

Durch Kollineationsgruppen bestimmte projektive Räume

Hans Havlicek

H. Brauner zum 60. Geburtstag gewidmet

1. Gibt man in einem desarguesschen projektiven Raum $(\mathcal{P}, \mathcal{G})$ eine Basis \mathcal{B} und eine Hyperebene \mathcal{H} mit $\mathcal{H} \cap \mathcal{B} = \emptyset$ vor, so besteht die Gruppe Φ aller projektiven Kollineationen von \mathcal{P} , die \mathcal{B} punktweise und \mathcal{H} als Ganzes fest lassen, bekanntlich genau dann nur aus der Identität, wenn ein Pappos-Raum vorliegt. Das Ziel dieses Artikels ist eine geometrische Beschreibung der Bahn unter Φ eines Punktes von \mathcal{P} .

Eine Teilmenge \mathcal{M} eines Inzidenzraumes $(\mathcal{P}, \mathcal{G})$ [8,11] erhält bekanntlich die Struktur eines Inzidenzraumes $(\mathcal{M}, \mathcal{G}_{\mathcal{M}})$, wenn man setzt $\mathcal{G}_{\mathcal{M}} := \{g \cap \mathcal{M} \mid g \in \mathcal{G}, |g \cap \mathcal{M}| \geq 2\}$. Der Inzidenzraum $(\mathcal{M}, \mathcal{G}_{\mathcal{M}})$ ist dann ein Spurraum von $(\mathcal{P}, \mathcal{G})$, den wir auch mit \mathcal{M} bezeichnen, wenn keine Mißverständnisse zu erwarten sind. Sind $(\mathcal{P}, \mathcal{G})$ und $(\mathcal{P}, \mathcal{L})$ zwei Inzidenzräume mit derselben Punktmenge \mathcal{P} , und ist jede Gerade aus \mathcal{L} Teilmenge einer Geraden aus \mathcal{G} , so nennen wir $(\mathcal{P}, \mathcal{L})$ eine *Verfeinerung* von $(\mathcal{P}, \mathcal{G})$. Jede Verfeinerung eines Spurraumes möge ein *verfeinerter Spurraum* genannt werden. Mit diesen Bezeichnungen gilt dann:

Jede Punktbahn unter Φ läßt sich in kanonischer Weise so mit der Struktur eines projektiven Raumes versehen, daß ein verfeinerter Spurraum von $(\mathcal{P}, \mathcal{G})$ vorliegt. Ein solcher "Bahnraum" kann stets als Projektion eines Spurraumes eines projektiven Erweiterungsraumes von $(\mathcal{P}, \mathcal{G})$ gewonnen werden, wobei diese Projektion den Spurraum isomorph auf den Bahnraum abbildet. Ist ein Bahnraum endlichdimensional, so kann seine Dimension auf zwei Arten berechnet werden. Die zugehörigen geometrischen Ergebnisse liefern einen Beweis des folgenden bekannten Satzes: Ist K ein (nicht notwendig kommutativer) Körper und C ein Unterkörper von K , so stimmt der Grad von C über dem Zentrum von K überein mit dem rechten Grad von K über dem Zentralisator von C im Körper K , falls wenigstens einer dieser beiden Gradzahlen endlich ist.

2. Den folgenden Überlegungen liegt ein projektiver Raum über einem

K -Rechtsvektorraum¹ \mathfrak{B}_K zugrunde, wobei K ein nicht notwendig kommutativer Körper und $\dim \mathfrak{B}_K > 0$ ist. Falls $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{B}$ Untervektorraum ist, dann sei $\mathcal{P}(\mathfrak{U})$ die Menge seiner eindimensionalen Unterräume, also die durch \mathfrak{U} festgelegte Punktmenge. Für eine Teilmenge M von K bezeichne $Z(M)$ den Zentralisator von M in² K und $M^\times := M \setminus \{0\}$. Die verwendeten geometrischen Sätze können etwa [2] entnommen werden.

Geben wir eine Basis \mathcal{B} und eine Hyperebene \mathcal{H} von $\mathcal{P}(\mathfrak{B})$ mit $\mathcal{B} \cap \mathcal{H} = \emptyset$ vor, es ist also $(\mathcal{B}, \mathcal{H})$ eine Fundamentalfigur von $\mathcal{P}(\mathfrak{B})$, so gibt es stets eine Vektorraumbasis $\mathcal{E} = \{e_j \mid j \in J\}$ von \mathfrak{B} mit $\mathcal{B} = \{e_j K \mid j \in J\}$ und eine Linearform $h^* : \mathfrak{B} \rightarrow K$ mit $\mathcal{H} = \mathcal{P}(\ker h^*)$; dabei können wir $\langle h^*, e_j \rangle = 1$ für alle $j \in J$ voraussetzen.

