ZUR THEORIE LINEARER ABBILDUNGEN II

Hans Havlicek

Given an n-dimensional pappian projective space, any linear mapping in the grassmannian of d-dimensional subspaces induces a linear mapping in the associated Grassmann-variety which is the restriction of one and only one linear mapping in the projective space generated by the variety.

3. RANGKRITERIEN

3.1 Wir verweisen auf Teil I dieser Arbeit und setzen die in Abschnitt 2 begonnenen Untersuchungen linearer Abbildungen aus Graßmann-Räumen fort.

Es sei im folgenden $\Pi = (\mathfrak{P}, \mathfrak{G})$ ein n-dimensionaler projektiver Raum, $^d\Pi = (^d\check{\mathfrak{U}}, {}^d\mathfrak{b}, \in)$ die d-Geometrie von Π $(1 \leq d \leq n-2)$, $\Pi' = (\mathfrak{P}', \mathfrak{G}')$ ein weiterer projektiver Raum und $\chi : {}^d\check{\mathfrak{U}} \rightarrow \mathfrak{P}'$ eine lineare Abbildung aus dem Graßmann-Raum $^d\Pi$ in Π'.

3.2 Es sei χ eine lineare Abbildung mit $\mathrm{rg}\chi \leq 0$. Nach Satz 2.2, Beweisschritt (1) ist χ genau dann eine leere Abbildung, wenn für einen Punkt ^0P und eine zu ^0P windschiefe Hyperebene ^{n-1}B die beiden Einschränkungen $\chi | d[^0P]$ und $\chi | d[^{n-1}B]$ leere Abbildungen sind.

SATZ 3.1. Eine lineare Abbildung χ besitzt genau dann den Rang 0, wenn $\mathrm{Im}(\chi)$ nicht leer und jede Einschränkung von χ auf einen projektiven Höchstraum vom Rang 0 oder vom Rang -1 ist.

Beweis. (1) Gilt $\mathrm{rg}\chi = 0$, so ist die Behauptung richtig.

(2) Ist χ keine leere Abbildung und hat jede Einschränkung von χ auf einen projektiven Höchstraum die angegebene Eigenschaft, so gibt es ein $^dX_0$ mit $^dX_0\chi = Q' \in \mathfrak{P}'$. Haben $^dX_0$ und $^dX_1$ die Distanz 1 und ist $^dX_1 \in \mathbb{D}(\chi)$, so gilt $^dX_1\chi \in (^dX_0{}^dX_1)\chi = \{Q'\}$ wegen $\mathrm{rg}(\chi | {}^dX_0{}^dX_1) = 0$. Gibt es ein $^dX_m \in \mathbb{D}(\chi)$ mit $\mathrm{dist}(^dX_0, {}^dX_m) \geq$

≥ 2, so wählen wir zwei $(d-1)$-Räume ${}^{d-1}T_i$ $(i=0,m)$ mit ${}^dX_0 \cap {}^dX_m \subset$ $\subset {}^{d-1}T_i \subset {}^dX_i$ und einen zu beiden komplementären Unterraum ${}^{n-d}U$. Die Perspektivitäten $\zeta_i : d[{}^{d-1}T_i] \to O[{}^{n-d}U]$ induzieren in $\Pi(O[{}^{n-d}U])$ lineare Abbildungen $\psi_i := \zeta_i^{-1}(\chi | d[{}^{d-1}T_i])$, welche beide vom Rang 0 sind, so daß es einen Punkt ${}^0Q \in \mathbb{D}(\psi_0) \cap \mathbb{D}(\psi_m)$ und d-Räume ${}^dX_{i1} :=$ $:= ({}^{d-1}T_i \vee {}^0Q) \in \mathbb{D}(\chi)$ gibt. Wir erhalten nach (2,1) dann $\mathrm{dist}({}^dX_{01}, {}^dX_{m1})$ $= m-1$. Auf diese Art können wir eine Nachbarfolge $\{{}^dX_0, {}^dX_{01}, \ldots,$ ${}^dX_{m1}, {}^dX_m\} \subset \mathbb{D}(\chi)$ konstruieren und lesen $Q' = {}^dX_0\chi = \ldots = {}^dX_m\chi$ ab.

3.3 Zur Kennzeichnung linearer Abbildungen vom Rang 1 dient

HILFSSATZ 3.2. Gilt ${}^dX \in \mathbb{D}(\chi)$ bzw. ${}^dX \in \mathbb{A}(\chi)$ und $\mathrm{rg}(\chi | d[{}^{d+1}H_i]) \leq 0$ $(i=1,2$ bzw. $i=1,2,3)$ für zwei bzw. drei paarweise verschiedene d-Felder $d[{}^{d+1}H_i]$, deren Hüllen einem $(d+1)$-Büschel $(d+1)[{}^dX, {}^{d+2}V]$ angehören, so gibt es kein d-Feld $d[{}^{d+1}H]$ mit $\mathrm{rg}(\chi | d[{}^{d+1}H]) \geq 1$, dessen Hülle in $(d+1)[{}^dX, {}^{d+2}V]$ liegt.

Beweis. Wir nehmen indirekt die Existenz eines d-Feldes $d[{}^{d+1}H]$ mit den geforderten Eigenschaften an.

(1) Ist ${}^dX \in \mathbb{D}(\chi)$ erfüllt, so folgt $\mathrm{rg}(\chi | d[{}^{d+1}H_i]) = 0$ $(i=1,2)$, und es gilt $d[{}^{d+1}H_i] \cap \mathbb{A}(\chi) = d[{}^0A_i, {}^{d+1}H_i]$ mit ${}^0A_i \not\subset {}^dX$. Auf Grund der Annahme $\mathrm{rg}(\chi | d[{}^{d+1}H]) \geq 1$ existiert ein d-Büschel ${}^db_1 =$ $= d[{}^{d-1}T, {}^{d+1}H] \subset \mathbb{D}(\chi)$, das ${}^dX$ enthält. Dann gilt ${}^db_2 := d[{}^{d-1}T, {}^{d-1}T \vee$ $\vee {}^0A_1 \vee {}^0A_2] \subset \mathbb{A}(\chi)$; da ${}^db_1$ und ${}^db_2$ dem zweidimensionalen projektiven Teilraum $\Pi(d[{}^{d-1}T, {}^{d+2}V])$ angehören, folgt der Widerspruch $\mathbb{D}(\chi) \cap \mathbb{A}(\chi) \supset$ $\supset {}^db_1 \cap {}^db_2 \neq \emptyset$.

(2) Für ${}^dX \in \mathbb{A}(\chi)$ existiert ein d-Büschel ${}^db_1 = d[{}^{d-1}T, {}^{d+1}H] \subset \mathbb{D}(\chi)$, das im zweidimensionalen projektiven Teilraum $\Pi(d[{}^{d-2}S, {}^{d+1}H_i])$ mit ${}^{d-2}S := {}^{d-1}T \cap {}^dX$ liegt. Die projektiven Teilräume $\Pi(d[{}^{d-2}S, {}^{d+1}H])$ $(i=1,2,3)$ sind zweidimensional und haben wegen $\mathrm{rg}(\chi | d[{}^{d+1}H_i]) \leq 0$ mit $\mathbb{A}(\chi)$ mindestens ein d-Büschel gemeinsam.

