpunkte von $\bar{c}_1$ an.

Das Erzeugnis $\bar{c}_1$ von $\bar{\psi}_1$ besitzt $|K|+1$ Punkte [6,Satz 2] und spannt nicht notwendig den ganzen Unterraum $\bar{\mathfrak{P}}_1$ auf. Desgleichen braucht die affine Hülle $[c]$ der Punktmenge c nicht mit $\mathcal{L}_1$ übereinzustimmen. Mit Hilfe der Bijektion (5) folgt jedoch

$$[c_1]=\mathcal{L}_1 \text{ für } |K|\geq l+n \text{ und } [c_1]\neq\mathcal{L}_1 \text{ für } |K|<l+n. \tag{6}$$

Nach einer in [2,S.171] angegebenen Dimensionsformel ist die erste Aussage in (6) richtig, wenn man für l die Anzahl der maximalen Ideale der Algebra $(K,\mathcal{L}_1)$ einsetzt, da in jedem maximalen Ideal höchstens ein Nullteiler der Bauart $k-\iota$ liegt. Alle Punkte aus $\iota K^\times\subset\mathfrak{P}$ sind Kernpunkte [2,S.170] der Kette $\tilde{c}$.

Die obigen Ergebnisse illustriert Figur 4.

Jeder durch die Kette $\tilde{c}$ bestimmte $\breve{\mathfrak{U}}/K^\times$-Bündelisomorphismus besitzt den Grundunterraum $\bar{\mathfrak{P}}_1$ und induziert für $\dim\Pi_1(\mathfrak{P}_1)\geq 2$ in Π_1 einen Normisomorphismus. Dann gilt folgende Verschärfung von Satz 2.

Satz 3. Je zwei durch die Kette $\tilde{c}$ bestimmte Normisomorphismen von $\Pi_1(K,K\oplus\mathcal{L}_1)$ sind assoziiert.

Beweis. Es genügt, die Aussage für die Normisomorphismen $\bar{\psi}_1: u\Pi_1/(1,0)K^\times \to u\Pi_1/(1,1)K^\times$ zum Faktor $\iota K^\times$ und $\bar{\psi}_1': u\Pi_1/(1,\mathfrak{g}')K^\times \to u\Pi_1/(1,1)K^\times$ zum Faktor $(p-\iota)K^\times$ mit $\mathfrak{g}'=p(p-\iota)^{-1}$, $p\in K^\times$, $(p-\iota)\in\breve{\mathfrak{U}}$ zu zeigen. Da Π_1 ein projektiver Pappos-Raum ist, sind nach [6, Satz 5] $\bar{\psi}_1$ und $\bar{\psi}_1'$ bereits dann assoziiert, wenn sie dasselbe Erzeugnis und in zwei Punkten dieselben Schmiegunterräume besitzen. Im Anschluß an Satz 2 ist nur noch die Gleichheit der Schmiegunterräume im Punkt $(1,\mathfrak{g}')K^\times$ nachzuweisen.

Der j-Schmiegunterraum von $\bar{\psi}_1'$ in $(1,\varphi')K^\times$ $(j=1,\ldots,n-2)$ wird durch die Punkte $(1,p(p-\imath)^{-1})K^\times$, $(0,\imath(p-\imath)^{-2})K^\times,\ldots,$ $(0,\imath(p-\imath)^{-j-1})K^\times$ aufgespannt. Projektion mit dem Zentrum $(1,0)K^\times$ bzw. $(1,1)K^\times$ auf die Fernhyperebene ergibt den Unterraum $(0,(p-\imath)^{-1})K^\times\vee(0,\imath(p-\imath)^{-2})K^\times\vee\ldots\vee(0,\imath(p-\imath)^{-j-1})K^\times$ bzw. $(0,\imath(p-\imath)^{-1})K^\times\vee(0,\imath(p-\imath)^{-2})K^\times\vee\ldots\vee(0,\imath(p-\imath)^{-j-1})K^\times$. Der betrachtete j-Schmiegunterraum ist genau dann eine Sehne von $\bar{\psi}_1$, wenn die l.u. Vektormengen $\{(p-\imath)^j,\imath(p-\imath)^{j-1},\ldots,\imath(p-\imath),\imath\}$ und $\{(p-\imath)^j,(p-\imath)^{j-1},\ldots,p-\imath,1\}$ denselben Unterraum von $(K,\mathcal{L}_1)$ aufspannen, und dies folgt aus $\{\imath,1,p-\imath\}$ l.a. unmittelbar.