Zu jeder projektiven Kollineation $\varphi \in \text{PGL}(\mathcal{P}(\mathfrak{B}))$, die \mathcal{B} punktweise und \mathcal{H} als Ganzes fest läßt, gibt es ein Element $x \in K^\times$ derart, daß die durch

$$(1) \quad e_j \mapsto e_j x \quad (j \in J)$$

erklärte Abbildung aus $\text{GL}(\mathfrak{B})$ die gegebene Kollineation φ induziert.

Umgekehrt legt jeder lineare Automorphismus von \mathfrak{B} der Bauart (1) eine solche Kollineation fest, für die wir auch φ_x schreiben. Es ist $\Phi := \{\varphi_x \mid x \in K^\times\}$ homomorphes Bild der multiplikativen Gruppe K^\times unter der Abbildung $x \mapsto \varphi_x$ und damit isomorph zur Faktorgruppe³ $K^\times / Z(K)^\times$.

Mit $P^\Phi := \{P^\varphi \mid \varphi \in \Phi\}$ bezeichnen wir die Bahn unter Φ eines Punktes $P \in \mathcal{P}(\mathfrak{B})$. Bleibt ein Unterraum unter allen Kollineationen aus Φ als Ganzes fest, so sprechen wir von einem Φ -Fixunterraum. Jeder Punkt $P \in \mathcal{P}(\mathfrak{B})$ und damit auch seine Bahn P^Φ liegen in der Hülle von endlich vielen Punkten der Basis \mathcal{B} . Im Rahmen unserer Fragestellung ist es ist daher keine Einschränkung der Allgemeinheit, wenn wir im folgenden \mathfrak{B} als endlichdimensional ($0 < \dim \mathfrak{B} =: n+1$) voraussetzen. Die Koordinatendarstellung der Abbildung (1) bezüglich der Basis $\mathcal{E} = \{e_j \mid j=0, \dots, n\}$ hat dann die einfache Gestalt

$$(2) \quad (a_0, \dots, a_n) \mapsto (x a_0, \dots, x a_n).$$

¹Bei einem Linksvektorraum fügen wir den Skalarkörper als linken unteren Index an. Falls Mißverständnisse ausgeschlossen scheinen lassen wir die Angabe des Skalarkörpers auch weg.

²Wir unterdrücken im folgenden meist den Zusatz "in K ".

³Die linearen Endomorphismen von \mathfrak{B}_K bilden bekanntlich einen Vektorraum über $Z(K)$ [9,172] und alle Abbildungen (1) mit $x \in K$ einen Unterraum. Die Punktmenge des projektiven Raumes $\mathcal{P}(K_{Z(K)})$ unterscheidet sich nur unwesentlich (xK statt xK^\times) von $K^\times / Z(K)^\times$. Wir werden darauf in Abschnitt 7 zurückkommen.

Das motiviert die im folgenden verwendete Schreibweise⁴ $x\mathfrak{a}$ für den Vektor mit den Koordinaten (xa_0, \dots, xa_n) . Ist $U \subset K$, so werde ein U -invarianter Unterraum von \mathfrak{B} dadurch erklärt, daß er unter allen Abbildungen $\mathfrak{a} \mapsto x\mathfrak{a}$ ($x \in U$) invariant ist. Mit $U\mathfrak{a}$ sei für fest gewähltes $\mathfrak{a} \in \mathfrak{B}$ die Menge $\{x\mathfrak{a} \mid x \in U\}$ bezeichnet.

Hilfssatz 1. Seien (a_0, \dots, a_n) die Koordinaten von $\mathfrak{a} \in \mathfrak{B}_K$, U eine Unterhalbgruppe von $(K^\times; \cdot)$ und $Z(U)$ der Zentralisator von U in K . Dann hat die Hülle von a_0, \dots, a_n im Linksvektorraum $Z(U)K$ dieselbe Dimension wie die Hülle von $U\mathfrak{a}$ im Rechtsvektorraum \mathfrak{B}_K .

Beweis. Der von $U\mathfrak{a}$ aufgespannte Unterraum \mathfrak{U} von \mathfrak{B} ist U -invariant, da U Halbgruppe ist. Sei $k+1 := \dim \mathfrak{U} < n+1$. Dann gibt es $n-k$ Vektoren der Basis \mathfrak{C} , die ein Komplement \mathfrak{C}' von \mathfrak{U} aufspannen; o.B.d.A. seien dies die Vektoren e_j mit Zeigern $j = k+1, \dots, n$. Verbinden wir den Unterraum \mathfrak{C}' mit je $n-k-1$ dieser Vektoren e_j , so erhalten wir $n-k-1$ U -invariante Hyperebenen, die wir als Kernräume von Linearformen $f_i^* : \mathfrak{B} \rightarrow K$ mit $\langle f_i^*, e_i \rangle = 1$ ($i = k+1, \dots, n$) ansetzen können. Sind y_{i0}, \dots, y_{in} die Koordinaten von f_i^* bzgl. der zu \mathfrak{C} dualen Basis, so lehren die U -Invarianz von $\ker f_i^*$ und $y_{ii} = 1$ dann $y_{i0}, \dots, y_{in} \in Z(U)$. Damit folgt