Gilt $d[{}^{d-2}S, {}^{d+1}H_i] \cap \mathbb{A}(\chi) = d[{}^{d-1}T_i, {}^{d+1}H_i]$ $(i=1,2,3)$ und sind die Träger ${}^{d-1}T_i$ paarweise verschieden, so folgt ${}^{d-1}T_i \vee {}^{d-1}T \in {}^db_1$, und die drei einelementigen Bildmengen $d[{}^{d-1}T_i, {}^{d+2}V]\chi$ sind paarweise verschieden. Dann existieren jedoch d-Räume ${}^dY_j \in d[{}^{d-1}T_j, {}^{d+1}H_3] \cap \mathbb{D}(\chi)$ $(j=1,2)$ mit ${}^dY_1\chi \neq {}^dY_2\chi$ im Widerspruch zu $\mathrm{rg}(\chi | d[{}^{d+1}H_3]) \leq 0$.

In allen anderen Fällen existiert ein Unterraum ${}^{d-1}U$ mit ${}^dX \supset$

$\supset {}^{d-1}U \supset {}^{d-2}S$ und $d[{}^{d-1}U, {}^{d+1}H_j] \subset \mathbb{A}(\chi)$ (etwa für j=1,2), was $d[{}^{d-1}U, {}^{d+2}V] \subset \mathbb{A}(\chi)$ ergibt. In $\Pi(d[{}^{d-2}S, {}^{d+1}H])$ gilt dann ${}^{d}b_2 := d[{}^{d-1}U, {}^{d+1}H] \subset \mathbb{A}(\chi)$, was wie in (1) wegen ${}^{d}b_1 \cap {}^{d}b_2 \neq \emptyset$ auf einen Widerspruch führt.

<u>SATZ 3.3. Unter der Zusatzvoraussetzung, daß die Ordnung N von Π mindestens vier ist, gilt rgχ = 1 genau dann, wenn jede Einschränkung von χ auf einen projektiven Höchstraum vom Rang -1, 0 oder 1 ist und Im(χ) mindestens zwei Punkte enthält.</u>

<u>Beweis.</u> (1) Für rgχ = 1 ist die Behauptung unabhängig von der Zusatzvoraussetzung richtig.

(2) Hat jede Einschränkung von χ auf einen projektiven Höchstraum die angegebenen Eigenschaften, und gilt $|\mathrm{Im}(\chi)| \geqq 2$, so gibt es nach Satz 3.1 ein d-Büschel ${}^{d}b_1 = d[{}^{d-1}T_1, {}^{d+1}H_1] \subset \mathbb{D}(\chi)$. Es sei ${}^{d}b_2 = d[{}^{d-1}T_2, {}^{d+1}H_2] \subset \mathbb{D}(\chi)$.

Sind ${}^{d+1}H_i$ (i=1,2) benachbart, so gilt ${}^{d+1}H_1 \cap {}^{d+1}H_2 =: {}^{d}S$. Die Einschränkung $\chi | d[{}^{d+1}H_i]$ besitzt einen Teilraum $d[{}^{1}A_i, {}^{d+1}H_i]$ als Ausnahmemenge.

Nehmen wir ${}^{d}S \in \mathbb{D}(\chi)$ an, so gibt es einen Unterraum ${}^{d-1}T_3 \subset {}^{d}S$, der zu ${}^{1}A_i$ windschief ist; daher gilt ${}^{d}\tilde{b}_i := d[{}^{d-1}T_3, {}^{d+1}H_i] \subset \mathbb{D}(\chi)$ (i= =1,2) und $\mathbb{A}(\chi | d[{}^{d-1}T_3]) =: d[{}^{d-1}T_3, {}^{n-2}A_3]$. Bei der Projektivität ${}^{d}b_1 \overset{{}^{1}A_1}{\barwedge} {}^{d}\tilde{b}_1 \overset{{}^{n-2}A_3}{\barwedge} {}^{d}\tilde{b}_2 \overset{{}^{1}A_2}{\barwedge} {}^{d}b_2$ haben zugeordnete d-Räume denselben Bildpunkt unter χ, das heißt ${}^{d}b_1\chi = {}^{d}b_2\chi$.

Gilt ${}^{d}S \in \mathbb{A}(\chi)$, so existiert ein d-Raum ${}^{d}S_1 \subset {}^{d+1}H_1$, für den ${}^{d}S_1 \cap {}^{d}S_2 \not\supset$ $\not\supset {}^{1}A_i$ (i=1,2) gilt. Dann ist ${}^{d}S_1 \in \mathbb{D}(\chi)$, und nach Hilfssatz 3.2 gibt es mindestens ein d-Feld $d[{}^{d+1}H_3]$ mit ${}^{d}S_1 \subset {}^{d+1}H_3 \subset {}^{d+1}H_1 \vee {}^{d+1}H_2$ und $\mathrm{rg}(\chi | d[{}^{d+1}H_3]) \geqq 1$. Nach Konstruktion folgt ${}^{d+1}H_2 \cap {}^{d+1}H_3 =: S_2 \in \mathbb{D}(\chi)$. Mittels eines d-Büschels ${}^{d}b_3 \subset d[{}^{d+1}H_3] \cap \mathbb{D}(\chi)$ erkennen wir wie vorhin ${}^{d}b_1\chi = {}^{d}b_3\chi = {}^{d}b_2\chi$.

Sind die Hüllen jedoch nicht benachbart, so wählen wir in ${}^{d+1}H_i$ einen d-Raum ${}^{d}X_i \supset {}^{d+1}H_1 \cap {}^{d+1}H_2$ und Punkte ${}^{0}Q_i \subset {}^{d+1}H_i$ windschief zu ${}^{d}X_i$. Wir erhalten ${}^{d+2}V_i := {}^{d}X_i \vee {}^{0}Q_1 \vee {}^{0}Q_2$ mit ${}^{d+2}V_i \supset {}^{d+1}H_i$ und ${}^{d+2}V_1 \neq {}^{d+2}V_2$. Die Mengen $(d+1)[{}^{d}X_i, {}^{d+2}V_i]$ (i=1,2) sind perspektiv zum Teilraum $0[{}^{0}Q_1 \vee {}^{0}Q_2]$ von ${}^{0}\Pi$. Da dieser nach der Zusatzvoraussetzung mindestens fünf Elemente besitzt, folgt mit Hilfssatz 3.2, angewendet auf $d[{}^{d}X, {}^{d+2}V_i]$ die Existenz eines Punktes ${}^{0}R \in 0[{}^{0}Q_1 \vee {}^{0}Q_2]$ mit $\mathrm{rg}(\chi | d[{}^{d}X_i \vee$ $\vee {}^{0}R]) = 1$ (i=1,2). Es gilt $\mathrm{dist}({}^{d}X_1 \vee {}^{0}R, {}^{d}X_2 \vee {}^{0}R) = \mathrm{dist}({}^{d+1}H_1, {}^{d+1}H_2)$ - - 1; wiederholte Anwendung liefert eine Nachbarfolge von ${}^{d+1}H_1$

nach ${}^{d+1}H_2$, und es folgt ${}^{d}b_1\chi = {}^{d}b_2\chi$.

