ZUR THEORIE LINEARER ABBILDUNGEN I

Hans Havlicek

The paper is concerned with a uniform geometric definition of linear mappings in a projective or grassmannian space into a projective space. We discuss sufficient conditions for the existence of a linear mapping in a finite dimensional pappian projective space which continues two given linear mappings in complementary subspaces.
The subspace spanned by the image set of a linear mapping in the grassmannian of d-dimensional subspaces of an n-dimensional projective space has at most dimension $\binom{n+1}{d+1}-1$.

1. LINEARE ABBILDUNGEN AUS PROJEKTIVEN RÄUMEN

1.1 In [3] , vgl. auch [1,S.150] hat H.Brauner eine geometrische Kennzeichnung jener linearen Abbildungen gegeben, die mindestens zwei Bildpunkte besitzen. Um lineare Abbildungen mit weniger als zwei Bildpunkten nicht auszuschließen, modifizieren wir die Definition linearer Abbildungen geringfügig.

Es seien $\Pi = (\mathfrak{P},\mathfrak{G})$ und $\Pi' = (\mathfrak{P}',\mathfrak{G}')$ zwei projektive Räume und ψ sei eine nicht notwendig globale Abbildung aus $\mathfrak{P}$ in $\mathfrak{P}'$. Sind $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}_2$ Teilmengen von $\mathfrak{P}$, so sei $\mathfrak{M}_1 \vee \mathfrak{M}_2$ ihre Verbindungsmenge [1,S.93]. Die Abbildung ψ heißt <u>linear</u>, wenn sie folgende Bedingungen erfüllt:

(L1) $(\{X\}\vee\{Y\})\psi = \{X\}\psi\vee\{Y\}\psi$ für alle Punkte $X \neq Y$ und $X,Y\in\mathfrak{P}$.

(L2) Ist $\{X\}\psi = \{Y\}\psi$ für zwei verschiedene Punkte $X,Y\in\mathfrak{P}$, so existiert stets ein Punkt $A\in\{X\}\vee\{Y\}$ mit $\{A\}\psi = \emptyset$.[1]

Die in [3] untersuchten Abbildungen sind durch (L1) sowie eine

[1] Gehört A der Ausnahmemenge $\mathbb{A}(\psi)$ an, so ist $A\psi$ nicht definiert und für die Teilmenge $\{A\}$ von $\mathfrak{P}$ gilt $\{A\}\psi = \emptyset$.

mindestens zweielementige Bildmenge gekennzeichnet und erfüllen (L2).

Für jeden Unterraum $\mathfrak{P}_1 \subset \mathfrak{P}$ ist die Einschränkung $\psi|\mathfrak{P}_1$ ebenfalls eine lineare Abbildung. Ist $g \subset \mathfrak{P}$ eine Gerade mit zwei verschiedenen Ausnahmepunkten A_1, A_2, so folgt aus $g = \{A_1\} \vee \{A_2\}$ mit (L1), daß g nur Ausnahmepunkte besitzt, also $g\psi = \emptyset$; die Ausnahmemenge $\mathbb{A}(\psi)$ ist daher ein Unterraum von Π. Trägt eine Gerade g genau einen Ausnahmepunkt A, so folgt $g\psi = (\{A\} \vee \{P\})\psi = \emptyset \vee \{P\}\psi = \{P\psi\}$ mit $P \in g \setminus \{A\}$. Gehört g ganz der Definitionsmenge $\mathbb{D}(\psi)$ an, so ist $\psi|g$ nach (L2) injektiv.

Eine globale lineare Abbildung $\rho: \mathfrak{P} \to \mathfrak{P}'$ ist nach (L2) injektiv, und wir nennen sie eine <u>lineare Injektion</u>. Eine lineare Injektion ρ bildet den projektiven Raum Π isomorph auf den projektiven Raum $\Pi(\mathrm{Im}(\rho))$ ab. Das ist für $|\mathrm{Im}(\rho)| \leq 1$ trivial und wird für $|\mathrm{Im}(\rho)| \geq 2$ in [3] gezeigt. Die surjektiven linearen Injektionen sind genau die Kollineationen.

Sind $\mathfrak{P}_1$ und $\bar{\mathfrak{P}}_1$ komplementäre Unterräume von Π, so ist die Abbildung $\pi: \mathfrak{P} \to \mathfrak{P}_1$ mit $\{X\pi\} := (\bar{\mathfrak{P}}_1 \vee \{X\}) \cap \mathfrak{P}_1$ für alle $X \in \mathfrak{P} \setminus \bar{\mathfrak{P}}_1$ die <u>Projektion</u> mit dem Zentrum $\bar{\mathfrak{P}}_1$ auf $\mathfrak{P}_1$. Jede Projektion ist eine lineare Abbildung und genau für die Punkte des Zentrums nicht definiert. Eine geometrische Kennzeichnung von Projektionen durch innere Eigenschaften wurde von H. Timmermann [7] angegeben.

Es gilt folgender <u>Hauptsatz</u> über lineare Abbildungen:

<u>SATZ 1.1. Jede lineare Abbildung</u> $\psi: \mathfrak{P} \to \mathfrak{P}'$ <u>ist das Produkt einer Projektion mit dem Zentrum</u> $\mathbb{A}(\psi)$ <u>auf einen zu</u> $\mathbb{A}(\psi)$ <u>komplementären Unterraum</u> $\mathfrak{P}_1$ <u>und einer linearen Injektion</u> $\rho: \mathfrak{P}_1 \to \mathfrak{P}'$.

<u>Beweis</u>. Jede lineare Abbildung mit mindestens zwei verschiedenen Bildpunkten gestattet nach [3] die angegebene Darstellung. Gleiches gilt trivialerweise für jede leere lineare Abbildung. Besitzt ψ genau einen Bildpunkt $P' \in \mathfrak{P}'$, so existiert ein Punkt $P \in \mathbb{D}(\psi)$ mit $P\psi = P'$, und jede Gerade durch P trägt genau einen Ausnahmepunkt. Damit ist der Ausnahmeunterraum $\mathbb{A}(\psi)$ als eine zu $\{P\}$ komplementäre Hyperebene nachgewiesen; mit $\mathfrak{P}_1 := \{P\}$ folgt daraus die Gültigkeit des Hauptsatzes.

Wegen $\mathrm{Im}(\psi) = \mathrm{Im}(\rho)$ ist die Bildmenge der linearen Abbildung ψ ein Unterraum von Π'. Die Dimension von $\Pi(\mathrm{Im}(\rho))$ heißt der Rang der linearen Abbildung ψ, in Zeichen $\mathrm{rg}\psi$.

Für Teilmengen $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2 \subset \mathfrak{P}$ gilt $\mathfrak{M}_1 \vee \mathfrak{M}_2 = \mathfrak{M}_1 \cup \mathfrak{M}_2 \cup (\bigcup(\{X_1\} \vee \{X_2\} \mid X_1 \in \mathfrak{M}_1 \wedge X_2 \in \mathfrak{M}_2))$; ist ψ eine lineare Abbildung, so findet man durch kurze Rechnung $(\mathfrak{M}_1 \vee \mathfrak{M}_2)\psi = \mathfrak{M}_1\psi \vee \mathfrak{M}_2\psi$. Die Abbildung ψ bildet daher die Halbgruppe $(u\Pi, \vee)$ aller Unterräume von Π [1,S.95] homomorph in die Halbgruppe $(u\Pi', \vee)$ ab. Wir bezeichnen mit $[\mathfrak{M}]$ die Verbindungshülle einer Teilmenge $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{P}$ [1,S.86]. Aus $\mathfrak{M} \subset [\mathfrak{M}]$ folgt $\mathfrak{M}\psi \subset [\mathfrak{M}]\psi$, und da $[\mathfrak{M}]\psi$ ein Unterraum ist, gilt auch $[\mathfrak{M}\psi] \subset [\mathfrak{M}]\psi$. Jeder Punkt $X' \in [\mathfrak{M}]\psi$ besitzt einen Urpunkt $X \in [\mathfrak{M}]$, und es gilt $X \in \bigvee(\{M_i\} \mid M_i \in \mathfrak{M}, i=1,\dots,k)$, also $X' \in [\mathfrak{M}\psi]$, was insgesamt $[\mathfrak{M}\psi] = [\mathfrak{M}]\psi$ ergibt. Speziell für jede Basis $\mathfrak{B}$ von Π ergibt sich aus $\mathrm{Im}(\psi) = [\mathfrak{B}]\psi = [\mathfrak{B}\psi]$ die Formel

$$(1,1) \qquad \mathrm{rg}\psi = \dim\Pi([\mathfrak{B}\psi]).$$

1.2 Wir betrachten in 1.2 endlichdimensionale projektive Räume $\Pi = (\mathfrak{P}, \mathfrak{G})$ und $\Pi' = (\mathfrak{P}', \mathfrak{G}')$ mit $\dim\Pi = \dim\Pi' = n$ und untersuchen, in welcher Weise eine Kollineation eines echten Unterraumes von Π auf einen echten Unterraum von Π' zu einer Kollineation von Π auf Π' fortgesetzt werden kann. Zur Angabe von Kollineationen benützen wir die in [1,S.152] eingeführten Fundamentalfiguren projektiver Räume.