$$y_{i0}a_0 + \dots + y_{ik}a_k + a_i = 0 \quad \text{für } i = k+1, \dots, n,$$

sodaß a_0, \dots, a_n im Linksvektorraum $Z(U)K$ einen Unterraum der Dimension $\leq k+1$ aufspannen. Umkehrung der obigen Überlegungen zeigt, daß das Gleichheitszeichen gilt, und daß die beiden Dimensionszahlen auch für $k+1 = n+1$ übereinstimmen. \square

Nach Hilfssatz 1 ist ein Φ -Fixpunkt von $\mathcal{P}(\mathfrak{B})$ dadurch gekennzeichnet, daß er durch einen Vektor mit Koordinaten $(a_0, \dots, a_n) \in Z(K)^{n+1} \setminus \{(0, \dots, 0)\}$ bestimmt werden kann. Analog ist für eine Φ -Fixhyperebene notwendig und hinreichend, daß sie durch den Kernraum einer nichttrivialen Linearform $\mathfrak{B} \rightarrow K$ festgelegt werden kann, die den Vektoren von \mathfrak{C} Werte aus $Z(K)$ zuordnet. Daraus folgt aber, daß genau jene Fundamentalfiguren $(\mathcal{B}', \mathcal{H}')$ von $\mathcal{P}(\mathfrak{B})$, deren Basis $\mathcal{B}' = \{e'_j \mid j=0, \dots, n\}$ aus Φ -Fixpunkten besteht, und deren Hyperebene $\mathcal{H}' = \mathfrak{P}(\ker h'^*)$ unter Φ als Ganzes festbleibt, zur Festlegung der Gruppe Φ herangezogen werden können. Dabei dürfen wir voraussetzen, daß die Koordinaten der Vektoren e'_j in $Z(K)$ liegen, $\langle h'^*, e'_j \rangle \in Z(K)$ gilt, und $\langle h'^*, e'_j \rangle = 1$ erfüllt ist.

Die Menge \mathfrak{Z} aller Vektoren von \mathfrak{B} , die bezüglich der Basis \mathfrak{C}

⁴Diese Definition hängt von der Basis \mathfrak{C} ab. Wenn nicht anders angegeben, beziehen sich alle Koordinaten auf diese Basis.

Koordinaten aus $Z(K)$ besitzen, ist ein *zentraler Ausschnitt* von \mathfrak{B} und bildet mit den von \mathfrak{B}_K kommenden Verknüpfungen einen $Z(K)$ -Rechtsvektorraum ${}_{Z(K)}\mathfrak{B}$. Vektoren aus \mathfrak{B} sind genau dann linear unabhängig (l.u.) in ${}_{Z(K)}\mathfrak{B}$, wenn sie l.u. in \mathfrak{B}_K sind. (Durch lineare Fortsetzung der Zuordnung $\mathfrak{z} \mapsto \mathfrak{z} \otimes 1$ ($\mathfrak{z} \in \mathfrak{B} \subset \mathfrak{B}$) wird \mathfrak{B}_K isomorph auf das Tensorprodukt ${}_{Z(K)}\mathfrak{B} \otimes_{Z(K)} Z(K) \cong Z(K) \otimes_{Z(K)} Z(K) \cong Z(K) \otimes_{Z(K)} K$ abgebildet.) Es liefert daher die Menge der Φ -Fixpunkte einen Spurraum von $\mathcal{P}(\mathfrak{B})$, welcher zum projektiven Raum $\mathcal{P}({}_{Z(K)}\mathfrak{B})$ isomorph ist.

Die Koordinaten (a_0, \dots, a_n) bzw. (a'_0, \dots, a'_n) eines Vektors $\mathfrak{a} \in \mathfrak{B}$ bezüglich \mathfrak{C} und einer Basis $\mathfrak{C}' := \{\mathfrak{e}'_j \mid j=0, \dots, n\} \subset \mathfrak{B}$ unterscheiden sich nur um eine lineare Transformation mit Koeffizienten aus $Z(K)$. Wir nennen die Basen \mathfrak{C} , \mathfrak{C}' *zentral* bezüglich \mathfrak{B} . Bei Beschränkung auf solche bezüglich \mathfrak{B} zentrale Basen sind die Zentralisatoren von $\{a_0, \dots, a_n\}$ bzw. $\{a'_0, \dots, a'_n\}$ gleich.