Ist ${}^{d}X_0 \in \mathbb{D}(\chi)$ und gehört ${}^{d}X_0$ keinem ausnahmefreien d-Büschel an, so erhalten wir mit Hilfe einer geeigneten Projektion $\pi' : \mathfrak{P}' \to \{{}^{d}X_0\chi\}$ eine lineare Abbildung $\chi\pi'$ vom Rang 0, für die ${}^{d}Z \in \mathbb{D}(\chi\pi')$ mit ${}^{d}Z \in {}^{d}b_1$, ${}^{d}Z\chi \neq {}^{d}X_0\chi$ gilt. Die Ausnahmemenge $\mathbb{A}(\chi)$ ist in $\mathbb{A}(\chi\pi')$ enthalten. Nach Satz 3.1, Beweisschritt (2) gibt es eine Nachbarfolge $\{{}^{d}X_j \mid j=0,\dots,l\}$ von ${}^{d}X_0$ nach ${}^{d}X_l := {}^{d}Z$, deren Elemente in $\mathbb{D}(\chi\pi')$ liegen. Durchlaufen wir die Folge der d-Büschel ${}^{d}X_j{}^{d}X_{j+1}$ von ${}^{d}X_0{}^{d}X_1$ beginnend, so sei ${}^{d}X_k{}^{d}X_{k+1}$ das erste d-Büschel, welches ein Element ${}^{d}M$ besitzt, das einem unter χ ausnahmefreien d-Büschel angehört. (Spätestens in ${}^{d}X_{l-1}{}^{d}X_l$ hat ${}^{d}Z$ diese Eigenschaft.) Gilt ${}^{d}X_k{}^{d}X_{k+1} \subset \mathbb{D}(\chi)$, so folgt ${}^{d}X_0\chi = {}^{d}X_k\chi \in {}^{d}b_1\chi$, und für ${}^{d}X_k{}^{d}X_{k+1} \not\subset \mathbb{D}(\chi)$ ergibt sich ${}^{d}X_0\chi = {}^{d}X_k\chi = {}^{d}M\chi \in {}^{d}b_1\chi$.

Aus dem letzten Beweis folgt der für $N \leq 3$ triviale

SATZ 3.4. Gilt $\mathrm{rg}\,\chi = 1$, so ist für je zwei d-Büschel ${}^{d}b_1$, ${}^{d}b_2 \subset \mathbb{D}(\chi)$ die Abbildung $\sigma := (\chi|{}^{d}b_1)(\chi|{}^{d}b_2)^{-1}$ eine Projektivität.

3.4 Für lineare Abbildungen mit nicht kollinearen Bildpunkten zeigen wir

SATZ 3.5. Gilt $\mathrm{rg}\,\chi \geq 2$, so ist für je zwei d-Büschel ${}^{d}b_1$, ${}^{d}b_2 \subset \mathbb{D}(\chi)$ und für jede Projektivität $\sigma' : {}^{d}b_1 \to {}^{d}b_2$ auch die Abbildung $\sigma :=$ $:= (\chi|{}^{d}b_1)\sigma'(\chi|{}^{d}b_2)^{-1}$ eine Projektivität.

Beweis. Für $N \leq 3$ ist das trivial. Gilt $N \geq 4$, so gibt es nach Satz 3.3 einen projektiven Teilraum ${}^{d}\breve{\mathfrak{U}}_1 \subset \mathbb{D}(\chi)$ mit $\mathrm{rg}(\chi|{}^{d}\breve{\mathfrak{U}}_1) = 2$. Sind ${}^{d}b_1$, ${}^{d}b_2 \subset \mathbb{D}(\chi)$ gegeben, so wählen wir ein d-Büschel ${}^{d}b_3 \subset {}^{d}\breve{\mathfrak{U}}_1$ und setzen ${}^{d}b_j = d[{}^{d-1}T_j, {}^{d+1}H_j]$ $(j=1,2,3)$. Wie in Beweisschritt (2) von Satz 3.3 konstruieren wir Nachbarfolgen $\{{}^{d+1}Y_{i_j} \mid i_j=0,\dots,l_j\}$ von ${}^{d+1}H_j$ nach ${}^{d+1}H_3$ $(j=1,2)$, wobei alle d-Felder $d[{}^{d+1}Y_i]$ ein ausnahmefreies d-Büschel besitzen; das ist möglich, da $\mathbb{A}(\chi)$ Teilmenge der Ausnahmemenge einer linearen Abbildung vom Rang 1 ist. Zu zwei ausnahmefreien d-Büscheln mit benachbarten Hüllen können wir wie im Beweis von Satz 3.3 ein Produkt von Perspektivitäten so angeben, daß alle beteiligten d-Büschel $\mathbb{D}(\chi)$ angehören. Diese Kette von Perspektivitäten induziert in Π' eine Kette von Perspektivitäten oder Identitäten der entsprechenden Bildpunktreihen.

Insgesamt erhalten wir Projektivitäten $\sigma_{j3}: {}^d b_1 \to {}^d b_3$ (j=1,2) so, daß auch $\sigma'_{j3} := (\chi|{}^d b_j)^{-1} \sigma_{j3} (\chi|{}^d b_3)$ projektiv sind.

Jede Projektivität $\sigma': {}^d b_1\chi \to {}^d b_2\chi$ läßt sich dann in der Gestalt $\sigma' = \sigma'_{13}\sigma'_3\sigma'^{-1}_{23}$ darstellen, wobei σ'_3 eine projektive Selbstabbildung von ${}^d b_3$ ist. Da $\chi|{}^d\check{\mathfrak{U}}_1$ eine Kollineation ist, folgt unter Benützung des Verkürzungssatzes [1,S.143] daß $\sigma_3 :=$ $:= (\chi|{}^d b_3)\sigma'_3(\chi|{}^d b_3)^{-1}$ projektiv ist. Nach kurzer Rechnung ergibt sich dann $\sigma = \sigma_{13}\sigma_3\sigma^{-1}_{23}$ als Projektivität.

Damit sind wir nun in der Lage zu zeigen, daß es gewisse lineare Abbildungen nur aus der d-Geometrie eines Pappos-Raumes geben kann.

<u>SATZ 3.6. Ist $\chi: {}^d\check{\mathfrak{U}}(\Pi) \to \mathfrak{P}'$ eine lineare Abbildung aus dem Graßmann-Raum ${}^d\Pi$ in Π', und existiert sowohl ein d-Bündel als auch ein d-Feld derart, daß die Einschränkungen von χ auf diese beiden projektiven Höchsträume beide mindestens vom Rang 2 sind, so sind Π und Π' notwendig projektive Pappos-Räume.</u>

<u>Beweis.</u> Wir können in den angesprochenen projektiven Höchsträumen zweidimensionale projektive Teilräume ${}^d\check{\mathfrak{U}}_1$, ${}^d\check{\mathfrak{U}}_2 \subset \mathbb{D}(\chi)$ wählen. Eine projektive Kollineation $\mu': {}^d\check{\mathfrak{U}}_1\chi \to {}^d\check{\mathfrak{U}}_2\chi$ induziert nach Satz 3.5 eine projektive Kollineation $\mu := (\chi|{}^d\check{\mathfrak{U}}_1)\mu'(\chi|{}^d\check{\mathfrak{U}}_2)^{-1}$. Es gibt Perspektivitäten $\zeta_1: {}^d\check{\mathfrak{U}}_1 \to 0[{}^2U]$ bzw. $\zeta_2: {}^d\check{\mathfrak{U}}_2 \to (n-1)[{}^{n-3}V]$ auf zweidimensionale projektive Teilräume von ${}^0\Pi$ bzw. ${}^{n-1}\Pi$. Die projektive Kollineation $\varkappa := \zeta_1^{-1}\mu\zeta_2$ kann nach Satz 1.2 zu einer Kollineation von ${}^0\Pi$ auf ${}^{n-1}\Pi$, also einer projektiven Korrelation von Π fortgesetzt werden. Daher [2,S.48] ist Π ein Pappos-Raum. Gleiches gilt für Π', da Π und Π' isomorphe projektive Ebenen besitzen.