Sind $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ komplementäre, nichtleere Unterräume von Π und $(\mathfrak{B}_1, \beta_1)$ bzw. $(\mathfrak{B}_2, \beta_2)$ Fundamentalfiguren von $\Pi(\mathfrak{P}_1)$ bzw. $\Pi(\mathfrak{P}_2)$, so ist $(\mathfrak{B}_1 \cup \mathfrak{B}_2, \beta)$ für jede Hyperebene $\beta \supset \beta_1 \vee \beta_2$, welche von $\mathfrak{P}_1 \vee \beta_2$ und $\mathfrak{P}_2 \vee \beta_1$ verschieden ist, eine Fundamentalfigur von Π. Nach [1,S.95] ist nämlich $\mathfrak{B}_1 \cup \mathfrak{B}_2$ eine Basis von Π und wegen $\beta_i = \mathfrak{P}_i \cap \beta$ $(i=1,2)$ enthält β keinen Punkt der Basis $\mathfrak{B}_1 \cup \mathfrak{B}_2$.

Es seien nun $\mathfrak{P}_r$ und $\mathfrak{P}'_r$ r-dimensionale echte Unterräume $(r \geqq 2)$ von Π bzw. Π', und $\varkappa_r : \mathfrak{P}_r \to \mathfrak{P}'_r$ sei eine Kollineation von $\Pi(\mathfrak{P}_r)$ auf $\Pi(\mathfrak{P}'_r)$. Ist $(\mathfrak{B}_r, \beta_r) = (\{P_0, \dots, P_r\}, \beta_r)$ eine geordnete Fundamentalfigur von $\Pi(\mathfrak{P}_r)$, so wählen wir geordnete Fundamentalfiguren $(\mathfrak{B}, \beta) = (\{P_0, \dots, P_r, P_{r+1}, \dots, P_n\}, \beta)$ bzw. $(\mathfrak{B}', \beta') = (\{P_0\varkappa_r, \dots, P_r\varkappa_r, P'_{r+1}, \dots, P'_n\}, \beta')$ von Π bzw. Π' mit $\beta_r = \mathfrak{P}_r \cap \beta$ und $\beta_r\varkappa_r = \mathfrak{P}'_r \cap \beta'$.

<u>SATZ 1.2. Es existiert genau eine Kollineation κ von Π auf Π', welche κ_r fortsetzt und die geordnete Fundamentalfigur</u> $(\mathfrak{B},\beta)$ <u>auf die geordnete Fundamentalfigur</u> $(\mathfrak{B}',\beta')$ <u>abbildet.</u>

<u>Beweis.</u> Die Konstruktion der Kollineation κ erfolgt schrittweise. Im Unterraum $\mathfrak{P}_{r+1} := \mathfrak{P}_r \vee \{P_{r+1}\}$ ist $(\{P_0,\dots,P_r,P_{r+1}\},\beta_{r+1})$ mit $\beta_{r+1} := \mathfrak{P}_{r+1} \cap \beta$ eine geordnete Fundamentalfigur. Analog gewinnen wir aus $(\mathfrak{B}',\beta')$ eine geordnete Fundamentalfigur $(\{P_0\kappa_r,\dots,P_r\kappa_r,P'_{r+1}\},\beta'_{r+1})$ in $\mathfrak{P}'_{r+1} := \mathfrak{P}'_r \vee \{P'_{r+1}\}$. Jeder Punkt $X \in \mathfrak{P}_{r+1} \setminus (\mathfrak{P}_r \cup \beta_{r+1})$ bzw. $X' \in \mathfrak{P}'_{r+1} \setminus (\mathfrak{P}'_{r+1} \cup \beta'_{r+1})$ ist Zentrum einer Perspektivität [1,S.148] $\zeta_X : \beta_{r+1} \to \mathfrak{P}_r$ bzw. $\zeta'_{X'} : \beta'_{r+1} \to \mathfrak{P}'_r$; wir setzen $\zeta := \zeta_{P_{r+1}}$ und $\zeta' := \zeta'_{P'_{r+1}}$.

Wir definieren eine Abbildung $\kappa_{r+1} : \mathfrak{P}_{r+1} \to \mathfrak{P}'_{r+1}$ durch

(I) $X\kappa_{r+1} := X\kappa_r$ für alle $X \in \mathfrak{P}_r$,

(II) $X\kappa_{r+1} := X\zeta\kappa_r\zeta'^{-1}$ für alle $X \in \beta_{r+1} \setminus \mathfrak{P}_r$,

(III) $X\kappa_{r+1} := X'$ für alle $X \in \mathfrak{P}_{r+1} \setminus (\mathfrak{P}_{r+1} \cup \beta_r)$, wobei X' das nach [1,S.148] eindeutig bestimmte Zentrum der Perspektivität $\zeta'\kappa_r^{-1}\zeta^{-1}\zeta_X\kappa_r : \beta'_{r+1} \to \mathfrak{P}'_r$ ist.

Für jeden Punkt von $\mathfrak{P}'_{r+1}$ ist der Urpunkt eindeutig rekonstruierbar, die Abbildung κ_{r+1} also bijektiv. Eine Diskussion der möglichen Fälle lehrt ferner, daß κ_{r+1} je drei kollineare Punkte in kollineare Punkte abbildet.

Wiederholte Anwendung der angegebenen Konstruktionsvorschrift liefert nach endlich vielen Schritten eine Kollineation $\kappa : \mathfrak{P} \to \mathfrak{P}'$ mit den gewünschten Eigenschaften. Sind κ und $\tilde{\kappa}$ zwei solche Kollineationen, so ist $\kappa\tilde{\kappa}^{-1}$ eine Kollineation, welche die Punkte von $\mathfrak{B}$ als Fixpunkte und β als Fixhyperebene besitzt und deren Einschränkung auf die Gerade[2] P_0P_1 die Identität ist. Nach [1,S.155] gilt dann $\kappa\tilde{\kappa}^{-1} = \mathrm{id}_{\mathfrak{P}}$.

1.3 Es seien $\Pi = (\mathfrak{P},\mathfrak{G})$ ein endlichdimensionaler projektiver Raum, $\Pi' = (\mathfrak{P}',\mathfrak{G}')$ ein projektiver Raum und $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$ zwei verschiedene echte Unterräume von Π mit $\mathfrak{P}_1 \vee \mathfrak{P}_2 = \mathfrak{P}$. Wir untersuchen, ob zwei gegebene lineare Abbildungen $\psi_1 : \mathfrak{P}_1 \to \mathfrak{P}'$ und $\psi_2 : \mathfrak{P}_2 \to \mathfrak{P}'$ mit $\psi_1|\mathfrak{P}_1 \cap \mathfrak{P}_2 = \psi_2|\mathfrak{P}_1 \cap \mathfrak{P}_2$ zu einer linearen Abbildung $\psi : \mathfrak{P} \to \mathfrak{P}'$ fortgesetzt werden können. Jede lineare Abbildung, die gegebene Abbildungen fortsetzt, bezeichnen wir im folgenden als <u>lineare</u>

---

[2] Wir bezeichnen die Verbindungsgerade zweier verschiedener Punkte A, B auch mit AB.

<u>Fortsetzung</u> dieser Abbildungen.

<u>SATZ 1.3. Ist die Menge</u> $\mathbb{D}(\psi_1)\cap\mathbb{D}(\psi_2)$ <u>nicht leer, so existiert höchstens eine lineare Fortsetzung</u> $\psi:\mathfrak{P}\to\mathfrak{P}'$ <u>der Abbildungen</u> ψ_1 <u>und</u> ψ_2.