Ist $P = \mathfrak{a}K = \mathfrak{b}K$ ein Punkt und sind b'_0, \dots, b'_n die Koordinaten von \mathfrak{b} bzgl. \mathfrak{C}' , so stimmen die Zentralisatoren von $\{a_0, \dots, a_n\}$ und $\{b'_0, \dots, b'_n\}$ überein, wenn ein a_i und ein b'_j in $Z(K)^\times$ liegt. Der Zentralisator von solchen *normierten projektiven Koordinaten* ist daher mit dem Punkt P invariant verknüpft, wenn eine Koordinatisierung (hier durch die Wahl der Vektorraumbasis \mathfrak{C}) fest vorgegeben ist, und nur solche Koordinatentransformationen zugelassen werden, die sich auf bezüglich \mathfrak{B} zentrale Basen stützen. Die normierten projektiven Koordinaten eines Punktes $Q \in P^\Phi$ haben als Zentralisator einen zu $Z(\{a_0, \dots, a_n\})$ konjugierten Unterkörper. Es ist also dieser Zentralisator durch P^Φ bis auf innere Automorphismen von K bestimmt⁶.

Eine weitere Konsequenz aus Hilfssatz 1 ist

Satz 1. Die Bahn P^Φ eines Punktes P mit Koordinaten $(a_0, \dots, a_n)K$ spannt einen Unterraum von $\mathcal{P}(\mathfrak{B}_K)$ auf, dessen Dimension um eins kleiner ist als der Dimension der Hülle von a_0, \dots, a_n im (Links-) Vektorraum ${}_{Z(K)}\mathfrak{B}$.

In Satz 1 unterliegen die Koordinaten von P keiner Einschränkung. Mit der Notation aus dem Beweis zu Hilfssatz 1 folgt, daß \mathfrak{U} direkte Summe eindimensionaler K -invarianter Unterräume $\{\mathfrak{u}_j K \mid j=0, \dots, k\}$ von

⁵Da K einen $Z(K)$ -Links- und einen K -Rechtsvektorraum abgibt, ist dieses Tensorprodukt ein K -Rechtsvektorraum. Vgl. etwa [4,18].

⁶Bezüglich beliebiger Koordinatisierungen zu projektiven Koordinatensystemen aus Φ -Fixpunkten ist bereits der Zentralisator der normierten projektiven Koordinaten eines Punktes nur bis auf innere Automorphismen von K bestimmt.

\mathfrak{B} ist: Man erhält dabei \mathbf{u}_j als Projektion des Vektors \mathbf{e}_j auf \mathfrak{U} in Richtung \mathfrak{C} . Es ist $\{\mathbf{u}_0, \dots, \mathbf{u}_k, \mathbf{e}_{k+1}, \dots, \mathbf{e}_n\}$ eine bezüglich \mathfrak{B} zentrale Basis. Die Koordinaten von \mathbf{a} zu dieser Basis haben die Form

$$(3) \quad (a'_0, \dots, a'_k, 0, \dots, 0),$$

wobei a'_0, \dots, a'_k l.u. in $Z(K)^K$ sind.

3. Zur weiteren Diskussion der Bahn P^{Φ} eines Punktes $P = \mathbf{a}K \in \mathcal{P}(\mathfrak{B})$ geben wir (a_0, \dots, a_n) als normierten Koordinatenvektor von P vor, wobei o.B.d.A. $a_0 = 1 \in Z(K)$ sei. Die spezielle Bauart (3) der Koordinaten muß nicht vorliegen. Wir setzen $A := \{a_0, \dots, a_n\}$. Die Menge $K\mathbf{a}$ bildet mit den von \mathfrak{B}_K induzierten Rechenoperationen einen $Z(A)$ -Rechtsvektorraum $K\mathbf{a}_{Z(A)}$, da sie abgeschlossen ist gegen Linearkombinationen mit Koeffizienten aus $Z(A)$. Die Rechtsvektorräume $K_{Z(A)}$ und $K\mathbf{a}_{Z(A)}$ sind isomorph, wie die Bijektion $x \mapsto x\mathbf{a}$ lehrt.

Ist $\{x_i \mathbf{a} \mid i=0, \dots, m\}$ l.u. in \mathfrak{B}_K , so ist diese Menge auch l.u. in $K\mathbf{a}_{Z(A)}$ bzw. $\{x_i \mid i=0, \dots, m\}$ l.u. in $K_{Z(A)}$. Hat die Hülle von a_0, \dots, a_n im Vektorraum $Z(K)^K$ die Dimension $k+1$, so gibt es eine l.u. Menge $X = \{x_0, \dots, x_k\} \subset K_{Z(A)}$ mit $X\mathbf{a}$ l.u. in \mathfrak{B}_K .