3.5 Ist γ eine reguläre lineare Abbildung aus ${}^d\Pi$, so können wir γ o.B.d.A. als Pappos-Raum voraussetzen. Das zeigt uns

<u>SATZ 3.7. Jede reguläre lineare Abbildung $\gamma: {}^d\check{\mathfrak{U}}(\Pi) \to \mathfrak{P}'$ ist global und injektiv. Aus der Existenz einer regulären linearen Abbildung γ folgt notwendig, daß Π ein projektiver Pappos-Raum ist.</u>

<u>Beweis.</u> Ist ${}^dX \neq {}^dY$ und ${}^dX\gamma = {}^dY\gamma$, so wählen wir einen Punkt

${}^{0}P \subset {}^{d}X$, ${}^{0}P \not\subset {}^{d}Y$ und eine zu ${}^{0}P$ windschiefe Hyperebene ${}^{n-1}B \supset {}^{d}Y$. Nach (2,3) erklären wir die Mengen ${}^{d}\mathfrak{Z}_i$ (i=1,2,3) und es gilt dann ${}^{d}X\gamma = {}^{d}Y\gamma \in {}^{d}\mathfrak{Z}_{1}\gamma \cap {}^{d}\mathfrak{Z}_{2}\gamma$, also $\mathrm{rg}\,\gamma < \binom{n+1}{d+1} - 1$ im Widerspruch zu (2,5). Nehmen wir ferner die Existenz eines d-Raumes ${}^{d}A \in \mathbb{A}(\gamma)$ an, so muß jeder d-Raum ${}^{d}X$ mit ${}^{d}A \sim {}^{d}X$ ebenfalls $\mathbb{A}(\gamma)$ angehören, da $\gamma|{}^{d}A^{d}X$ injektiv ist. Da es von ${}^{d}A$ zu jedem Element von ${}^{d}\mathfrak{U}$ eine Nachbarfolge gibt, erhalten wir den Widerspruch $\mathrm{rg}\,\gamma = -1$. Nach Satz 3.6 ist Π daher notwendig ein Pappos-Raum.

Besitzt eine Gerade g' mit $\mathrm{Im}(\gamma)$ drei gemeinsame paarweise verschiedene Punkte X_i' (i=1,2,3), und ist $X_1'\gamma^{-1}$ mit $X_2'\gamma^{-1}$ benachbart, so folgt $((X_1'\gamma^{-1})(X_2'\gamma^{-1}))\gamma = g'$, also $g' \subset \mathrm{Im}(\gamma)$. Nehmen wir hingegen indirekt an, daß die Urbilder $X_i'\gamma^{-1}$ paarweise nicht benachbart sind, so gibt es einen Punkt ${}^{0}P \subset X_1'\gamma^{-1}$, der zu $X_2'\gamma^{-1}$ und $X_3'\gamma^{-1}$ windschief liegt und eine Hyperebene ${}^{n-1}B \supset X_2'\gamma^{-1}$, welche $X_1'\gamma^{-1}$ und $X_3'\gamma^{-1}$ nicht umfaßt. Nach (2,3) und (2,4) seien ${}^{d}\mathfrak{Z}_i$ (i=1,2,3) und die Abbildungen ε_1, ε_2 erklärt. Dann gilt $X_3'\gamma^{-1} \in {}^{d}\mathfrak{Z}_3$, und $X_3'\gamma^{-1}\varepsilon_1$ bzw. $X_3'\gamma^{-1}\varepsilon_2$ sind die Fußpunkte der eindeutig bestimmten Treffgeraden aus X_3' an $[{}^{d}\mathfrak{Z}_1\gamma]$ bzw. $[{}^{d}\mathfrak{Z}_2\gamma]$. Das ergibt mit $X_j'\gamma^{-1} = X_3'\gamma^{-1}\varepsilon_j$ (j=1,2) den Widerspruch, daß $X_i'\gamma^{-1}$ (i=1,2,3) paarweise benachbart sind.

Bezeichnen wir mit $\mathfrak{G}'_\gamma \subset \mathfrak{G}'$ die Menge aller Geraden $g' \subset \mathrm{Im}(\gamma)$, so wird ${}^{d}\Pi$ durch γ isomorph auf den Graßmann-Raum $\Gamma(\mathrm{Im}(\gamma)) := (\mathrm{Im}(\gamma), \mathfrak{G}'_\gamma, \in)$ abgebildet.

Sind ${}^{d}X$, ${}^{d}Y$ nicht benachbart, so schneidet die Gerade $({}^{d}X\gamma)({}^{d}Y\gamma)$ die Bildmenge $\mathrm{Im}(\gamma)$ in genau zwei Punkten. Eine reguläre lineare Abbildung ist daher nicht surjektiv.

Die graßmannschen Koordinaten der Unterräume liefern ein Beispiel für eine reguläre lineare Abbildung γ. Die Bildmenge $\mathrm{Im}(\gamma)$ ist dann eine Graßmann-Varietät [4,S.287], [6,S.255].

4. DER FORTSETZUNGSSATZ

4.1 Im folgenden sei $\Pi = (\mathfrak{P}, \mathfrak{G})$ ein n-dimensionaler projektiver Pappos-Raum, ${}^{d}\Pi = ({}^{d}\mathfrak{U}, {}^{d}\mathfrak{b}, \in)$ die d-Geometrie von Π $(1 \leq d \leq n-2)$ sowie $\gamma: {}^{d}\mathfrak{U} \to \bar{\mathfrak{P}}$ eine reguläre lineare Abbildung in die Punktmenge eines $(\binom{n+1}{d+1} - 1)$-dimensionalen projektiven Pappos-Raumes $\bar{\Pi} = (\bar{\mathfrak{P}}, \bar{\mathfrak{G}})$. Ferner sei $\Pi' = (\mathfrak{P}', \mathfrak{G}')$ ein projektiver Raum.

Ist $\psi: \bar{\mathfrak{P}} \to \mathfrak{P}'$ eine lineare Abbildung , so erhalten wir mit $\gamma\psi$ eine lineare Abbildung aus ${}^d\Pi$ in Π', und für eine Basis $\bar{\mathfrak{B}} \subset \mathrm{Im}(\psi)$ von $\bar{\Pi}$ folgt nach (1,1) $\mathrm{rg}\psi = \dim\bar{\Pi}([\bar{\mathfrak{B}}\psi]) \leq \mathrm{rg}\gamma\psi$, wegen $\mathrm{Im}(\gamma\psi) \subset \mathrm{Im}(\psi)$ also

$$(4,1) \quad \mathrm{rg}\psi = \mathrm{rg}\gamma\psi.$$

Geben wir andererseits eine lineare Abbildung $\chi: {}^d\breve{\mathfrak{U}} \to \mathfrak{P}'$ vor, so liefert $\gamma^{-1}\chi$ eine lineare Abbildung aus dem Graßmann-Raum $\Gamma(\mathrm{Im}(\gamma))$.

Es gilt der folgende <u>Fortsetzungssatz</u>:

<u>SATZ 4.1. Ist $\chi: {}^d\breve{\mathfrak{U}} \to \mathfrak{P}'$ eine lineare Abbildung und $\gamma: {}^d\breve{\mathfrak{U}} \to \bar{\mathfrak{P}}$ eine reguläre lineare Abbildung, so gibt es genau eine lineare Fortsetzung $\psi: \bar{\mathfrak{P}} \to \mathfrak{P}'$ der Abbildung $\gamma^{-1}\chi: \mathrm{Im}(\gamma) \to \mathfrak{P}'$.</u>

<u>Beweis.</u> Wir verwenden das in 2.3 besprochene Induktionsverfahren. Für lineare Abbildungen aus (endlichdimensionalen) projektiven Räumen ist das Fortsetzungsproblem trivial. Als Induktionsvoraussetzung dient daher im folgenden, daß es für jeden echten Teilraum ${}^d\breve{\mathfrak{U}}_1 \subset {}^d\breve{\mathfrak{U}}$ genau eine lineare Fortsetzung von $\gamma^{-1}(\chi|{}^d\breve{\mathfrak{U}}_1)$ gibt, also genau eine lineare Abbildung aus dem Unterraum $[{}^d\breve{\mathfrak{U}}_1\gamma]$ in $\mathfrak{P}'$. Ist ${}^d\breve{\mathfrak{U}}_1 = d[{}^0P]$, $d[{}^{n-1}B]$, u.s.w. speziell ein Hyperbündel oder ein Hyperfeld, so bezeichnen wir diese lineare Fortsetzung im folgenden mit ψ_P, ψ_B, u.s.w.