<u>Beweis.</u> Ist $Q\in\mathbb{D}(\psi_1)\cap\mathbb{D}(\psi_2)$, so gibt es aus jedem Punkt $X\in\mathfrak{P}\setminus(\mathfrak{P}_1\cup\mathfrak{P}_2)$ eine Treffgerade t_X an $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ so, daß $\{Q\}\vee t_X$ eine Ebene ist, die $\mathfrak{P}_i$ $(i=1,2)$ in einer Geraden g_i mit $g_1\neq g_2$ schneidet. Nehmen wir die Existenz einer linearen Fortsetzung ψ von ψ_1 und ψ_2 an, so ist $\{X\}\psi$ und damit ψ durch $\psi_i|g_i$ eindeutig bestimmt. Dies lehrt die folgende Fallunterscheidung.

(1) $rg(\psi_1|g_1) = rg(\psi_2|g_2) = 1$ und $g_1\psi_1\neq g_2\psi_2$. Wählen wir zwei verschiedene Punkte $1,2\in g_1\setminus\{Q\}$, dann sind $3,4$ mit $\{3\} = 1X\cap g_2$ und $\{4\} = 2X\cap g_2$ verschiedene Punkte von $g_2\setminus\{Q\}$. Es gilt dann notwendig $\{X\}\psi = (1\psi_1)(3\psi_2)\cap(2\psi_1)(4\psi_2)$ nach (L1).

(2) $rg(\psi_1|g_1) = rg(\psi_2|g_2) = 1$ und $g_1\psi_1 = g_2\psi_2$. Aus der angenommenen Existenz von ψ ergibt sich, daß die Abbildung $(\psi_1|g_1)(\psi_2|g_2)^{-1}:g_1\to g_2$ eine Perspektivität mit einem eindeutig bestimmten Zentrum A ist. Daher gilt notwendig $\{A\}\psi=\emptyset$ nach (L2) und für $X\neq A$ folgt $\{X\}\psi = (XA\cap g_1)\psi_1$.

(3) $rg(\psi_1|g_1) = 1$ und $rg(\psi_2|g_2) = 0$. Die Gerade g_2 trägt dann genau einen Ausnahmepunkt A und $\{X\}\psi$ ist wie in (2) bestimmt.

(4) $rg(\psi_1|g_1) = rg(\psi_2|g_2) = 0$. Es folgt $g_1\psi_1 = g_2\psi_2 = \{Q\psi_1\} = \{Q\psi_2\}$. Die Geraden g_i $(i=1,2)$ besitzen je einen Ausnahmepunkt $A_i\neq Q$. Gilt $X\in A_1A_2$, so ergibt sich $\{X\}\psi=\emptyset$, andernfalls ist notwendig $\{X\psi\} = \{Q\psi_1\}$.

Sind die Unterräume $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$ komplementär, so nennen wir einen Punkt $W\in\mathfrak{P}\setminus(\mathfrak{P}_1\cup\mathfrak{P}_2)$ bzw. die einpunktige Menge $\{W\}$ bezüglich der linearen Abbildungen ψ_1, ψ_2 <u>wesentlich</u>, falls die Fußpunkte W_1 bzw. W_2 der eindeutigen Treffgeraden aus W an $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ den Definitionsmengen $\mathbb{D}(\psi_1)$ bzw. $\mathbb{D}(\psi_2)$ angehören. Für $W_1\psi_1\neq W_2\psi_2$ bezeichnen wir jede einpunktige Menge $\{W'\}\subset\mathfrak{P}'$ mit $W'\in(W_1\psi_1)(W_2\psi_2)\setminus\{W_1\psi_1,W_2\psi_2\}$ als <u>zulässige Bildmenge</u> von $\{W\}$; gilt jedoch $W_1\psi_1 = W_2\psi_2$, so sei nur die leere Menge zulässige Bildmenge von $\{W\}$.

SATZ 1.4. Sind die Unterräume $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2$ komplementär und gibt es einen bezüglich ψ_1, ψ_2 wesentlichen Punkt W, so existiert höchstens eine lineare Fortsetzung $\psi:\mathfrak{P} \to \mathfrak{P}'$ von ψ_1 und ψ_2, welche $\{W\}$ auf eine gegebene zulässige Bildmenge von $\{W\}$ abbildet. Falls kein bezüglich ψ_1, ψ_2 wesentlicher Punkt vorhanden ist, existiert genau eine lineare Fortsetzung $\psi:\mathfrak{P} \to \mathfrak{P}'$ von ψ_1 und ψ_2.[3]

Beweis. (1) Gibt es keinen bezüglich ψ_1, ψ_2 wesentlichen Punkt, so ist eine der beiden Abbildungen, etwa ψ_1, eine leere Abbildung. Bezeichnen wir mit $\pi_2:\mathfrak{P} \to \mathfrak{P}_2$ die Projektion mit dem Zentrum $\mathfrak{P}_1$ auf $\mathfrak{P}_2$, so ist $\psi := \pi_2\psi_2:\mathfrak{P} \to \mathfrak{P}'$ die einzige lineare Fortsetzung von ψ_1 und ψ_2.

(2) Es sei W ein bezüglich ψ_1, ψ_2 wesentlicher Punkt und $W_1\psi_1 = W_2\psi_2$. Wir definieren eine lineare Abbildung $\psi_3:W_1W_2 \to \mathfrak{P}'$ durch $\mathbb{A}(\psi_3) = \{W\}$ und $\mathrm{Im}(\psi_3) = \{W_1\psi_1\}$. Jede lineare Fortsetzung $\psi:\mathfrak{P} \to \mathfrak{P}'$ von ψ_1 und ψ_2 mit $W\in\mathbb{A}(\psi)$ leistet $\psi|W_1W_2 = \psi_3$. Für $\mathfrak{P}_1 \not\subset W_1W_2$ folgt mit Satz 1.3, daß ψ_1 und ψ_3 höchstens eine lineare Fortsetzung $\tilde{\psi}_1:\mathfrak{P}_1 \vee W_1W_2 \to \mathfrak{P}'$ besitzen; für $\mathfrak{P}_1 \subset W_1W_2$ ist das trivial. Wiederholung dieser Schlüsse ergibt, daß höchstens eine lineare Fortsetzung $\tilde{\psi}:(\mathfrak{P}_1 \vee W_1W_2)\vee\mathfrak{P}_2 = \mathfrak{P} \to \mathfrak{P}'$ von $\tilde{\psi}_1$ und ψ_2 existiert, und es gilt notwendig $\tilde{\psi} = \psi$.

(3) Es sei W ein bezüglich ψ_1, ψ_2 wesentlicher Punkt, $W_1\psi_1 \neq W_2\psi_2$ und $\{W'\}$ eine zulässige Bildmenge von $\{W\}$. Ist $\mathrm{Im}(\psi_1) = \{W_1\psi_1\}$ und $\mathrm{Im}(\psi_2) = \{W_2\psi_2\}$, so ist $\mathbb{A}(\psi_1)\vee\mathbb{A}(\psi_2)$ zur Geraden W_1W_2 komplementär. Jede lineare Fortsetzung ψ von ψ_1 und ψ_2 ist notwendig Produkt der Projektion mit dem Zentrum $\mathbb{A}(\psi_1)\vee\mathbb{A}(\psi_2)$ auf W_1W_2 und einer linearen Injektion $\rho:W_1W_2 \to \mathfrak{P}'$, welche $W_1 \mapsto W_1\psi_1$, $W_2 \mapsto W_2\psi_2$ und $W \mapsto W'$ leistet. Gilt jedoch etwa $\mathrm{rg}\,\psi_1 \geq 1$, so existiert durch den Punkt W_1 eine Gerade $g_1 \subset \mathbb{D}(\psi_1)$; nach Satz 1.3 gibt es höchstens eine lineare Abbildung $\tilde{\psi}_1:(g_1 \vee W_1W_2) \to \mathfrak{P}'$, welche ψ_1 fortsetzt und $W \mapsto W'$, $W_2 \mapsto W_2\psi_2$ leistet. Wie in (2) ergibt sich nun die Existenz höchstens einer linearen Fortsetzung ψ von ψ_1 und ψ_2.

---

[3] Satz 1.4 gilt im Sonderfall $\mathrm{rg}\,\psi_1 = \mathrm{rg}\,\psi_2 = 0$ und $\mathrm{Im}(\psi_1) \neq \mathrm{Im}(\psi_2)$ nur dann, wenn wir zwischen zwei linearen Fortsetzungen ψ und $\tilde{\psi}$ von ψ_1 und ψ_2, welche dieselben Fasern besitzen, nicht unterscheiden.

Wir diskutieren im folgenden die Existenz einer linearen Fortsetzung ψ von ψ_1 und ψ_2 unter der zusätzlichen Voraussetzung, daß Π ein projektiver *Pappos-Raum* ist.