Umgekehrt kann jedoch für eine in $K_{Z(A)}$ l.u. Menge $X = \{x_0, \dots, x_m\}$ ($m \leq k$) dann $X\mathbf{a}$ linear abhängig (l.a.) in \mathfrak{B}_K sein: Die Menge X und die von X in K^\times erzeugte Unter(halb)gruppe haben denselben Zentralisator. Spannt nun $\{a_0, \dots, a_n\}$ im Linksvektorraum $Z(X)^K$ einen Unterraum auf, dessen Dimension kleiner als $m+1$ ist, so lehrt Hilfssatz 1, daß $X\mathbf{a}$ in \mathfrak{B}_K l.a. ist. Sei etwa \mathfrak{B}_K ein 3-dimensionaler Rechtsvektorraum über einem Schiefkörper K mit dem Grad⁷ $|K:Z(K)| = 9$; dann hat ein Unterkörper von K über $Z(K)$ den Grad 1, 3 oder 9 [3,30]. Wählen wir $(a_0, a_1, a_2) \in K^3$ mit $a_0 = 1$ und $a_1 a_2 \neq a_2 a_1$, so folgt $|a_1:Z(K)| = |a_2:Z(K)| = 3$ sowie $Z(A) = Z(K)$. Gilt weiters $x_0 = 1$, $x_1 = a_1$, $x_2 = a_2^2$, so sind die obigen Voraussetzungen erfüllt, da $Z(X)$ der von a_1 und $Z(K)$ aufgespannte maximale kommutative Unterkörper von K ist [4,45].

4. Um die Ergebnisse aus 3 verschärfen zu können, führen wir den Begriff der Liftung ein: Es sei $B := \{b_0=1, b_1, \dots, b_l\}$ nichtleere Teilmenge von K mit $Z(B) \subset Z(A)$. Wir erklären nun ausgehend vom Tripel $(\mathfrak{B}_K, \mathfrak{C}, \mathbf{a})$ einen K -Rechtsvektorraum

$$\mathfrak{B}_1 := \mathfrak{B} \oplus \dots \oplus \mathfrak{B} \quad (l+1 \text{ Summanden}),$$

⁷Solche Schiefkörper sind leicht anzugeben. Vgl. etwa [4,5].

sowie in \mathfrak{B}_1 eine Basis (δ_{jk} ist das Kronecker-Symbol)

$$\mathfrak{E}_1 := \{\epsilon_j \delta_{0r} \oplus \dots \oplus \epsilon_j \delta_{lr} \mid j=0, \dots, n, r=0, \dots, l\}$$

und einen Vektor

$$\mathfrak{a}_1 := \mathfrak{a}b_0 \oplus \dots \oplus \mathfrak{a}b_l.$$

Dabei werde \mathfrak{B} mit dem ersten Summanden der obigen direkten Summe identifiziert. Wir nennen $((\mathfrak{B}_1)_K, \mathfrak{E}_1, \mathfrak{a}_1)$ eine *B-Liftung* von $(\mathfrak{B}_K, \mathfrak{E}, \mathfrak{a})$. Dann ist analog 2 eine Fundamentalfigur $(\mathfrak{B}_1, \mathfrak{H}_1)$ von $\mathcal{P}(\mathfrak{B}_1)$, ein Punkt $P_1 := \mathfrak{a}_1 K$ und eine Kollineationsgruppe Φ_1 erklärt. Der Zentralisator der normierten projektiven Koordinaten von P_1 bzgl. \mathfrak{E}_1 ist $Z(B)$.

Dieser Liftungsprozess kann beliebig oft wiederholt werden und führt auf eine Folge $((\mathfrak{B}_s)_K, \mathfrak{E}_s, \mathfrak{a}_s)$ ($s=0, 1, 2, \dots$), wobei wir $((\mathfrak{B}_0)_K, \mathfrak{E}_0, \mathfrak{a}_0) := (\mathfrak{B}_K, \mathfrak{E}, \mathfrak{a})$ setzen. Wir nennen $((\mathfrak{B}_s)_K, \mathfrak{E}_s, \mathfrak{a}_s)$ auch eine *s-fache B-Liftung* von $(\mathfrak{B}_K, \mathfrak{E}, \mathfrak{a})$.

Hilfssatz 2. *Es gelte für eine Menge $B = \{b_0=1, b_1, \dots, b_l\} \subset K^\times$ die Bedingung $Z(B) \subset Z(A)$. Weiters sei $\{x_i \mathfrak{a} \mid i=0, \dots, m-1\}$ l.u. in \mathfrak{B}_K und $\{x_i \mid i=0, \dots, m\}$ l.u. in $K_{Z(B)}$. Dann ist*

$$(4) \quad \{x_i \mathfrak{a}_1 \mid i=0, \dots, m\}$$

l.u. in der B-Liftung $(\mathfrak{B}_1)_K$.