Jede Einschränkung von χ auf einen projektiven Höchstraum ist wieder eine lineare Abbildung. Es gibt einen projektiven Höchstraum ${}^d\mathfrak{F}_0$ derart, daß $r := \mathrm{rg}(\chi|{}^d\mathfrak{F}_0) \geq \mathrm{rg}(\chi|{}^d\mathfrak{F})$ für alle projektiven Höchsträume ${}^d\mathfrak{F} \subset {}^d\breve{\mathfrak{U}}$ gilt. In Abhängigkeit von r wählen wir einen Punkt ${}^0P$ und eine zu ${}^0P$ windschiefe Hyperebene ${}^{n-1}B$ und gegebenenfalls einen d-Raum ${}^dW$ derart, daß die linearen Abbildungen ψ_P und ψ_B genau eine lineare Fortsetzung $\psi: \bar{\mathfrak{P}} \to \mathfrak{P}'$ besitzen, gegebenenfalls unter der Zusatzvoraussetzung $\{{}^dW\}\chi = \{{}^dW\}\gamma\psi$. Ferner benützen wir die Mengen ${}^d\mathfrak{Z}_i$ (i=1,2,3) sowie die Abbildungen ε_1, ε_2 aus (2,3) bzw. (2,4).

(1) Gilt $r = -1$, so ergibt sich ohne Induktionsbeweis, daß nur die leere lineare Abbildung aus $\bar{\Pi}$ in Π' die gesuchte lineare

Fortsetzung ist. Der Fall $r = -1$ wird im folgenden ausgeschlossen.

(2) Gilt $r = 0$, so gibt es ein d-Büschel $d[{}^{d-1}T, {}^{d+1}H]$, welches genau ein Ausnahmeelement ${}^{d}W$ besitzt. Wir wählen eine Hyperebene ${}^{n-1}B$ so, daß ${}^{d}W \cap {}^{n-1}B = {}^{d-1}T$ gilt und einen Punkt ${}^{0}P \subset {}^{d+1}H$, der weder in ${}^{d}W$ noch in ${}^{d+1}H \cap {}^{n-1}B$ enthalten ist. Dann gilt ${}^{d}W\varepsilon_1 = {}^{0}P \vee {}^{d-1}T$ und ${}^{d}W\varepsilon_2 = {}^{n-1}B \cap {}^{d+1}H$. Aus $r = 0$ folgt mit Satz 3.1 $\mathrm{rg}\chi = 0$, und wegen ${}^{d}W\varepsilon_i \in \mathbb{D}(\chi)$ $(i=1,2)$ liefert (4,1) auch $\mathrm{rg}\psi_P = \mathrm{rg}\psi_B = 0$. Da ψ_P und ψ_B gemäß (V1) verträglich sind, gibt es nach Satz 1.6 genau eine lineare Fortsetzung ψ von ψ_P und ψ_B mit ${}^{d}W \in \mathbb{A}(\psi)$.

(3) Gilt $r = 1$, so gibt es ein d-Büschel $d[{}^{d-1}T, {}^{d+1}H] \subset \mathbb{D}(\chi)$. Wegen $n \leq d-2$, können wir einen Unterraum ${}^{d+2}U \supset {}^{d+1}H$ wählen; für einen beliebigen d-Raum ${}^{d}W_2 \in \mathbb{D}(\chi)$ mit ${}^{d}W_2 \subset {}^{d+1}H$ gibt es nach Hilfssatz 3.2 mindestens noch einen von ${}^{d+1}H$ verschiedenen Unterraum ${}^{d+1}\tilde{H} \in (d+1)[{}^{d}W_2, {}^{d+2}U]$ so, daß das d-Feld $d[{}^{d+1}\tilde{H}]$ ein ausnahmefreies d-Büschel enthält. Dann hat $\chi | d[{}^{d+1}\tilde{H}]$ einen Teilraum $d[{}^{1}A, {}^{d+1}\tilde{H}]$ als Ausnahmemenge. Der Punkt ${}^{0}P \subset {}^{d+1}\tilde{H}$ sei weder in ${}^{d}W_2$ noch in ${}^{1}A$ enthalten; die Hyperebene ${}^{n-1}B$ wählen wir komplementär zu ${}^{0}P$ durch ${}^{d+1}H$.

Für ${}^{d-1}\tilde{T}$ mit ${}^{0}P \subset {}^{d-1}\tilde{T} \subset {}^{d+1}\tilde{H}$ ist $d[{}^{d-1}\tilde{T}, {}^{d+1}\tilde{H}] \subset \mathbb{D}(\chi)$, in $d[{}^{n-1}B]$ gilt $d[{}^{d-1}T, {}^{d+1}H] \subset \mathbb{D}(\chi)$. Greifen wir aus $d[{}^{d-1}\tilde{T}, {}^{d+1}\tilde{H}]$ einen d-Raum ${}^{d}W_1$ mit ${}^{d}W_1 \neq {}^{d}W_2$ heraus, so gibt es in ${}^{d}W_1 {}^{d}W_2$ einen d-Raum ${}^{d}W \neq {}^{d}W_i$ $(i=1,2)$ und es gilt ${}^{d}W\varepsilon_i = {}^{d}W_i$.

Aus $r = 1$ können wir nur $\mathrm{rg}\chi \geq 1$ schließen. Für $\mathrm{rg}\chi = 1$ gilt auch $\mathrm{rg}\psi_P = \mathrm{rg}\psi_B = 1$ nach (4,1), und ψ_P, ψ_B sind gemäß (V3) verträglich, wie mittels der Geraden $\bar{g}_1 := d[{}^{d-1}\tilde{T}, {}^{d+1}\tilde{H}]\chi$ und $\bar{g}_2 := d[{}^{d-1}T, {}^{d+1}H]\chi$ sowie den Sätzen 3.4 und 3.5 folgt. Die gesuchte lineare Fortsetzung ist dann durch den bezüglich ψ_P, ψ_B wesentlichen Punkt ${}^{d}W\chi$ und die zulässige Bildmenge $\{{}^{d}W\chi\}$ eindeutig festgelegt. Für $\mathrm{rg}\chi \geq 2$ und $\mathrm{rg}\psi_P = \mathrm{rg}\psi_B = 1$ gilt nach Satz 3.3 notwendig $N \leq 3$. Wie am Ende von 1.3 gezeigt wurde, existiert zur obigen Angabe genau eine lineare Fortsetzung. Ist jedoch etwa $\mathrm{rg}\psi_P \geq 2$ und $\mathrm{rg}\psi_B \geq 1$, so sind ψ_P und ψ_B nach (V4) verträglich, was wieder mittels der Geraden $\bar{g}_1$, $\bar{g}_2$ und Satz 3.5 gezeigt werden kann; ψ ist wie oben eindeutig festzulegen.