HILFSSATZ 1.5. Sind $\mathcal{T}_1$ *und* $\mathcal{T}_2$ *zwei windschiefe s-dimensionale Unterräume* $(s \geq 0)$ *von* Π *und ist* $\rho: \mathcal{T}_1 \to \mathcal{T}_2$ *eine Kollineation, die für s=1 eine Projektivität und für* $s \geq 2$ *eine projektive Kollineation ist, dann existiert ein zu* $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ *komplementärer Unterraum* $\mathfrak{A}$ *so, daß die Projektion* $\pi: \mathfrak{P} \to \mathcal{T}_2$ *mit dem Zentrum* $\mathfrak{A}$ *auf* $\mathcal{T}_2$ *eine lineare Fortsetzung von* ρ *ist.*

Beweis. Es sei $\tilde{\mathfrak{A}}$ ein zu $\mathcal{T}_1$ und $\mathcal{T}_2$ komplementärer Unterraum und $\tilde{\pi}: \mathfrak{P} \to \mathcal{T}_2$ die Projektion mit dem Zentrum $\tilde{\mathfrak{A}}$ auf $\mathcal{T}_2$. Gilt $s = 0$, so leistet $\tilde{\pi}$ bereits das Gewünschte. Ist $s \geq 1$, so wählen wir eine Fundamentalfigur $(\mathcal{B}_1, \beta_1)$ von $\Pi(\mathcal{T}_1)$. Im Verbindungsraum $\Pi(\mathcal{T}_1 \vee \mathcal{T}_2)$ gibt es nach 1.2 Fundamentalfiguren $(\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_1\tilde{\pi}, \beta_{\tilde{\pi}})$ und $(\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_1\rho, \beta_\rho)$ mit $\beta_{\tilde{\pi}} \cap \mathcal{T}_1 = \beta_\rho \cap \mathcal{T}_1 = \beta_1$ und $\beta_{\tilde{\pi}} \cap \mathcal{T}_2 = \beta_1\tilde{\pi}$ bzw. $\beta_\rho \cap \mathcal{T}_2 = \beta_1\rho$. Es existiert genau eine projektive Kollineation $\varkappa_{12} \in PGL(\Pi(\mathcal{T}_1 \vee \mathcal{T}_2))$ mit $P_j \mapsto P_j$, $P_j\tilde{\pi} \mapsto P_j\rho$ $(P_j \in \mathcal{B}_1)$ und $\beta_{\tilde{\pi}} \to \beta_\rho$ [1,S.157] und $\varkappa_{12}$ kann nach Satz 1.2 zu einer Kollineation $\varkappa \in PGL(\Pi)$ fortgesetzt werden; nach Konstruktion gilt $\varkappa | \mathcal{T}_1 = id_{\mathcal{T}_1}$ und $\rho = \tilde{\pi}(\varkappa | \mathcal{T}_2)$. Die Projektion $\pi: \mathfrak{P} \to \mathcal{T}_2$ mit dem Zentrum $\mathfrak{A} := \tilde{\mathfrak{A}}\varkappa$ auf $\mathcal{T}_2$ ergibt die gesuchte lineare Fortsetzung von ρ.

Die linearen Abbildungen ψ_1 und ψ_2 besitzen nicht notwendig eine lineare Fortsetzung in den Gesamtraum. Wir nennen die Abbildungen ψ_1, ψ_2 *verträglich*, wenn sie - gegebenenfalls nach Wechsel der Indizes - eine der folgenden Bedingungen erfüllen:

(V1) $rg\psi_2 \leq 0$ und $Im(\psi_1) \subset Im(\psi_2)$.

(V2) $rg\psi_1 \leq 0$ und $rg\psi_2 \geq 2$.

(V3) $rg\psi_1 = 1$ und $Im(\psi_1) = Im(\psi_2)$. Weiters existieren Geraden $g_i \subset \mathfrak{D}(\psi_i)$ $(i=1,2)$ so, daß die Abbildung $\sigma := (\psi_1 | g_1)(\psi_2 | g_2)^{-1}$ projektiv ist.

(V4) $rg\psi_1 \geq 1$ und $rg\psi_2 \geq 2$. Weiters existieren Geraden $g_i \subset \mathfrak{D}(\psi_i)$ $(i=1,2)$ und eine Projektivität $\sigma': g_1\psi_1 \to g_2\psi_2$ in Π' so, daß die Abbildung $\sigma := (\psi_1 | g_1)\sigma'(\psi_2 | g_2)^{-1}$ projektiv in Π ist.

Sind $h_i \subset \mathbb{D}(\psi_i)$ zwei Geraden, so ist $\tau := (\psi_1|h_1)(\psi_2|h_2)^{-1}$ projektiv, falls (V3) gilt; ist jedoch (V4) erfüllt, so ist für jede Projektivität $\tau': h_1\psi_1 \to h_2\psi_2$ die Abbildung $\tau := (\psi_1|h_1)\tau'(\psi_2|h_2)^{-1}$ projektiv. In Ergänzung zu Satz 1.4 gilt

SATZ 1.6. *Sind die linearen Abbildungen $\psi_1 : \mathfrak{P}_1 \to \mathfrak{P}'$ und $\psi_2 : \mathfrak{P}_2 \to \mathfrak{P}'$ aus den komplementären echten Unterräumen $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2$ verträglich, so existiert eine lineare Fortsetzung $\psi : \mathfrak{P} \to \mathfrak{P}'$ der Abbildungen ψ_1 und ψ_2. Gibt es einen bezüglich ψ_1, ψ_2 wesentlichen Punkt W, so existiert genau eine lineare Fortsetzung $\psi : \mathfrak{P} \to \mathfrak{P}'$ von ψ_1 und ψ_2, welche $\{W\}$ auf eine gegebene zulässige Bildmenge von $\{W\}$ abbildet.*

Beweis. (1) Im projektiven Raum $\Pi(\mathfrak{P}_i)$ $(i=1,2)$ wählen wir einen zum Ausnahmeunterraum $\mathbb{A}(\psi_i)$ komplementären Unterraum $\mathcal{R}_i$; ist $\pi_i : \mathfrak{P}_i \to \mathcal{R}_i$ die Projektion mit dem Zentrum $\mathbb{A}(\psi_i)$ auf $\mathcal{R}_i$, so gestattet ψ_i die Darstellung $\psi_i = \pi_i\rho_i$, wobei $\rho_i : \mathcal{R}_i \to \mathfrak{P}'$ eine lineare Injektion ist. Die Unterräume $\mathcal{T}_i := (\mathrm{Im}(\psi_1) \cap \mathrm{Im}(\psi_2))\rho_i^{-1}$ und die Kollineation $(\rho_1|\mathcal{T}_1)(\rho_2|\mathcal{T}_2)^{-1}$ erfüllen für $\mathcal{T}_1 \neq \emptyset$ die Voraussetzungen von Hilfssatz 1.5, da ψ_1 und ψ_2 verträglich sind. Es gibt daher einen Unterraum $\mathfrak{A}_3$ so, daß in $\Pi(\mathcal{T}_1 \vee \mathcal{T}_2)$ die Projektion mit dem Zentrum $\mathfrak{A}_3$ auf $\mathcal{T}_2$ die Kollineation $(\rho_1|\mathcal{T}_1)(\rho_2|\mathcal{T}_2)^{-1}$ fortsetzt. Ist $\mathcal{T}_1 = \emptyset$, so setzen wir $\mathfrak{A}_3 := \emptyset$.

Wählen wir in $\Pi(\mathbb{A}(\psi))$ und in $\Pi(\mathcal{R}_i)$ $(i=1,2)$ je eine Basis, so erkennen wir, daß die Unterräume $\mathfrak{A}_{12} := \mathbb{A}(\psi_1) \vee \mathbb{A}(\psi_2)$ und $\mathcal{R}_{12} := \mathcal{R}_1 \vee \mathcal{R}_2$ komplementär sind. Die Projektion mit dem Zentrum $\mathfrak{A}_{12}$ auf $\mathcal{R}_{12}$ bezeichnen wir mit $\pi_{12} : \mathfrak{P} \to \mathcal{R}_{12}$. Ferner sei $\pi_3 : \mathcal{R}_{12} \to \mathcal{R}_3$ in $\Pi(\mathcal{R}_{12})$ die Projektion mit dem Zentrum $\mathfrak{A}_3$ auf einen zu $\mathfrak{A}_3$ komplementären Unterraum $\mathcal{R}_3$. Dann ist die zusammengesetzte Abbildung $\pi := \pi_{12}\pi_3 : \mathfrak{P} \to \mathcal{R}_3$ linear und stimmt mit der Projektion mit dem Zentrum $\mathfrak{A}_{12} \vee \mathfrak{A}_3$ auf $\mathcal{R}_3$ überein.