Beweis. Es gilt stets $x\mathfrak{a}_1 = x\mathfrak{a}b_0 \oplus \dots \oplus x\mathfrak{a}b_l$ für $x \in K$. Nach Voraussetzung ist

$$(5) \quad \{x_i \mathfrak{a} \mid i=0, \dots, m-1\}$$

Basis eines Unterraumes von \mathfrak{B} und daher

$$(6) \quad \{x_i \mathfrak{a}_1 \mid i=0, \dots, m-1\}$$

l.u. in \mathfrak{B}_1 . Wir nehmen an, daß $x_m \mathfrak{a}_1$ von (6) linear abhängig sei. Es gibt also eindeutig bestimmte Zahlen $y_0, \dots, y_{m-1} \in K$ mit

$$(7) \quad x_m \mathfrak{a}_1 = x_0 \mathfrak{a}_1 y_0 + \dots + x_{m-1} \mathfrak{a}_1 y_{m-1}.$$

Damit folgt

$$(8) \quad x_m a_j b_r = x_0 a_j b_r y_0 + \dots + x_{m-1} a_j b_r y_{m-1}, \quad j=0, \dots, n, r=0, \dots, l.$$

Diese Zahlen y_i sind nicht alle gleich 0 und zugleich die Koordinaten von $x_m \mathfrak{a}$ bzgl. der Basis (5). Multiplizieren wir (8) von rechts mit b_r^{-1} , so erhalten wir

$$x_m \mathfrak{a} = x_0 \mathfrak{a}(b_r y_0 b_r^{-1}) + \dots + x_{m-1} \mathfrak{a}(b_r y_{m-1} b_r^{-1}) \quad \text{für } r=0, \dots, l.$$

Die Basiseigenschaft von (5) und (7) zeigen $y_0, \dots, y_{m-1} \in Z(B)$. Aus (8) ergibt sich durch Herausheben von $a_j b_r$ nach rechts dann $\{x_i \mid i=0, \dots, m\}$ l.a. in $K_{Z(B)}$ im Widerspruch zur obigen Voraussetzung. \square

Satz 2. *Die Abbildung*

$$(9) \quad \iota: \mathcal{P}(K_{Z(A)}) \rightarrow P^\Phi, \quad xZ(A) \mapsto (x\mathfrak{a})K \quad \text{für } x \in K^\times$$

ist eine Bijektion der Punktmenge des projektiven Raumes über dem

Rechtsvektorraum $K_{Z(A)}$ auf die Bahn von $P = \mathfrak{a}K$ unter Φ . Bezeichnen wir mit \mathcal{L} die Menge der ι -Bildmengen aller Geraden des projektiven Raumes $\mathcal{P}(K_{Z(A)})$, so ist (P^Φ, \mathcal{L}) verfeinerter Spurraum von $\mathcal{P}(\mathfrak{B}_K)$.

Beweis. Für $Z(A) = K$ koppelt (9) zwei einpunktige projektive Räume, und (P^Φ, \mathcal{L}) ist sogar Spurraum von $\mathcal{P}(\mathfrak{B}_K)$.

Ist $Z(A) \neq K$, so gehen wir von der Menge A , dem Vektorraum K_K , seiner Basis $\{1\}$ und dem Vektor $1 \in K$ aus. Durch A -Liftung dieses Tripels folgt mit Hilfssatz 2, daß für x_0, x_1 l.u. in $K_{Z(A)}$ stets $x_0(a_0, \dots, a_n), x_1(a_0, \dots, a_n)$ l.u. in K_K^{n+1} gilt. Damit ist ι injektiv und nach Konstruktion auch surjektiv. Für je drei kollineare Punkte $x_i, Z(A)$ ($i=0,1,2$) von $\mathcal{P}(K_{Z(A)})$ sind die x_i l.a. in $K_{Z(A)}$ und damit auch $x_i \mathfrak{a}$ l.a. in $K \mathfrak{a}_{Z(A)}$ bzw. \mathfrak{B}_K ; das zeigt die Kollinearität in $\mathcal{P}(\mathfrak{B}_K)$ der Bildpunkte $(x_i, Z(A))^\iota$. \square