Auf Grund des Hilfssatzes in 3.2 kann die Behauptung sofort mit Induktion nach $j=0,\ldots,n-1$ gezeigt werden.□

Satz 3 ist trivial, falls $\bar{c}_1$ ein Kegelschnitt ist [6,3.5] oder mindestens n+3 Punkte besitzt, da dann bereits die Punktmenge $\bar{c}_1$ die Normisomorphismen $\bar{\psi}_1$, $\bar{\psi}_1'$ eindeutig festlegt.

Der Normisomorphismus $\bar{\psi}_1$ kann gemäß [6,2.7] durch eine geordnete Basis $\mathcal{B}=\{(b_i,\mathscr{b}_i)\mid i=0,\ldots,n\}$ von $(K,K\oplus\mathcal{L}_1)$ festgelegt werden, wobei $(b_0,\mathscr{b}_0)K^\times=(1,0)K^\times$, $(b_n,\mathscr{b}_n)K^\times=(1,1)K^\times$ gilt und $\bar{\psi}_1$ durch den linearen Vektorraumautomorphismus $(b_0,\mathscr{b}_0)\mapsto(b_n,\mathscr{b}_n)$, $(b_i,\mathscr{b}_i)\mapsto(b_{i-1},\mathscr{b}_{i-1})$ $(i=1,\ldots,n)$ induziert wird. Ist y Unbestimmte über dem Ring $K\oplus\mathcal{L}_1$, so beschreibt die durch das Polynom $u(y):=\sum_{i=0}^{n}(b_i,\mathscr{b}_i)y^i$ festgelegt Polynomfunktion $K\to K\oplus\mathcal{L}_1$ abgesehen vom Punkt $(1,1)K^\times$ genau das Erzeugnis von $\bar{\psi}_1$.

Zur Bestimmung einer Basis $\mathcal{B}$ betrachten wir ausgehend von (4) die Abbildung $v:k\mapsto(1,k(k-\imath)^{-1})$, welche für alle $k\in K$ mit $k-\imath\in\check{\mathfrak{U}}$ definiert ist. Unter Benützung eines Ansatzes aus [2, S.173] folgt $m(y):(y-\imath)=:s(y)\in\mathcal{L}_1[y]$, und das Polynom $w(y):=$ $=(m(y),y.s(y))\in(K[y]\oplus\mathcal{L}_1[y])=(K\oplus\mathcal{L}_1)[y]$ definiert eine Funktion $w:K\to K\oplus\mathcal{L}_1$, wobei für alle $k\in K$ mit $k-\imath\in\check{\mathfrak{U}}$ die Bilder von k unter v und w l.a. sind. Koeffizientenvergleich der Polynome $u(y)$ und $w(y)$ liefert

$$\begin{array}{ll}
b_0=m_0, & \mathscr{b}_0=0,\\
b_1=m_1, & \mathscr{b}_1=m_1+m_2\imath+\ldots+m_{n-1}\imath^{n-1}+\imath^n,\\
b_2=m_2, & \mathscr{b}_2=m_2+m_3\imath+\ldots+\qquad\ \imath^{n-1},\\
\quad\ldots & \\
b_n=1, & \mathscr{b}_n=1.
\end{array}\tag{7}$$

Die durch (7) festgelegt Basis leistet tatsächlich das Gewünschte und ermöglicht die rechnerische Behandlung von $\bar{\psi}_1$ gemäß [6].

4.3. Sei ι Unbestimmte über K. Dann ist $\{1,\iota,\iota^{-1},\iota^2,\iota^{-2},\dots\}$ eine l.u. Menge in $(K,\mathcal{L})$ und $(K,\mathcal{L}_1)$ mit $\mathcal{L}_1:=K[\iota,\iota^{-1}]$ ist die kleinste Unteralgebra von $(K,\mathcal{L})$, welche $K\cup\{\iota,\iota^{-1}\}$ enthält. Der Unterraum $\bar{\mathfrak{P}}_1:=(1,0)K^\times\vee\{(0,\varphi)K^\times \mid \varphi\in\mathcal{L}_1^\times\}$ ist der Grundunterraum von $\bar{\psi}$ und legt den projektiven Raum $\Pi_1(K,K\oplus\mathcal{L}_1)$ fest.

Satz 4. Das Erzeugnis $\bar{c}$ von $\bar{\psi}$ hat mit dem Grundunterraum $\bar{\mathfrak{P}}_1$ genau die Punkte $(1,0)K^\times$, $(1,1)K^\times$ gemeinsam.