Für jeden Punkt $X_i \in \mathfrak{P}_i$ $(i=1,2)$ folgt $\{X_i\}\pi_i = \{X_i\}\pi_{12}$ aus

$\{X_i\}\vee\mathbb{A}(\psi_i)\subset\{X_i\}\vee\mathfrak{A}_{12}$. Ferner ist $\mathfrak{A}_3\subset\mathfrak{T}_1\vee\mathfrak{T}_2$ zu $\mathfrak{R}_i\supset\mathfrak{T}_i$ windschief, also $\pi_3|\mathfrak{R}_i:\mathfrak{R}_i\to\mathfrak{R}_3$ injektiv. Das ergibt $\psi_i = (\pi|\mathfrak{P}_i)(\pi_3|\mathfrak{R}_i)^{-1}\rho_i$, und $\rho_{i3} := (\pi_3|\mathfrak{R}_i)^{-1}\rho_i:\mathfrak{R}_3\to\mathfrak{P}'$ ist eine lineare Injektion.

Wir setzen nun die Abbildungen ρ_{13} und ρ_{23} zu einer linearen Injektion $\rho:\mathfrak{R}_3\to\mathfrak{P}'$ fort. Auf Grund der Konstruktion von $\mathfrak{A}_3$ gilt $\rho_{13}|(\mathfrak{P}_1\pi\cap\mathfrak{P}_2\pi) = \rho_{23}|(\mathfrak{P}_1\pi\cap\mathfrak{P}_2\pi)$; ferner ist für je zwei Punkte $Y\in\mathfrak{P}_1\pi\setminus\mathfrak{P}_2\pi$ und $Z\in\mathfrak{P}_2\pi\setminus\mathfrak{P}_1\pi$ sicherlich $Y\rho_{13}\neq Z\rho_{23}$. Gilt etwa $\mathfrak{P}_1\pi\subset\subset\mathfrak{P}_2\pi$, so ist $\rho := \rho_{23}$ die gewünschte lineare Fortsetzung. Das ist insbesondere dann der Fall, wenn (V1) oder (V3) erfüllt sind, oder wenn $\mathrm{rg}\psi_1 = -1$ gilt. Für $\mathfrak{P}_i\pi\not\subset\mathfrak{P}_j\pi\ (i\neq j)$ setzen wir $\mathfrak{R}_3' := := \mathrm{Im}(\psi_1)\vee\mathrm{Im}(\psi_2)$ und erhalten $\dim\Pi(\mathfrak{R}_3) = \dim\Pi(\mathfrak{R}_3')$. In den verbleibenden Fällen (V2) für $\mathrm{rg}\psi_1\neq -1$ und (V4) gilt jedenfalls $\dim\Pi(\mathfrak{R}_3)\geqq\mathrm{rg}\psi_2\geqq 2$, und es gibt in $\Pi(\mathfrak{P}_1\pi)$ einen nichtleeren Komplementärraum $\bar{\mathfrak{P}}$ zu $\mathfrak{P}_1\pi\cap\mathfrak{P}_2\pi$. Wir wählen Fundamentalfiguren $(\mathfrak{B}_1,\beta_1)$ von $\Pi(\bar{\mathfrak{P}})$ und $(\mathfrak{B}_2,\beta_2)$ von $\Pi(\mathfrak{P}_2\pi)$ so, daß $(\mathfrak{B}_1\cup\mathfrak{B}_2)\cap\mathfrak{P}_1\pi$ eine Basis von $\Pi(\mathfrak{P}_1\pi)$ ist. Nach 1.2 existiert dann eine Fundamentalfigur $(\mathfrak{B}_1\cup\mathfrak{B}_2,\beta)$ von $\Pi(\mathfrak{R}_3)$ mit $\bar{\mathfrak{P}}\cap\beta = \beta_1$, $\mathfrak{P}_2\pi\cap\beta = \beta_2$ und analog eine Fundamentalfigur $(\mathfrak{B}_1\rho_{13}\cup\mathfrak{B}_2\rho_{23},\beta')$ von $\Pi(\mathfrak{R}_3')$ mit $\bar{\mathfrak{P}}\rho_{13}\cap\beta' = \beta_1\rho_{13}$, $\mathrm{Im}(\psi_2)\cap\beta' = \beta_2\rho_{23}$. Nach Satz 1.2 gibt es genau eine lineare Injektion ρ, welche $P_j\mapsto P_j\rho_{13}$ $(P_j\in\mathfrak{B}_1)$, $\beta\to\beta'$ leistet und ρ_{23} fortsetzt.

Die Abbildung $\rho_{13}(\rho|\mathfrak{P}_1\pi)^{-1}:\mathfrak{P}_1\pi\to\mathfrak{P}_1\pi$ ist eine Bijektion; gilt (V2) und $\mathrm{rg}\psi_1\neq -1$, so ist $\mathrm{Im}(\psi_1)$ einpunktig und $\rho_{13} = \rho|\mathfrak{P}_1\pi$. Sind jedoch ψ_1, ψ_2 gemäß (V4) verträglich, so ist für die Gerade $g_1 := P_0P_1$ mit $P_0,P_1\in(\mathfrak{B}_1\cup\mathfrak{B}_2)\cap\mathfrak{P}_1\pi$, eine Gerade $g_2\subset\mathfrak{P}_2\pi$ und eine Projektivität $\sigma':g_1\rho_{13}\to g_2\rho_{23}$ auch $\sigma := (\rho_{13}|g_1)\sigma'(\rho_{23}|g_2)^{-1}$ projektiv. Mit der Projektivität σ' ist jedoch auch die Abbildung $\tilde{\sigma} := (\rho|g_1)\sigma'(\rho|g_2)^{-1}$ projektiv und $\sigma,\tilde{\sigma}$ leisten für die drei Punkte P_0, P_1, $P_0P_1\cap\beta$ dasselbe; der Fundamentalsatz der projektiven Geometrie [1,S.42] liefert $\sigma = \tilde{\sigma}$. Für $\mathrm{rg}\psi_1 = 1$ gilt daher $\rho|\mathfrak{P}_1\pi = \rho_{13}$. Ist jedoch $\mathrm{rg}\psi_1\geqq 2$, so ist $\rho_{13}(\rho|\mathfrak{P}_1\pi)^{-1}$ eine projektive Autokollineation von $\Pi(\mathfrak{P}_1\pi)$, welche eine Fundamentalfigur elementweise fest läßt, also nach [1,S.157] die Identität. Daher ist ρ auch eine lineare Fortsetzung von ρ_{13} und $\pi\rho$ eine lineare Fortsetzung von ψ_1 und ψ_2.

(2) Bezeichnen wir die in (1) konstruierte lineare Fortsetzung

von ψ_1 und ψ_2 mit $\tilde{\psi}$, so wird $\tilde{\psi}$ für einen bezüglich ψ_1, ψ_2 wesentlichen Punkt W die Menge $\{W\}$ nicht notwendig auf eine zulässig gewählte Bildmenge abbilden.

Ist W als Ausnahmepunkt vorgeschrieben, so gilt für die Fußpunkte W_1, W_2 der Treffgeraden aus W an $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2$ dann $W_1\psi_1 = W_2\psi_2$, also $W_i\pi_{12} \in \mathcal{T}_i$ (i=1,2). Es existiert eine projektive Kollineation $\varkappa$ mit $\varkappa|\mathfrak{P}_i = \mathrm{id}_{\mathfrak{P}_i}$, welche $W\pi_{12} \mapsto W\pi_{12}\varkappa$ mit $W\pi_{12}\varkappa \in \mathfrak{A}_3$ leistet; dann ist $\psi := \varkappa\tilde{\psi}$ die gesuchte lineare Fortsetzung.

Ist $W_1\psi_1 \neq W_2\psi_2$ und $\{W'\} \subset (W_1\psi_1)(W_2\psi_2)$ zulässige Bildmenge von $\{W\}$, so existiert ein Punkt $\tilde{W} \in W_1W_2$ mit $\tilde{W}\tilde{\psi} = W'$. Die projektive Kollineation $\varkappa$ mit $\varkappa|\mathfrak{P}_i = \mathrm{id}_{\mathfrak{P}_i}$, welche $W \mapsto \tilde{W}$ leistet, liefert wie vorhin die gesuchte lineare Fortsetzung.

Die angegebenen Verträglichkeitsbedingungen sind zwar hinreichend, aber nicht notwendig für die lineare Fortsetzbarkeit von ψ_1 und ψ_2. Das zeigt folgendes Beispiel, welches wir für spätere Anwendungen benötigen.