Durch mehrfache Anwendung von Hilfssatz 2 und mit Satz 2 folgt

Satz 3. Sind x_0, \dots, x_{s+1} mit $s \geq 0$ linear unabhängig in $K_{Z(A)}$, so sind nach s -facher A -Liftung die Punkte $(x_0 \mathfrak{a}_s)K, \dots, (x_{s+1} \mathfrak{a}_s)K$ unabhängig im projektiven Raum $\mathcal{P}((\mathfrak{B}_s)_K)$. Die Abbildung

$$\iota_s : \mathcal{P}(K_{Z(A)}) \rightarrow P_s^{\Phi_s}, x, Z(A) \mapsto (x \mathfrak{a}_s)K \quad (s \geq 0, x \in K^\times)$$

ist für $s \geq 1$ eine Kollineation des projektiven Raumes über dem Rechtsvektorraum $K_{Z(A)}$ auf den Spurraum $P_s^{\Phi_s}$ von $\mathcal{P}((\mathfrak{B}_s)_K)$. Die Einschränkung der Projektion

$$\pi_s : \mathcal{P}(\mathfrak{B}_{s+1}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathfrak{B}_s), (\mathfrak{r}_0 \oplus \dots \oplus \mathfrak{r}_n)K \mapsto \mathfrak{r}_0 K \quad (\mathfrak{r}_0, \dots, \mathfrak{r}_n \in \mathfrak{B}_s)$$

auf den Spurraum $P_{s+1}^{\Phi_{s+1}}$ ist eine Kollineation dieses projektiven Raumes auf den Spurraum $P_s^{\Phi_s}$ ($s \geq 1$) bzw. auf den verfeinerten Spurraum (P^Φ, \mathcal{L}) ($s = 0$). Dabei gilt $\pi_s|_{(P_{s+1}^{\Phi_{s+1}})} = \iota_{s+1}^{-1} \iota_s$.

Satz 3 liefert auch eine hinreichende Bedingung dafür, daß (9) eine Kollineation von $\mathcal{P}(K_{Z(A)})$ auf den Spurraum P^Φ festlegt: Es ist nur zu Überprüfen, ob sich $(\mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{a})$ in geeigneter Weise als Liftung darstellen läßt.

5. Wir schließen an Satz 3 an und schreiben \mathbb{Z} für die Menge der ganzen Zahlen. Es ist für $s \geq 0$ ist die Abbildung

(10) $\beta_s : K \mathfrak{a}_s \times K \rightarrow \mathfrak{B}_s$ mit $(x \mathfrak{a}_s, y) \mapsto x(\mathfrak{a}_s y)$
 \mathbb{Z} -bilinear und erfüllt $(x \mathfrak{a}_s, y)^{\beta_s} = (x \mathfrak{a}_s, zy)^{\beta_s}$ für alle $x \mathfrak{a}_s \in K \mathfrak{a}_s$,
 $z \in Z(A)$, $y \in K$. Die universelle Eigenschaft des Tensorprodukts

$$\mathfrak{I}_K := ((K \mathfrak{a}_s)_{Z(A)}) \otimes_{Z(A)} (Z(A) K_K)$$

zeigt die Existenz einer K -linearen Abbildung

(11) $\mathfrak{I}_K \rightarrow (\mathfrak{B}_s)_K$ mit $x \mathfrak{a}_s \otimes y \mapsto x \mathfrak{a}_s y$.

Im projektiven Raum $\mathcal{P}(\mathfrak{I}_K)$ wird durch die reinen Tensoren ein Spurraum festgelegt, welcher unter der durch (11) bestimmten

Punktabbildung isomorph auf den Spurraum $P_S^{\Phi_s}$ von $\mathcal{P}(\mathfrak{B}_s)$ ($s \geq 1$) bzw. auf den verfeinerten Spurraum (P^{Φ}, \mathcal{L}) von $\mathcal{P}(\mathfrak{B})$ ($s = 0$) abgebildet wird.

Ist der rechte Grad $|K : Z(A)|$ endlich, so ist die lineare Abbildung (11) für hinreichend großes s injektiv, und die Hülle von $P_S^{\Phi_s}$ in $\mathcal{P}(\mathfrak{B}_s)$ hat nach Hilfssatz 2 die Dimension $|K : Z(A)| - 1$. Da nun weitere A -Liftungen die Dimension nicht erhöhen können, zeigt Hilfssatz 1, daß der von A und $Z(K)$ aufgespannte Unterkörper C von K über $Z(K)$ den Grad $|K : Z(A)|$ hat. Ist andererseits der Grad $|C : Z(K)|$ endlich, so lassen sich diese Überlegungen umkehren. Wegen $Z(A) = Z(C)$ folgt insgesamt

$$|C : Z(K)| = |K : Z(C)| \quad (\text{falls einer der beiden Grade endlich}).$$

Dieser bekannte algebraische Satz [3,49], [4,42] (Centralizer Theorem), bekommt hier also geometrische Bedeutung.