Beweis. Jeder von $(1,0)K^\times$ und $(1,1)K^\times$ verschiedene eigentliche Punkt von $\bar{c}$ gestattet nach (4) die Darstellung $(1,k(k-\iota)^{-1})K^\times$ mit $k\in K^\times$, $(k-\iota)\in\check{\mathfrak{U}}$. Aus $(k-\iota)^{-1}\in\mathcal{L}_1$ folgt sofort der Widerspruch, daß ι algebraisch über K ist. Wegen $\{\varphi,\varphi f_\iota\}$ l.u. für alle $\varphi\in\mathcal{L}_1^\times$, besitzt $\bar{c}$ keine Fernpunkte in $\bar{\mathfrak{P}}_1$. □

Adjungieren wir zu $\mathcal{L}_1$ alle Elemente der Menge $\{(k-\iota)^{-1} \mid k\in K^\times,\ k-\iota\in\check{\mathfrak{U}}\}$, so erhalten wir einen Unterring $\mathcal{L}_2$ von $\mathcal{L}$. Da ι transzendent über K ist, besitzt $\mathcal{L}_2$ keine Nullteiler. Die Algebra $(K,\mathcal{L}_2)$ definiert den projektiven Raum $\Pi_2(K,K\oplus\mathcal{L}_2)$ mit der Punktmenge $\bar{\mathfrak{P}}_2\subset\bar{\mathfrak{P}}$, welche nicht nur alle eigentlichen Punkte von $\bar{c}$, sondern auch alle Schmiegunterräume der durch die Kette $\bar{c}$ bestimmten $\check{\mathfrak{U}}/K^\times$-Bündelisomorphismen enthält. Offenbar ist $\bar{\mathfrak{P}}_2$ der kleinste Unterraum mit diesen Eigenschaften und unter $\bar{\psi}$ selbstzugeordnet, also $\bar{\psi}|(u\Pi_2\setminus(1,0)K^\times)=:\bar{\psi}_2$ ein projektiver Bündelisomorphismus von Π_2. Da $\mathcal{L}_2$ ein Integritätsbereich ist, besitzt das Erzeugnis $\bar{c}_2$ von $\bar{\psi}_2$ keine Fernpunkte; es liegt also kein Fernpunkt von $\bar{c}$ in $\bar{\mathfrak{P}}_2$.

Satz 5. Das Erzeugnis $\bar{c}_2$ von $\bar{\psi}_2$ ist eine unabhängige Punktmenge.

Beweis. Die einfach transzendente Körpererweiterung $K(\iota)$ ist zum Quotientenkörper von $\mathcal{L}_2$ in natürlicher Weise K-äquivalent. Nach der Theorie der Partialbruchzerlegung[6] in $K(\iota)$ ist $\{(k-\iota)^{-1} \mid k\in K^\times\}\cup\{1\}$ eine l.u. Teilmenge des Vektorraumes $(K,K(\iota))$. Mit (4) folgt die Gültigkeit des Satzes. □

-----

[6] Die Menge der Partialbrüche mit normiertem Zähler- und Nennerpolynom vereinigt mit der Menge $\{1,\iota,\iota^2,\dots\}$ ist eine Basis des Vektorraumes $(K,K(\iota))$.

Literatur

[1] Benz, W.: Vorlesungen über Geometrie der Algebren, Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1973.

[2] Benz, W.: Einige Systeme algebraischer Kurven und eine Dimensionsformel, Abh.Math.Sem.Univ.Hamburg 40 (1973), 166-175.

[3] Benz, W., Samaga, H.J., Schaeffer, H.: Cross ratios and a unifying treatment of von Staudt's notion of reeller Zug, Geometry - von Staudt's point of view, Proc. NATO adv. Study Inst., Bad Windsheim 1980, Dordrecht: D. Reidel 1981.

[4] Brauner, H.: Geometrie projektiver Räume I, Mannheim-Wien-Zürich: BI-Wissenschaftsverlag, 1976.

[5] Brauner, H.: Geometrie projektiver Räume II, Mannheim-Wien-Zürich: BI-Wissenschaftsverlag, 1976.

[6] Havlicek, H.: Normkurven und Normisomorphismen endlichdimensionaler Desargues-Räume, erscheint in Mh. Math.