Es sei Π ein endlichdimensionaler endlicher projektiver Raum der Ordnung $N \leq 3$, ferner $\mathrm{rg}\,\psi_1 = \mathrm{rg}\,\psi_2 = 1$ und $\mathrm{Im}(\psi_1) \neq \mathrm{Im}(\psi_2)$. Mit den Bezeichnungen aus dem Beweis von Satz 1.6 können wir weitgehend analog zu Beweisschritt (1) eine lineare Fortsetzung konstruieren: Der Unterraum $\mathfrak{A}_3$ und die Projektion $\pi: \mathfrak{P} \to \mathcal{R}_3$ existieren, da für $N \leq 3$ jede Bijektion einer Punktreihe auf eine Punktreihe und daher auch jede Kollineation projektiv ist. Da es zu je einer geordneten Fundamentalfigur in $\Pi(\mathcal{R}_3)$ bzw. $\Pi(\mathcal{R}_3')$ genau eine Kollineation gibt, welche die erste auf die zweite Fundamentalfigur abbildet, und da in Π jede Gerade höchstens vier Punkte trägt, können ρ_{13} und ρ_{23} zu einer Kollineation ρ fortgesetzt werden. Beweisschritt (2) kann unverändert übernommen werden.

2. LINEARE ABBILDUNGEN AUS GRASSMANN-RÄUMEN

2.1 Es sei $\Pi = (\mathfrak{P}, \mathfrak{G})$ ein n-dimensionaler projektiver Raum und $(\mathfrak{u}\Pi, \vee, \cap)$ sein Unterraumverband. Abweichend von Abschnitt 1 bezeichnen wir die Elemente von $u\Pi$ mit großen lateinischen Buchstaben; dabei wird links oben die Dimension des Unterraumes als Index angebracht. Nur der leere bzw. der n-dimensionale Unterraum von Π soll wie bisher mit $\emptyset$ bzw. $\mathfrak{P}$ bezeichnet werden. Einen Unterraum ${}^{d}X$ nennen wir auch einen <u>d-Raum</u>. ${}^{d}\mathfrak{U}(\Pi)$ oder kürzer ${}^{d}\mathfrak{U}$ sei die Menge aller d-Räume von Π.

Sind ${}^{p}L$ und ${}^{q}M$ Unterräume und ${}^{d}\mathfrak{U}_1 := \{{}^{d}X\in{}^{d}\mathfrak{U}\,|\,{}^{p}L\subset{}^{d}X\subset{}^{q}M\}$, so nennen wir ${}^{r}T := \bigcap({}^{d}X\,|\,{}^{d}X\in{}^{d}\mathfrak{U}_1)$ bzw. ${}^{s}H := \bigvee({}^{d}X\,|\,{}^{d}X\in{}^{d}\mathfrak{U}_1)$ den <u>Träger</u> bzw. die <u>Hülle</u> von ${}^{d}\mathfrak{U}_1$; wir schreiben dann ${}^{d}\mathfrak{U}_1 = d[{}^{r}T,{}^{s}H]$. Weiters sei $d[{}^{r}T] := d[{}^{r}T,\mathfrak{P}]$ und $d[{}^{s}H] := d[\emptyset,{}^{s}H]$. Gilt ${}^{d}\mathfrak{U}_1 = d[{}^{d-1}T,{}^{d+1}H]$, so heißt ${}^{d}\mathfrak{U}_1$ ein <u>d-Büschel</u>. Wir bezeichnen d-Büschel im folgenden auch mit lateinischen Kleinbuchstaben, die links oben den Index d tragen. ${}^{d}\mathfrak{B}(\Pi)$ bzw. kürzer ${}^{d}\mathfrak{B}$ sei die Menge aller d-Büschel von ${}^{d}\mathfrak{U}(\Pi)$.

Wir erhalten für $0 \leq d \leq n-1$, also $n \geq 1$, die Inzidenzstruktur ${}^{d}\Pi = ({}^{d}\mathfrak{U},{}^{d}\mathfrak{B},\in)$; sie heißt <u>Geometrie der d-dimensionalen Unterräume</u> von Π und wird auch als <u>d-Geometrie</u> von Π angesprochen.

Zwei d-Räume heißen <u>benachbart</u>, wenn ihr Durchschnitt (d-1)-dimensional ist. Wir schreiben ${}^{d}X\sim{}^{d}Y$, wenn ${}^{d}X$ zu ${}^{d}Y$ benachbart ist. Eine nichtleere Folge $\{{}^{d}X_i\in{}^{d}\mathfrak{U}\,|\,i=0,\dots,l\}$ heißt eine <u>Nachbarfolge</u> der Länge l von ${}^{d}X_0$ nach ${}^{d}X_l$, wenn ${}^{d}X_i\sim{}^{d}X_{i+1}$ $(i=0,\dots,l-1)$ erfüllt ist. Nach [5], [6,S.81] gelten folgende Aussagen: Zu je zwei d-Räumen ${}^{d}X$, ${}^{d}Y$ existieren stets Nachbarfolgen von ${}^{d}X$ nach ${}^{d}Y$ und darunter gibt es kürzeste Nachbarfolgen, also Folgen kleinster Länge. Diese wird <u>Distanz</u> $\mathrm{dist}({}^{d}X,{}^{d}Y)$ von ${}^{d}X$ und ${}^{d}Y$ genannt. Zur Berechnung der Distanz dient die Formel

$$(2,1)\quad \mathrm{dist}({}^{d}X,{}^{d}Y) = \dim({}^{d}X\vee{}^{d}Y) - d = d - \dim({}^{d}X\wedge{}^{d}Y)$$

Die d-Geometrie hat genau für $d = 0$ und $d = n-1$ die Struktur eines projektiven Raumes und ist zum projektiven Raum Π bzw. zum dualen projektiven Raum Π^* isomorph. Setzen wir $1 \leq d \leq n-2$ voraus, so gilt $n \geq 3$ und in ${}^{d}\mathfrak{U}$ existieren nicht benachbarte Elemente; wir nennen dann ${}^{d}\Pi$ und jede dazu isomorphe Inzidenzstruktur Γ einen *Graßmann-Raum*.

Jede Teilmenge ${}^d\breve{\mathfrak{U}}_1 = d[{}^rT, {}^sH]$ heißt ein *Teilraum* von ${}^d\Pi$ und bestimmt die Inzidenzstruktur $\Delta({}^d\breve{\mathfrak{U}}_1) := ({}^d\breve{\mathfrak{U}}_1, {}^d\mathfrak{B}_1, \in)$ mit ${}^d\mathfrak{B}_1 :=$ $:= \{{}^db \in {}^d\mathfrak{B} \mid {}^db \subset {}^d\breve{\mathfrak{U}}_1\}$. Ist ${}^d\breve{\mathfrak{U}}_1 \neq \emptyset$, ${}^{\bar s}\bar H \subset {}^sH$ ein nichtleerer Unterraum mit ${}^{\bar s}\bar H \vee {}^rT = {}^sH$ und setzen wir ${}^{\bar r}\bar T := {}^rT \cap {}^{\bar s}\bar H$, so bildet die *Perspektivität* genannte Abbildung $\zeta: {}^d\breve{\mathfrak{U}}_1 \to {}^{\bar d}\bar{\mathfrak{U}}_1 := \bar d[{}^{\bar r}\bar T, {}^{\bar s}\bar H]$ mit ${}^dX\zeta := {}^dX \cap {}^{\bar s}\bar H$ die Inzidenzstruktur $\Delta({}^d\breve{\mathfrak{U}}_1)$ isomorph auf $\Delta({}^{\bar d}\bar{\mathfrak{U}}_1)$ ab. Der Dimensionssatz liefert die Gleichungen $r - s = \bar r - \bar s$ und $d - s = \bar d - \bar s$. Insbesondere ein zu ${}^rT$ in $\Pi({}^sH)$ komplementärer Unterraum ${}^{\bar s}\bar H$ $(\bar s = s-r-1)$ vermittelt für $r < d < s$ eine Perspektivität von ${}^d\breve{\mathfrak{U}}_1$ auf $\bar d[{}^{\bar s}\bar H]$ $(\bar d = d-r-1)$; $\Delta({}^d\breve{\mathfrak{U}}_1)$ ist also ein projektiver bzw. graßmannscher Raum, den wir auch mit $\Pi({}^d\breve{\mathfrak{U}}_1)$ bzw. $\Gamma({}^d\breve{\mathfrak{U}}_1)$ bezeichnen. Wir nennen einen Teilraum $d[{}^{d-1}T]$ ein *d-Bündel*, $d[{}^{d+1}H]$ ein *d-Feld*, $d[{}^0T]$ ein *d-Hyperbündel* und $d[{}^{n-1}H]$ ein *d-Hyperfeld*. Jeder Teilraum, den ein d-Bündel oder ein d-Feld umfaßt, ist ein projektiver Teilraum. Ist ${}^d\Pi$ ein Graßmann-Raum, so heißen die maximalen Mengen unter den Teilmengen von ${}^d\breve{\mathfrak{U}}$, deren Elemente paarweise benachbart sind, *projektive Höchsträume*. Die projektiven Höchsträume sind genau die d-Bündel und die d-Felder und jeder projektive Teilraum ist in einem projektiven Höchstraum enthalten [5].