6. Ein besonders durchsichtiges Beispiel für die bisherigen Ergebnisse erhalten wir, falls \mathfrak{a} die Koordinaten $(1, a, a^2, \dots, a^n)$ hat. Die Bahn des Punktes $P = \mathfrak{a}K$ ist dann wegen

$$(x, xa, \dots, xa^n)K = (1, xax^{-1}, \dots, (xax^{-1})^n)K \quad (x \in K^\times)$$

für $n \geq 2$ eine Konjugiertenklasse der nicht entarteten Normkurve [5], [6,53]

$$\Gamma = \{ \mathfrak{t}_t K \mid \mathfrak{t}_t = \sum \epsilon_j t^j \quad (j=0, \dots, n) \} \cup \{ \epsilon_n K \}$$

und läßt sich aus einer n -fachen $\{1, a\}$ -Liftung von $(K_K, \{1\}, 1)$ gewinnen. Wegen $n \geq 2$ liegt in jedem Fall ein Spurraum und nicht bloß ein verallgemeinerter Spurraum vor. Im Sonderfall, daß P^{Φ} einen echten Unterraum von $\mathcal{P}(\mathfrak{B})$ aufspannt, wird dieses Resultat in einer von A. Herzer angeregten Diplomarbeit [10] hergeleitet. Die gegenseitige Lage der Punkte einer Konjugiertenklasse wird durch Satz 3 beschrieben, und Satz 1 geht über in eine in [5] gezeigte Dimensionsformel.

7. Für alle $x \in K^\times$ ist die Einschränkung $\varphi_x|_{P^{\Phi}}$ eine projektive Kollineation des Bahnraumes (P^{Φ}, \mathcal{L}) . Die Gruppe Φ operiert einfach transitiv auf P^{Φ} . Der Stabilisator eines Punktes $(y\mathfrak{a})K$ ($y \in K^\times$) ist $\{ \varphi_x \mid x \in (yZ(A)y^{-1})^\times \}$. Nur der Fall $Z(A) \neq K$ verdient Interesse: Läßt eine Kollineation φ_x alle Punkte der Menge P^{Φ} einzeln fest, so muß x im Durchschnitt aller zu $Z(A)$ konjugierten Unterkörper von K liegen. Nach dem Satz von Cartan-Brauer-Hua [1,323] folgt dann $x \in Z(K)$ und $\varphi_x = \text{id}_{\mathcal{P}(\mathfrak{B})}$! Die Gruppe Φ operiert genau dann regulär auf P^{Φ} , wenn $Z(A) = Z(K)$ erfüllt ist. Vgl. auch [7]. In diesem Fall überträgt sich die Inzidenzgruppenstruktur von $\mathcal{P}(K_{Z(K)})$ nicht nur

auf die Gruppe Φ - siehe Fußnote 3 - sondern auch auf den Bahnraum (P^Φ, \mathcal{L}) .

LITERATUR

- [1] BENZ, W.: Vorlesungen über Geometrie der Algebren, Grundlehren Bd. 197, Springer, Berlin-Heidelberg-New-York 1973.
- [2] BRAUNER, H.: Geometrie projektiver Räume Band I, II, BI - Wissenschaftsverlag, Mannheim - Wien - Zürich 1976.
- [3] COHN, P.M.: Skew Field Constructions, London Math. Soc. Lect. Notes Ser. 27, Cambridge U.P., Cambridge 1977.
- [4] DRAXL, P.K.: Skew Fields, London Math. Soc. Lect. Notes Ser. 81, Cambridge U.P., Cambridge 1983.
- [5] HAVLICEK, H.: Die automorphen Kollineationen nicht entarteter Normkurven, Geom. Dedicata 16 (1984), 85-91.
- [6] HAVLICEK, H.: Applications of Results on Generalized Polynomial Identities in Desarguesian Projective Spaces, In: R. KAYA, P. PLAUMANN und K. STRAMBACH (Hrsg.): Rings and Geometry, Dordrecht, D.Reidel 1985.
- [7] KARZEL, H.: Bericht über projektive Inzidenzgruppen, Jber. DMV 67 (1965), 58-92.
- [8] KARZEL, H., K. Sörensen und D. Windelberg: Einführung in die Geometrie, UTB 184, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen 1973.
- [9] REICHARDT, H.: Vorlesungen über Vektor- und Tensorrechnung, VEB Deutscher Verlag d.Wissenschaften, Berlin 1957.
- [10] VOGT, L.: Über Normkurven erster und zweiter Art in endlich-dimensionalen projektiven Desarguesräumen, Dipl. Arbeit FB Math. Univ. Mainz 1986.

VERFASSER:

Hans Havlicek
Institut für Geometrie
Technische Universität Wien
Wiedner Hauptstraße 8-10
A-1040 Wien
Österreich