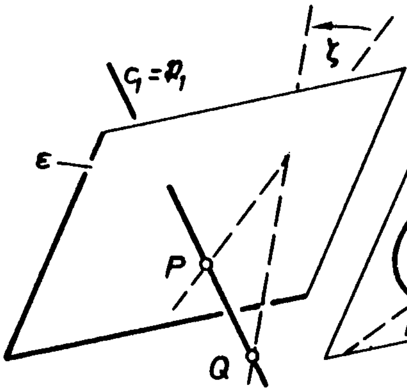
[7] Karzel, H.: Bericht über projektive Inzidenzgruppen, Jb. DMV 67 (1964), 58-92.

[8] Riesinger, R.: Normkurven in endlichdimensionalen Desargues-Räumen, Geom. Ded. 10 (1981), 427-449.

[9] Samaga, H.: Über nichtebene miquelsche Kurvensysteme, Diss. Univ. Hamburg, Hamburg 1976.

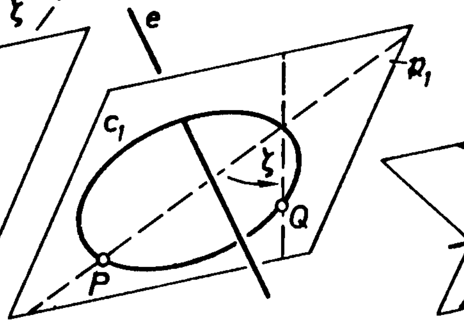
[10] Samaga, H.: Dreidimensionale Kettengeometrien über $\mathbb{R}$, J. Geometry 8 (1976), 61-73.

Hans Havlicek
Institut für Geometrie
Technische Universität
Gußhausstraße 27-29
A-1040 Wien
Österreich



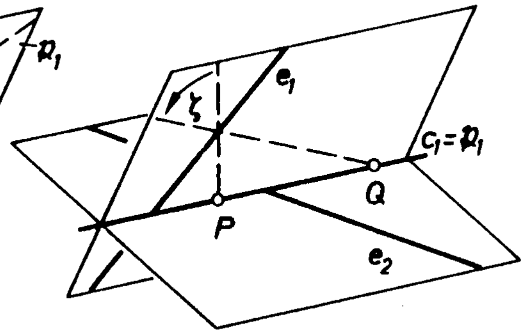
$c = c_1 \cup \varepsilon$

Fig.1



$c = c_1 \cup e$

Fig.2



$c = c_1 \cup e_1 \cup e_2$

Fig.3

Der Grundunterraum $\mathfrak{P}_1$ ist in den Figuren 1 und 3 eine Gerade und in Figur 2 eine Ebene. Vgl. auch Fig. 4.