(4) Gilt $r \geq 2$, so umfaßt $\mathbb{D}(\chi)$ einen zweidimensionalen projektiven Teilraum; wir nehmen o.B.d.A. an, daß dieser in einem d-Feld enthalten ist, sonst wird dual vorgegangen. Insbesondere

besitzt dieses d-Feld ein d-Büschel $d[{}^{d-1}T,{}^{d+1}H] \subset \mathbb{D}(\chi)$, und es gibt einen d-Raum ${}^dW_1 \in (d[{}^{d-1}T] \setminus d[{}^{d+1}H]) \cap \mathbb{D}(\chi)$. Aus $d[{}^{d-1}T,{}^{d+1}H]$ wählen wir einen d-Raum ${}^dW_2$ mit ${}^dW_2 \neq {}^dW_1$, dann gilt ${}^dW_1{}^dW_2 \subset \mathbb{D}(\chi)$. Nun sei ${}^0P \subset {}^dW_1$, ${}^0P \not\subset {}^{d-1}T$, ferner ${}^{n-1}B \supset {}^{d+1}H$ zu ${}^0P$ windschief und schließlich ${}^dW \in {}^dW_1{}^dW_2$, ${}^dW \neq {}^dW_i$ $(i=1,2)$, also ${}^dW\varepsilon_i = {}^dW_i$. Nach Konstruktion gilt $\mathrm{rg}\psi_B \geqq 2$, also sind ψ_B und ψ_P gemäß (V4) bzw. (V2) verträglich, je nachdem $\mathrm{rg}\psi_P \geqq 1$ bzw. $\mathrm{rg}\psi_P = 0$ gilt. Das ergibt sich, ebenso wie die eindeutige Festlegung von ψ, wie in den vorhergehenden Fällen.

Falls es also für $r \geqq 0$ überhaupt eine lineare Fortsetzung von $\gamma^{-1}\psi$ gibt, so ist es die Abbildung ψ, welche in der Menge $d[{}^0P] \cup d[{}^{n-1}B] \cup \{{}^dW\}$ dasselbe wie $\gamma^{-1}\psi$ leistet, aber auch im d-Büschel ${}^dW\varepsilon_1{}^dW\varepsilon_2$ mit $\gamma^{-1}\psi$ übereinstimmt. Für ${}^dW \in \mathbb{A}(\chi)$ ist das trivial. Gilt ${}^dW \in \mathbb{D}(\chi)$, so ist ${}^dW\varepsilon_1{}^dW\varepsilon_2 \subset (\mathbb{D}(\chi) \cap \mathbb{D}(\gamma\psi))$, und $\chi, \gamma\psi$ leisten nach Konstruktion auf mindestens einem d-Büschel dasselbe. Daher ist $\sigma := (\chi|({}^dW\varepsilon_1)({}^dW\varepsilon_2))(\gamma\psi|({}^dW\varepsilon_1)({}^dW\varepsilon_2))^{-1}$ nach Satz 3.4 oder nach Satz 3.5 eine Projektivität mit den drei Fixelementen ${}^dW$, ${}^dW\varepsilon_1$, ${}^dW\varepsilon_2$, also die Identität.

Gemäß 2.3 genügt es, den Satz für $n \leqq 2d+1$ zu zeigen. Wir schließen den Beweis in 4.2 für $n \leqq 2d-1$, in 4.3 für $n = 2d$ und in 4.4 für $n = 2d+1$ ab.

4.2 Für jeden Punkt ${}^0Q \subset {}^dW \cap {}^{n-1}B$ existiert nach Induktionsannahme genau eine lineare Fortsetzung ψ_Q von $\gamma^{-1}(\chi|d[{}^0Q])$; daher stimmen ψ und ψ_Q auf den windschiefen Unterräumen $\bar{\mathfrak{P}}_1 := [d[{}^0P \vee {}^0Q]\gamma] \subset [d[{}^0P]\gamma]$ und $\bar{\mathfrak{P}}_2 := [d[{}^0Q,{}^{n-1}B]\gamma] \subset [d[{}^{n-1}B]\gamma]$ überein, deren Verbindungsraum $[d[{}^0Q]\gamma]$ ist. Da ferner $\{{}^dW\}\gamma\psi = \{{}^dW\}\gamma\psi_Q$ gilt, sind ψ und ψ_Q nach Satz 1.4 (Fußnote (3)) fasergleich und leisten wegen $\gamma\psi_Q|({}^dW\varepsilon_1)({}^dW\varepsilon_2) = \gamma\psi|({}^dW\varepsilon_1)({}^dW\varepsilon_2)$ dasselbe; das ergibt $\{{}^dX\}\gamma\psi = \{{}^dX\}\chi$ für alle ${}^dX \in d[{}^0Q]$.

Ist speziell $n \leqq 2d-1$, so besitzt jeder d-Raum einen nichtleeren Durchschnitt mit ${}^dW \cap {}^{n-1}B$, so daß in diesem Fall ψ eine lineare Fortsetzung von $\gamma^{-1}\psi$ ist.

4.3 Wir setzen $n = 2d$ voraus. Mit 4.2 und auf Grund der Konstruktion von ψ ist $\{{}^dX\}\gamma\psi = \{{}^dX\}\chi$ nur noch für solche ${}^dX \in {}^d\breve{\mathfrak{X}}$ nachzuweisen, welche zu ${}^dW \cap {}^{2d-1}B$ und ${}^0P$ windschief sind. Wegen $n = 2d$ erhalten wir dann Schnittpunkte ${}^0S := {}^dX \cap {}^dW$ und ${}^0S_1 := {}^dX \cap {}^dW\varepsilon_1$ mit

${}^{o}S$, ${}^{o}S_1$, ${}^{o}P$ nicht kollinear.

Die Einschränkung von χ auf den projektiven Teilraum $d[{}^{o}P, {}^{d}W \vee {}^{o}P$ ist wegen ${}^{d}W\varepsilon_1 \in \mathbb{D}(\chi)$ keine leere Abbildung, so daß ihre Ausnahmemenge in einer Hyperebene ${}^{d}\check{\mathfrak{U}}_1 = d[{}^{1}A, {}^{d}W \vee {}^{o}P]$ des Teilraumes enthalten ist. Auch ${}^{d}\check{\mathfrak{U}}_2 = d[{}^{o}P \vee {}^{o}S_1, {}^{d}W \vee {}^{o}P]$ ist eine Hyperebene dieses Teilraumes, und es gibt in ihm einen d-Raum ${}^{d}Y \notin {}^{d}\check{\mathfrak{U}}_1 \cup {}^{d}\check{\mathfrak{U}}_2$, das heißt ${}^{d}Y \cap {}^{1}A = {}^{d}Y \cap ({}^{o}P \vee {}^{o}S_1) = {}^{o}P$. Dann existiert ${}^{o}Q := {}^{d}Y \cap \cap ({}^{o}S \vee {}^{o}S_1) = {}^{d}Y \cap {}^{d}X$; nach Konstruktion gilt ${}^{d}Y \in \mathbb{D}(\chi)$.

Da ${}^{d}X$ und damit auch ${}^{o}Q$ zu ${}^{d}W \cap {}^{2d-1}B$ windschief ist, können wir ${}^{d}Z := ({}^{d}W \cap {}^{2d-1}B) \vee {}^{o}Q$ bilden. Nehmen wir indirekt ${}^{d}Z = {}^{d}W\varepsilon_1$ an, so folgt mit ${}^{o}S_1 = {}^{o}Q \subset {}^{d}Y$ ein Widerspruch zu ${}^{d}Y \notin {}^{d}\check{\mathfrak{U}}_2$. Wegen ${}^{d}Z \in ({}^{d}W\varepsilon_1)({}^{d}W\varepsilon_2)$ ist ${}^{d}Z \in \mathbb{A}(\chi)$ nur für $r = 0$ und ${}^{d}Z = {}^{d}W$, also ${}^{o}Q = {}^{o}S$ möglich.