2.2 Wir verallgemeinern den Begriff der Verbindungsmenge [1, S.93]. Sind ${}^d\mathfrak{M}_1$, ${}^d\mathfrak{M}_2$ Teilmengen von ${}^d\breve{\mathfrak{U}}$, so heißt die Menge ${}^d\mathfrak{M}_1 \vee {}^d\mathfrak{M}_2 \subset {}^d\breve{\mathfrak{U}}$, welche definiert ist durch

(I) $\{{}^dX_1\} \vee \{{}^dX_2\} := d[{}^dX_1 \cap {}^dX_2, {}^dX_1 \vee {}^dX_2]$ für ${}^dX_1 \sim {}^dX_2$,

(II) ${}^d\mathfrak{M}_1 \vee {}^d\mathfrak{M}_2 := {}^d\mathfrak{M}_1 \cup {}^d\mathfrak{M}_2 \cup (\bigcup(\{{}^dX_1\} \vee \{{}^dX_2\} \mid {}^dX_1 \in {}^d\mathfrak{M}_1, {}^dX_2 \in {}^d\mathfrak{M}_2, {}^dX_1 \sim {}^dX_2))$,

die *Verbindungsmenge* von ${}^d\mathfrak{M}_1$ und ${}^d\mathfrak{M}_2$. Sind ${}^dX_1$ und ${}^dX_2$ benachbart, so ist $\{{}^dX_1\} \vee \{{}^dX_2\}$ das durch diese d-Räume eindeutig bestimmte d-Büschel, welche beide enthält [4]. Wir bezeichnen dieses d-Büschel auch mit ${}^dX_1{}^dX_2$.

HILFSSATZ 2.1. Sind $d[{}^0Q_1]$, $d[{}^0Q_2]$ *zwei verschiedene d-Hyperbündel, so gilt* ${}^dX \in d[{}^0Q_1] \vee d[{}^0Q_2]$ *genau dann, wenn* ${}^dX \cap ({}^0Q_1 \vee {}^0Q_2) \neq$ $\neq \emptyset$ *erfüllt ist.*

Beweis. Trifft ${}^dX$ die Gerade ${}^0Q_1 \vee {}^0Q_2$, so existiert ein Unter-

[4] Man unterscheide ${}^dX \vee {}^dY \in u\Pi$ und $\{{}^dX\} \vee \{{}^dY\} \subset {}^d\breve{\mathfrak{U}}(\Pi)$.

raum ${}^{d+1}H \supset {}^{d}X \vee {}^{0}Q_1 \vee {}^{0}Q_2$. Wählen wir ${}^{d-1}T \subset {}^{d}X$ beliebig, so besitzt das d-Büschel $d[{}^{d-1}T, {}^{d+1}H]$ mit den beiden d-Hyperbündeln nichtleeren Durchschnitt; ${}^{d}X$ gehört also der Verbindungsmenge $d[{}^{0}Q_1] \vee d[{}^{0}Q_2]$ an. Falls ${}^{d}X$ mit ${}^{0}Q_1 \vee {}^{0}Q_2$ leeren Durchschnitt hat, kann ${}^{d}X$ kein Element der Verbindungsmenge sein, da kein d-Büschel existiert, dessen Hülle den Unterraum ${}^{d}X \vee {}^{0}Q_1 \vee {}^{0}Q_2$ umfaßt.

In 2.1 haben wir Perspektivitäten zwischen Teilräumen definiert. Wir sprechen auch von einer <u>Perspektivität</u> des d-Büschels ${}^{d}b_1$ auf das d-Büschel ${}^{d}b_2$, wenn ${}^{d}b_1$ und ${}^{d}b_2$ demselben projektiven Teilraum ${}^{d}\check{\mathfrak{U}}_1$ angehören und aufgefaßt als Punktreihen des projektiven Raumes $\Pi({}^{d}\check{\mathfrak{U}}_1)$ perspektiv sind [1,S.142]. Jedes Produkt von endlich vielen Perspektivitäten heißt eine <u>Projektivität</u>.

2.3 Es sei $\Pi = (\mathfrak{P}, \mathfrak{g})$ bzw. $\Pi' = (\mathfrak{P}', \mathfrak{g}')$ ein projektiver Raum der Dimension n bzw. n' und ${}^{d}\Pi = ({}^{d}\check{\mathfrak{U}}, {}^{d}\mathfrak{b}, \in)$ bzw. ${}^{d'}\Pi' = ({}^{d'}\check{\mathfrak{U}}', {}^{d'}\mathfrak{b}', \in)$ die d- bzw. d'-Geometrie von Π bzw. Π'. Ist $\varphi: {}^{d}\check{\mathfrak{U}} \to {}^{d'}\check{\mathfrak{U}}'$ ein Isomorphismus von ${}^{d}\Pi$ auf ${}^{d'}\Pi'$, so kann φ entweder zu genau einem Verbandsisomorphismus von $u\Pi$ auf $u\Pi'$ oder zu genau einem Verbandsantiisomorphismus von $u\Pi$ auf $u\Pi'$ fortgesetzt werden [1,S.116], [5], [6,S.81]. Das ergibt $n = n'$ und $d = d'$ bzw. $d = n - d' - 1$. Insbesondere vermittelt die Annulatorabbildung $\lambda: u\Pi \to u\Pi^*$ [1,S.105] für $\Pi' = \Pi^*$ einen Isomorphismus von ${}^{d}\Pi$ auf ${}^{n-d-1}\Pi^*$.

Ist ${}^{d}\Pi$ ein Graßmann-Raum, so gibt das nicht geordnete Zahlenpaar (n-d,d+1) die Dimensionen der projektiven Höchsträume an; wir bezeichnen es als <u>Dimensionspaar</u> von ${}^{d}\Pi$. Jedem k-dimensionalen projektiven Raum ordnen wir (1,k) als Dimensionspaar zu. Ein Teilraum ${}^{d}\check{\mathfrak{U}}_1 = d[{}^{r}T, {}^{s}H]$ von ${}^{d}\Pi$ hat für $r < d < s$ das Dimensionspaar (d-r,s-d), wie man mittels einer geeigneten Perspektivität nachweisen kann. Die Tabelle zeigt die Dimensions-

d \ n	1	2	3	4	5
0	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)
1		(1,2)	(2,2)	(2,3)	(2,4)
2			(1,3)	(2,3)	(3,3)

paare einiger d-Geometrien. Wir definieren rekursiv eine Folge $\{u_i \mid i=1,2,\dots\}$ von Dimensionspaaren: $u_1 := (1,1)$; für $u_m = (e_1,e_2)$ mit $e_1 \leq e_2$ sei $u_{m+1} := (e_1+1,e_2)$ für $e_1 \neq e_2$ und $u_{m+1} := (1,e_1+1)$ für $e_1 = e_2$. Diese Abzählung der Dimensionspaare wird im folgenden bei Induktionsbeweisen verwendet. Zunächst wird ein Satz für k-dimensionale projektive Räume gezeigt; hat der Graßmann-Raum ${}^d\Pi$ das Dimensionspaar u_j, so besitzt jeder echte Teilraum ${}^d\mathfrak{U}_1$ von ${}^d\Pi$ mit $|{}^d\mathfrak{U}_1| \geq 2$ ein Dimensionspaar u_i mit $i < j$. Als Induktionsvoraussetzung dient daher die Gültigkeit des Satzes für diese echten Teilräume. Da jede Spalte der Tabelle symmetrischen Aufbau besitzt, können wir uns bei Induktionsbeweisen auf solche Werte n, d beschränken, für die $n \leq 2d + 1$ gilt.