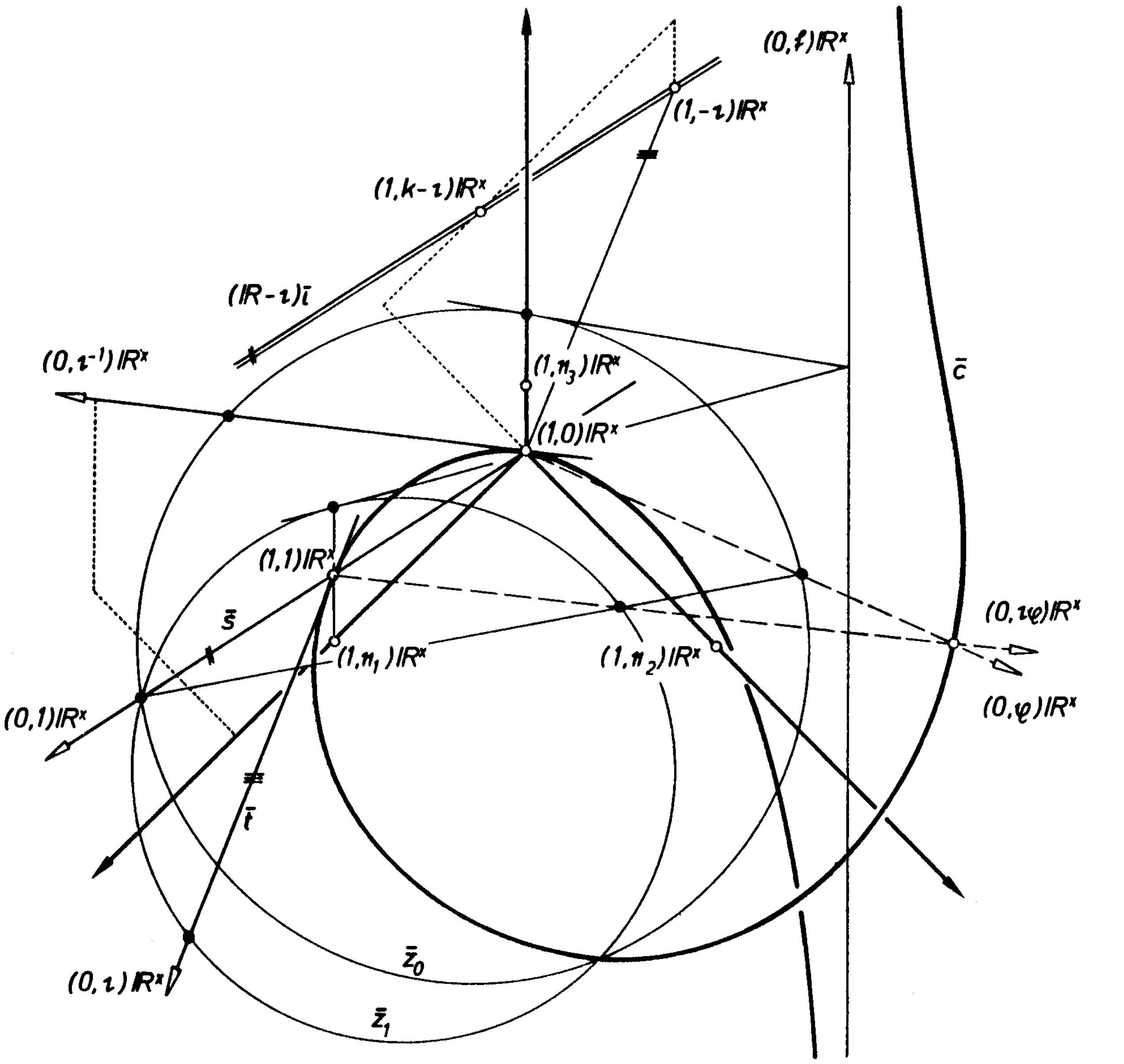


Fig. 4

Die Algebra $(K,\mathcal{L})=(\mathbb{R},\mathbb{C}\oplus\mathbb{R})$ besitzt die Basis $\{\mathfrak{n}_1=(1|0),\mathfrak{n}_2=(i|0),\mathfrak{n}_3=(0|1)$ und bestimmt einen reellen projektiven 3-Raum. Durch das Tripel $(0,1,\iota\mathbb{R}^\times)$ mit $\iota=(1,5+0,75i|1)$ wird ein $\mathfrak{U}/\mathbb{R}^\times$-Bündelisomorphismus $\bar{\Psi}$ mit dreidimensionalem Grundunterraum festgelegt. Das Erzeugnis $\bar{c}$ von $\bar{\Psi}$ ist daher eine Kubik. In $A(\mathbb{R},\mathbb{C}\oplus\mathbb{R})$ liefert der Schnitt der Geraden $\mathbb{R}-\iota$ mit dem Singularitätskegel [1,S.308] den Punkt $k-\iota=(-0,5-0,75i|0)$, sodaß f_ι den Eigenwert $k=1=(1|1)\in\mathbb{R}\subset(\mathbb{C}\oplus\mathbb{R})$ und $\bar{c}$ genau einen Fernpunkt $(0,f)\mathbb{R}^\times=(0,\mathfrak{n}_3)\mathbb{R}^\times$ besitzt. In $\Sigma(\mathbb{R},\mathbb{C}\oplus\mathbb{R})$ hat die Kette $\tilde{c}$ nach (1) den uneigentlichen Punkt $(1,1-\iota)\mathfrak{U}$. Figur 4 zeigt einen Parallelriß der Kubik $\bar{c}$, welche gemäß [5,S.198] im Durchschnitt der quadratischen Sehnenkegel mit Spitzen $(1,0)\mathbb{R}^\times$ und $(1,1)\mathbb{R}^\times$ enthalten ist. Die Parallelrisse der Spurkegelschnitte $\bar{z}_0$ und $\bar{z}_1$ dieser Sehnenkegel in der Ebene $(1,\mathfrak{n}_3.2)\mathbb{R}^\times\vee(0,\mathfrak{n}_1)\mathbb{R}^\times\vee(0,\mathfrak{n}_2)\mathbb{R}^\times$ sind bei der gewählten Angabe Kreise der Zeichenebene.