(1) Gilt ${}^{d}Z \in \mathbb{D}(\chi)$, und sind ${}^{2d-1}C_i \supset {}^{d}Z$ $(i=1,2)$ verschiedene Hyperebenen mit ${}^{o}P \subset {}^{2d-1}C_1$, ${}^{o}P \not\subset {}^{2d-1}C_2$, so leisten ψ und ψ_Q in $[d[{}^{o}Q, {}^{2d-1}C_i]\gamma]$ dasselbe, da auf Grund des Dimensionssatzes jeder in ${}^{2d-1}C_i$ enthaltene d-Raum ${}^{d}W \cap {}^{2d-1}B$ schneidet. Die Teilräume $d[{}^{o}Q, {}^{2d-1}C_i]$ haben ${}^{d}Z \in \mathbb{D}(\chi)$ gemeinsam, so daß nach Satz 1.3 in $\bar{\mathfrak{P}}_1 := [d[{}^{o}Q, {}^{2d-1}C_1]\gamma] \vee [d[{}^{o}Q, {}^{2d-1}C_2]\gamma] \subset [d[{}^{o}Q]\gamma]$ gilt $\psi | \bar{\mathfrak{P}}_1 = \psi_Q | \bar{\mathfrak{P}}_1$. Ferner leisten ψ und ψ_Q in $\bar{\mathfrak{P}}_2 := [d[{}^{o}P \vee {}^{o}Q]\gamma]$ dasselbe. Mit ${}^{2d-1}C_1 \supset \supset {}^{d}Z \vee {}^{o}P = {}^{d}W \vee {}^{o}P \supset {}^{d}Y$ erkennen wir ${}^{d}Y \in d[{}^{o}Q, {}^{2d-1}C_1] \cap d[{}^{o}P \vee {}^{o}Q]$, also ${}^{d}Y \in \in \bar{\mathfrak{P}}_1 \cap \bar{\mathfrak{P}}_2$. Wegen ${}^{d}Y \in \mathbb{D}(\chi)$ folgt ${}^{d}Y\gamma \in \mathbb{D}(\psi)$ und Satz 1.3 liefert $\psi | \bar{\mathfrak{P}}_1 \vee \vee \bar{\mathfrak{P}}_2 = \psi_Q | \bar{\mathfrak{P}}_1 \vee \bar{\mathfrak{P}}_2$. Setzen wir ${}^{d}X_1 := ({}^{d}X \cap {}^{2d-1}C_2) \vee {}^{o}P$ und ${}^{d}X_2 := := ({}^{d}X \vee {}^{o}P) \cap {}^{2d-1}C_2$, so gilt ${}^{d}X \in {}^{d}X_1 {}^{d}X_2$, also ${}^{d}X\gamma \in \bar{\mathfrak{P}}_1 \vee \bar{\mathfrak{P}}_2$, was $\{{}^{d}X\}\gamma\psi = = \{{}^{d}X\}\chi$ ergibt.

(2) Gilt ${}^{d}Z \in \mathbb{A}(\chi)$, so wählen wir einen zu ${}^{d}Y$ komplementären Unterraum ${}^{d-1}M$ mit ${}^{o}S_1 \subset {}^{d-1}M \subset {}^{d}X$. Das d-Büschel ${}^{d}b := d[{}^{d-1}M, {}^{d}X \vee {}^{o}P]$ ist zum Geradenbüschel $1[{}^{o}S_1, {}^{o}S_1 \vee {}^{o}P \vee {}^{o}Q]$ perspektiv. Für ${}^{d}\tilde{X} \in {}^{d}\mathring{b} := {}^{d}b \setminus \{{}^{d}X\}$ gilt ${}^{o}\tilde{S}_1 := {}^{d}\tilde{X} \cap {}^{d}W\varepsilon_1 = {}^{o}S_1$, so daß ${}^{d}Y \cap {}^{d}X =: {}^{o}\tilde{Q} \neq {}^{o}Q$ folgt. Erklären wir ${}^{d}\tilde{Z} := ({}^{d}W \cap {}^{2d-1}B) \vee {}^{o}\tilde{Q}$, so ist ${}^{d}Z \neq {}^{d}\tilde{Z} \in \mathbb{D}(\chi)$ und nach (1) $\{{}^{d}\tilde{X}\}\gamma\psi = \{{}^{d}X\}\chi$. Aus $\gamma\psi | {}^{d}\mathring{b} = \chi | {}^{d}\mathring{b}$ folgt $\gamma\psi | {}^{d}b = \chi | {}^{d}b$, also $\{{}^{d}X\}\gamma\psi = \{{}^{d}X\}\chi$.

4.4 Ist $n = 2d+1$, so erhalten wir beim Dualisieren von Sätzen der d-Geometrie wieder Sätze der d-Geometrie. Insbesondere gilt dual zu 4.2 für alle Hyperebenen ${}^{2d}D \supset {}^{d}W \vee {}^{o}P$ daher $\psi | [d[{}^{2d}D]\gamma] = = \psi_D$. Wir müssen also $\{{}^{d}X\}\gamma\psi = \{{}^{d}X\}\chi$ nur noch für solche d-Räume ${}^{d}X$ nachweisen, die sowohl zu ${}^{o}P$ als auch zu ${}^{d}W \cap {}^{2d}B$ windschief sind und (dual) sowohl mit ${}^{2d}B$ als auch mit ${}^{d}W \vee {}^{o}P$ den ganzen Raum aufspannen.

Für ${}^{d}X \cap {}^{d}W\varepsilon_1 \neq \emptyset$ existiert eine Hyperebene ${}^{2d}C \supset {}^{d}W\varepsilon_1 \vee {}^{d}X$. Die Abbildungen ψ und ψ_C stimmen in den Unterräumen $\bar{\mathfrak{P}}_P := [d[{}^{o}P, {}^{2d}C]\gamma]$ und $\bar{\mathfrak{P}}_R := [d[{}^{o}R, {}^{2d}C]\gamma]$ überein, wobei ${}^{o}R \subset {}^{d}W \cap {}^{2d}B$ beliebig gewählt werden darf. Wegen ${}^{d}W\varepsilon_1 \in \mathbb{D}(\chi)$ leisten ψ und ψ_C auch im Unterraum $\bar{\mathfrak{P}}_P \vee \bar{\mathfrak{P}}_R$ nach Satz 1.3 dasselbe. Wir können den Punkt ${}^{o}R$ insbesondere so wählen, daß ${}^{d}X \cap ({}^{o}P \vee {}^{o}R) \neq \emptyset$ erfüllt ist. Hilfssatz 2.1 liefert ${}^{d}X \in d[{}^{o}P, {}^{2d}C] \vee d[{}^{o}R, {}^{2d}C]$, also ${}^{d}X\gamma \in \bar{\mathfrak{P}}_P \vee \bar{\mathfrak{P}}_R$, womit in diesem Fall $\{{}^{d}X\}\gamma\psi = \{{}^{d}X\}\chi$ nachgewiesen ist. Dual folgt $\{{}^{d}X\}\gamma\psi = \{{}^{d}X\}\chi$ für alle ${}^{d}X \in {}^{d}\check{\mathfrak{U}}$ mit ${}^{d}X \vee {}^{d}W\varepsilon_2 \neq \mathfrak{P}$, was wegen $n = 2d+1$ zu ${}^{d}X \cap {}^{d}W\varepsilon_2 \neq \emptyset$ äquivalent ist.

Es verbleiben nur noch solche d-Räume ${}^{d}X$ zu untersuchen, welche ${}^{d}W \vee {}^{o}P$ in einem Punkt ${}^{o}Q \not\subset {}^{d}W\varepsilon_1$, ${}^{d}W\varepsilon_2$ schneiden. Die Abbildung $\chi | d[{}^{d}W \vee {}^{o}P]$ besitzt einen Ausnahmeraum $d[{}^{q}A, {}^{d}W \vee {}^{o}P]$. Wegen ${}^{d}W\varepsilon_1 \in \mathbb{D}(\chi)$ gilt $q \geqq 0$.