2.4 Wir untersuchen lineare Abbildungen aus Graßmann-Räumen im Modell der d-Geometrie ${}^d\Pi = ({}^d\breve{\mathfrak{U}},{}^d\mathfrak{G},\in)$ eines n-dimensionalen projektiven Raumes Π; dann gilt $1 \leq d \leq n-2$, also $n \geq 3$. Viele der folgenden Sätze über lineare Abbildungen aus Graßmann-Räumen sind sinngemäß auch für lineare Abbildungen aus projektiven Räumen richtig, ohne daß darauf hingewiesen wird. Ferner sei $\Pi' = (\mathfrak{P}',\mathfrak{G}')$ ein (nicht notwendig endlichdimensionaler) projektiver Raum[5].

Eine Abbildung $\chi : {}^d\breve{\mathfrak{U}} \to \mathfrak{P}'$ heißt linear, wenn sie folgende Bedingungen erfüllt (vgl. 1.1):

(L1) $(\{{}^dX\} \vee \{{}^dY\})\chi = \{{}^dX\}\chi \vee \{{}^dY\}\chi$ für alle ${}^dX \sim {}^dY$ mit ${}^dX, {}^dY \in {}^d\breve{\mathfrak{U}}$.

(L2) Ist $\{{}^dX\}\chi = \{{}^dY\}\chi$ für zwei benachbarte Elemente ${}^dX, {}^dY \in {}^d\breve{\mathfrak{U}}$, so existiert stets ein Element ${}^dA \in \{{}^dX\} \vee \{{}^dY\}$ mit $\{{}^dA\}\chi = \emptyset$.

Für jeden Teilraum ${}^d\breve{\mathfrak{U}}_1 \subset {}^d\breve{\mathfrak{U}}$ ist die Einschränkung $\chi|{}^d\breve{\mathfrak{U}}_1$ ebenfalls linear und zwar unabhängig davon, ob ein projektiver oder graßmannscher Teilraum vorliegt. Sind ${}^d\mathfrak{M}_1$, ${}^d\mathfrak{M}_2$ Teilmengen von ${}^d\breve{\mathfrak{U}}$, so gilt $({}^d\mathfrak{M}_1 \vee {}^d\mathfrak{M}_2)\chi \subset {}^d\mathfrak{M}_1\chi \vee {}^d\mathfrak{M}_2\chi$. Das kann wie in 1.1 nachgewiesen werden, wenn man $(\{{}^dX_1\} \vee \{{}^dX_2\})\chi \subset (\{{}^dX_1\}\chi \vee \{{}^dX_2\}\chi)$ beachtet. Die Dimension der Verbindungshülle der Bildmenge $\mathrm{Im}(\chi)$ heißt der Rang von χ, also $\mathrm{rg}\,\chi = \dim \Pi[\mathrm{Im}(\chi)]$.

---

[5] Wir verwenden in Π' die Notation aus Abschnitt 1.

SATZ 2.2. Bezeichnet $(e_1,e_2) = (n-d,d+1)$ das Dimensionspaar von ${}^d\Pi$, so gilt

$$(2,2) \quad \mathrm{rg}\chi \leq \frac{(e_1+e_2)!}{e_1!e_2!} - 1.$$

Beweis. (1) Es sei ${}^0P$ ein Punkt und ${}^{n-1}B \not\ni {}^0P$ eine Hyperebene. Wir zerlegen ${}^d\breve{\mathfrak{U}}$ in die Mengen

$$(2,3) \quad \begin{aligned} {}^d\mathfrak{Z}_1 &:= d[{}^0P], \\ {}^d\mathfrak{Z}_2 &:= d[{}^{n-1}B], \\ {}^d\mathfrak{Z}_3 &:= {}^d\breve{\mathfrak{U}} \setminus ({}^d\mathfrak{Z}_1 \cup {}^d\mathfrak{Z}_2) \end{aligned}$$

und definieren Abbildungen $\varepsilon_i : {}^d\mathfrak{Z}_3 \to {}^d\mathfrak{Z}_i$ $(i=1,2)$ durch

$$(2,4) \quad \begin{aligned} {}^dX\varepsilon_1 &:= ({}^dX \cap {}^{n-1}B) \vee {}^0P, \\ {}^dX\varepsilon_2 &:= ({}^dX \vee {}^0P) \cap {}^{n-1}B, \end{aligned}$$

für alle ${}^dX \in {}^d\mathfrak{Z}_3$. Es gehört also ${}^dX \in {}^d\mathfrak{Z}_3$ dem d-Büschel $({}^dX\varepsilon_1)({}^dX\varepsilon_2)$ an, so daß ${}^d\mathfrak{Z}_3 \subset {}^d\mathfrak{Z}_1 \vee {}^d\mathfrak{Z}_2$ folgt. Das ergibt $\mathrm{Im}(\chi) = ({}^d\mathfrak{Z}_1 \vee {}^d\mathfrak{Z}_2)\chi \subset \subset {}^d\mathfrak{Z}_1\chi \vee {}^d\mathfrak{Z}_2\chi$. (Als Sonderfall dieser Darstellung werden wir im zweiten Teil dieser Arbeit die rekursive Erzeugung von Graßmann-Varietäten [4,S.296] erhalten.)

(2) Wir verwenden das in 2.3 angegebene Induktionsverfahren. Eine lineare Abbildung χ aus einem k-dimensionalen projektiven Raum erfüllt $\mathrm{rg}\chi \leq k = \frac{(k+1)!}{k!1!} - 1$. Die Teilräume $\Delta({}^d\mathfrak{Z}_1)$ und $\Delta({}^d\mathfrak{Z}_2)$ haben Dimensionspaare (e_1,e_2-1) bzw. (e_1-1,e_2). Nach Induktionsannahme und Beweisschritt (1) folgt aus dem Dimensionssatz $\mathrm{rg}\chi \leq \frac{(e_1+e_2)!}{e_1!e_2!} - 1$.

Die Ungleichung (2,2) kann auch in der Gestalt

$$(2,5) \quad \mathrm{rg}\chi = \binom{n+1}{d+1} - 1$$

geschrieben werden. Gilt das Gleichheitszeichen, so heißt χ eine <u>reguläre</u> <u>lineare</u> <u>Abbildung</u>.

2.5 Es sei $d[^{d-1}T]$ ein d-Bündel und ^{n-d}R ein zu ^{d-1}T komplementärer Unterraum von Π. Wir definieren eine Abbildung $\pi : {}^d\check{\mathfrak{U}} \to d[^{d-1}T]$. Für $\dim({}^dX \cap {}^{n-d}R) = 0$ sei ${}^dX\pi := ({}^dX \cap {}^{n-d}R) \vee {}^{d-1}T$; sonst sei ${}^dX\pi$ nicht definiert. Wegen $\pi | d[^{d-1}T] = \mathrm{id}_{d[^{d-1}T]}$ ist π surjektiv. Wir nennen π eine Projektion auf das d-Bündel $d[^{d-1}T]$.

Die Projektion π ist eine lineare Abbildung von ${}^d\Pi$ auf $\Pi(d[^{d-1}T])$. Zum Nachweis betrachte man die Einschränkung von π auf d-Bündel; je nachdem der Träger eines d-Bündels mit ^{n-d}R leeren bzw. nulldimensionalen bzw. mindestens eindimensionalen Durchschnitt besitzt, ist diese Einschränkung eine lineare Abbildung vom Rang n - d bzw. 0 bzw. -1. Da jedes d-Büschel in einem d-Bündel enthalten ist, folgt die Linearität von π.

Setzen wir π mit einer linearen Abbildung aus $\Pi(d[^{d-1}T])$ in den projektiven Raum Π' zusammen, so erhalten wir weitere Beispiele linearer Abbildungen. Dual können Projektionen auf d-Felder erklärt werden.

LITERATUR

1. Brauner,H., Geometrie projektiver Räume I, BI-Wissenschaftsverlag, Mannheim-Wien-Zürich, 1976.
2. Brauner,H., Geometrie projektiver Räume II, BI-Wissenschaftsverlag, Mannheim-Wien-Zürich, 1976.
3. Brauner,H., Eine geometrische Kennzeichnung linearer Abbildungen, Mh.Math. 77 (1973), 10 - 20.
4. Burau,W., Mehrdimensionale projektive und höhere Geometrie, VEB Dt.Verlag d.Wissenschaften, Berlin, 1961.
5. Chow,W.L., On the geometry of algebraic homogenous spaces, Ann.of Math. 50 (1949), 32 - 67.
6. Dieudonné,J.A., La Géométrie des Groupes Classiques, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1971.
7. Timmermann,H., Koordinatenfreie Kennzeichnung von Projektionen in projektiven Räumen, Mitt.Math.Ges.Hamburg 10 (1973), 88 - 102.

Hans Havlicek
Institut für Geometrie
Technische Universität Wien
Gußhausstraße 27-29
A-1040 Wien
Österreich