(1) Ist ${}^{o}Q \neq {}^{q}A$, so wählen wir Punkte ${}^{o}S_1 \subset {}^{d}W \cap {}^{2d}B$ und ${}^{o}S_2 \subset {}^{q}A$ mit ${}^{o}S_2 \neq {}^{o}Q$, sowie einen zu beiden Punkten windschiefen Unterraum ${}^{d}Z$ mit ${}^{o}Q \subset {}^{d}Z \subset {}^{d}W \vee {}^{o}P$. Daher gilt ${}^{d}Z \in \mathbb{D}(\chi)$ und $\dim({}^{d}Z \cap {}^{d}W \cap {}^{2d}B) = d-2$, so daß die (d-1)-Räume ${}^{d}Z \cap {}^{d}W\varepsilon_i$ $(i=1,2)$ verschieden sind. Es gibt also einen Punkt ${}^{o}Q_1 \subset {}^{d}W\varepsilon_1 \cap {}^{d}Z$, der nicht in ${}^{d}W\varepsilon_2 \cap {}^{d}Z$ liegt. Wir erhalten $({}^{o}Q \vee {}^{o}Q_1) \cap {}^{d}W\varepsilon_2 \cap {}^{d}Z := {}^{o}Q_2 \neq {}^{o}Q_1$. Wie bereits gezeigt wurde, gilt $\psi_{Q_i} = \psi | [d[{}^{o}Q_i]\gamma]$ $(i=1,2)$. Ferner ist ${}^{d}X \vee {}^{d}Z =: {}^{2d}E$ eine Hyperebene, also leisten ψ_E und ψ in $\bar{\mathfrak{P}}_i := [d[{}^{o}Q_i, {}^{2d}E]\gamma]$ dasselbe. Mit ${}^{d}Z \in \mathbb{D}(\chi)$ und Satz 1.3 folgt, daß ψ und ψ_E auch im Verbindungsraum $\bar{\mathfrak{P}}_1 \vee \bar{\mathfrak{P}}_2$ übereinstimmen, in dem ${}^{d}X\gamma$ nach Hilfssatz 1.2 liegt. Das ergibt $\{{}^{d}X\}\gamma\psi = \{{}^{d}X\}\chi$.

(2) Ist ${}^{o}Q = {}^{o}A$, also $q = 0$, so muß $r = 0$ und ${}^{o}A \subset {}^{d}W$ sein, da nur in diesem Fall das d-Büschel $({}^{d}W\varepsilon_1)({}^{d}W\varepsilon_2)$ ein Ausnahmeelement, nämlich genau ${}^{d}W$, besitzt.

Ein zu ${}^{d}W \vee {}^{o}P$ komplementärer Unterraum ${}^{d-1}M$ und eine Gerade ${}^{1}G \subset {}^{d}W \vee {}^{o}P$ ergeben das d-Büschel $d[{}^{d-1}M, {}^{d-1}M \vee {}^{1}G] =: {}^{d}b$; da $\gamma\psi$ und χ nach (1) in ${}^{d}b \setminus \{{}^{d}X\}$ übereinstimmen, folgt damit auch $\gamma\psi | {}^{d}b = \chi | {}^{d}b$, also $\{{}^{d}X\}\gamma\psi = \{{}^{d}X\}\chi$.

Damit haben wir den Fortsetzungssatz bewiesen.

4.5 Ist χ insbesondere eine reguläre lineare Abbildung, so ergibt sich als lineare Fortsetzung ψ nach (4,1) sogar eine lineare Injektion. Es gibt also, von kollinearen Umformungen abgesehen, genau eine reguläre lineare Abbildung von ${}^d\breve{\mathfrak{U}}$ und die Bildmenge jeder regulären linearen Abbildung ist eine Graßmann-Varietät.

Für jede lineare Abbildung χ lassen sich die Ausnahmemenge $\mathbb{A}(\chi)$ und die Fasern von χ mit Hilfe der entsprechenden Mengen der Abbildung ψ beschreiben. Gilt speziell $\mathrm{rg}\chi = 0$, so ist $\mathbb{A}(\chi)$ ein linearer Komplex von d-Räumen [4,S.322]. Wir können daher folgende einfache geometrische Kennzeichnung der linearen Komplexe geben:

Eine echte Teilmenge ${}^d\mathfrak{M}$ von ${}^d\breve{\mathfrak{U}}$ ist genau dann ein linearer Komplex von d-Räumen, wenn ${}^d\mathfrak{M}$ mit jedem d-Büschel nichtleeren Durchschnitt besitzt und mit je zwei benachbarten d-Räumen ${}^dX$, ${}^dY$ auch das Büschel ${}^dX{}^dY$ enthält. Durch ${}^d\mathfrak{M}$ wird ja genau eine lineare Abbildung χ vom Rang 0 mit $\mathbb{A}(\chi) := {}^d\mathfrak{M}$ und ${}^dX\chi := {}^dX_0 \in {}^d\breve{\mathfrak{U}}$ für ${}^dX \notin \mathbb{A}(\chi)$ festgelegt.

Setzen wir speziell Π als reellen dreidimensionalen projektiven Raum und d = 1 voraus, so gilt $\dim\bar{\bar{\Pi}} = 5$; dann ist γ das Kleinsche Übertragungsprinzip der Liniengeometrie und $\mathrm{Im}(\gamma)$ die Kleinsche Hyperquadrik [7]. Klassifiziert man die Schnittvarietäten $\mathrm{Im}(\gamma)\cap\bar{\mathfrak{P}}_1$ für alle Unterräume $\bar{\mathfrak{P}}_1$ von $\bar{\bar{\Pi}}$, so sind 21 wesentlich verschiedene Fälle zu unterscheiden [7], was auf 21 wesentlich verschiedene lineare Abbildungen aus ${}^1\breve{\mathfrak{U}}(\Pi)$ mit $(\mathrm{Im}(\gamma)\cap\bar{\mathfrak{P}}_1)\gamma^{-1}$ als Ausnahmemenge führt. Nach [3] sind jedoch die Fasern einer linearen Abbildung durch ihre Ausnahmemenge allein nicht notwendig festgelegt.

In der Literatur wurden zahlreiche Beispiele linearer Abbildungen ausführlich besprochen. Wir verweisen auf [3] und die dort angegebenen Arbeiten.

LITERATUR

1. Brauner.H., Geometrie projektiver Räume I, BI-Wissenschaftsverlag, Mannheim-Wien-Zürich, 1976.
2. Brauner,H., Geometrie projektiver Räume II, BI-Wissenschaftsverlag, Mannheim-Wien-Zürich, 1976.

3. Brauner,H., Eine geometrische Kennzeichnung linearer Abbildungen, Mh.Math. 77 (1973), 10 - 20.
4. Burau,W., Mehrdimensionale projektive und höhere Geometrie, VEB Dt. Verlag d. Wissenschaften, Berlin 1961.
5. Havlicek,H., Zur Theorie linearer Abbildungen I, J.Geometry, (im Druck 1981/82)
6. Reichardt,H., Vorlesungen über Vektor- und Tensorrechnung, VEB Dt. Verlag d. Wissenschaften, Berlin, 1957.
7. Sauer,R., Projektive Liniengeometrie, W. de Gruyter u. Co., Berlin-Leipzig, 1937.

Hans Havlicek
Institut für Geometrie
Technische Universität Wien
Gußhausstraße 27-29
A-1040 Wien
Österreich