

Korrekturanschrift: Dr.Hans Havlicek, Institut für Geometrie,
Technische Universität Wien, Gußhausstraße 27-29, 1040 Wien.

Kurztitel für Seitenüberschriften: Lineare Geradenabbildungen

Die linearen Geradenabbildungen aus dreidimensionalen
projektiven Pappos-Räumen

Von

Hans Havlicek, Wien

1. Problemstellung

1.1 Die von W. Blaschke [1] und J. Grünwald [9] angegebene kinematische Abbildung ordnet einer Geraden x des dreidimensionalen (komplex erweiterten) reellen projektiven Raumes¹ ihr kinematisches Bildpunktpaar (X_l, X_r) in einer euklidischen Bildebene zu, das durch Schwenkung aus dem Bildpaar von x unter einem linearen Zweispurensystem entsteht; vgl. auch [16;240f.]. Die Abbildungen $x \mapsto X_l$ und $x \mapsto X_r$ sind zwar linear (siehe 1.2), können jedoch durch die auf der Schwenkung beruhende Konstruktionsvorschrift nicht voneinander getrennt betrachtet werden. Vielmehr erhält man beide Bildpunkte einer Geraden stets als Lösung einer quadratischen Aufgabe.

Ein weiteres Beispiel einer linearen Geradenabbildung auf eine projektive Ebene wurde von L. Eckhart [7;54f.] und F. Rehbock [17] publiziert. Die Ausnahmemenge dieser Eckhart-Rehbockschen Abbildung ist ein nicht notwendig reeller Regulus, dessen Trägerquadrik T ein reelles Polarsystem besitzt, was sicherstellt, daß reelle Geraden auch reelle Bilder besitzen. Die von beiden Autoren angegebene Konstruktionsvorschrift benützt die komplexe Erweiterung und verlangt unter anderem, eine abzubildende Gerade mit der Quadrik T zu schneiden, also eine quadratische Aufgabe zu lösen. Ist T insbesondere eine bezüglich der komplexen Erweiterung nullteilige Quadrik, so liefert eine von W. Wunderlich [20] gefundene reell durchführbare quadratische Konstruktion, welche das reelle

¹Durch die Menge der Ausnahmegeraden der kinematischen Abbildung wird dieser projektive Raum zu einem quasielliptischen Raum.

Polarsystem von T benützt, für eine reelle Gerade die beiden Bilder unter den durch die beiden Reguli von T bestimmten linearen Abbildungen. Ferner wird in [20] gezeigt, wie man bei Kenntnis eines reellen Ausnahmeregulus allein durch reelle lineare Konstruktionen das Bild einer reellen Geraden ermitteln kann.

Auch die dem Übertragungsprinzip von F. Klein [6;301] zugrunde liegende Abbildung ist linear. F. Hohenberg [12] diskutiert eine lineare Geradenabbildung, deren Bildpunkte einen dreidimensionalen projektiven Raum aufspannen.

1.2 Der Begriff der linearen Geradenabbildung wird von H. Brauner [2] in größerem Rahmen präzisiert, wobei neben einer Beschreibung der Graßmann-Varietäten durch innere Eigenschaften noch eine geometrische Kennzeichnung der linearen Abbildungen aus der Punktmenge eines projektiven Raumes in die Punktmenge eines projektiven Raumes verwendet wird. Dort finden sich auch historische Bemerkungen zum Problem der Definition linearer Abbildungen. Vgl. auch die Noten von H. Timmermann [19] und U. Faigle [8]; kinematische Geradenabbildungen behandelt C. Lübbert [14].

Die beiden Artikel [10], [11] beinhalten im Anschluß an [2] eine einheitliche geometrische Kennzeichnung linearer Abbildungen aus projektiven Räumen und Graßmann-Räumen. Axiomensysteme für gewisse Graßmann-Räume geben übrigens G. Tallini [18] und P.M. Lo Re - D. Olanda [13] an.

In dieser Arbeit wird eine Angabe beliebiger linearer Geradenabbildungen aus dreidimensionalen projektiven Pappos-Räumen entwickelt, welche es gestattet, Bildelemente allein durch lineare Konstruktionen zu ermitteln, was dem Wesen einer linearen Abbildung entspricht. Im 2. Abschnitt bereiten wir diese Angabe vor.

2. Standardangaben

2.1 Wir setzen einen projektiven Desargues-Raum $\Pi=(P,G)$ mit Punktmenge P und Geradenmenge G sowie einen projektiven Desargues-Raum $\Pi'=(P',G')$ voraus, wobei Π und Π' isomorphe Algebraisierungskörper besitzen². Dann existieren für jeden Unterraum $P_1 \subset P$ lineare Abbildungen $\psi: P_1 \rightarrow P'$ im Sinne der Definition in [10;152]. Unter einer linearen Abbildung ψ vom Rang 1 ($\text{rg}\psi=1$) [10;154] verstehen wir im folgenden stets eine solche, die einen Algebraisierungs-

²Wenn nicht anders angegeben übernehmen wir Definitionen und Notation aus [3], [4].

körper von Π isomorph auf einen Algebraisierungskörper von Π' abbildet und bezeichnen sie als eine Kotierung. Wir schreiben $D(\psi)$ bzw. $A(\psi)$ bzw. $\text{Im}(\psi)$ für die Definitions- bzw. Ausnahme- bzw. Bildmenge von ψ und unterscheiden wie in [10], [11] zwischen dem Bildelement $X\psi \in P'$ und der Bildmenge $\{X\}\psi \subset P'$. Für $X \in A(\psi)$ gilt $\{X\}\psi = \emptyset$ und $X\psi$ ist nicht definiert.

2.2 Zur Festlegung einer linearen Abbildung $\psi: P \rightarrow P'$ kann folgende Standardangabe benützt werden:

Gegeben sind in Π eine Hyperebene $P_1 \subset P$ und drei verschiedene kollineare Punkte $R \in P_1$, $S \notin P_1$, T , ferner eine lineare Abbildung $\psi_1: P_1 \rightarrow P'$ mit $R \in D(\psi_1)$ und $\text{rg}\psi_1 \geq 1$, sowie im Zielraum Π' Punkte S' , T' so, daß $R\psi_1$, S' , T' drei verschiedene kollineare Punkte sind.

Hilfssatz. Zu jeder Standardangabe existiert genau eine lineare Abbildung $\psi: P \rightarrow P'$ mit $\psi|_{P_1} = \psi_1$, $S\psi = S'$ und $T\psi = T'$.

Beweis. Die lineare Abbildung ψ_1 ist Produkt einer Projektion $\pi_1: P_1 \rightarrow R_1$ mit Zentrum $A(\psi_1) \in P_1$ auf einen Unterraum $R_1 \subset P_1$ von Π und einer linearen Injektion $\varrho_1: R_1 \rightarrow P'$, wobei $R \in R_1$ vorausgesetzt werden darf [10;153].

Gehört S' der Bildmenge $\text{Im}(\psi_1)$ an, so gibt es die Punkte $S'\varrho_1^{-1}$, $T'\varrho_1^{-1}$, und der nach dem Planaritätsaxiom existierende Punkt $A := S'S'\varrho_1^{-1} \cdot T'T'\varrho_1^{-1}$ liegt notwendig in $A(\psi)$. Die Projektion $\pi: P \rightarrow R_1$ zum Zentrum $A(\psi_1) \vee \{A\}$ verkettet mit der linearen Injektion ϱ_1 ist dann die einzige lineare Abbildung zu dieser Angabe.

Ist S' kein Punkt von $\text{Im}(\psi_1)$, so sei $R := R_1 \vee \{S\}$. Anwendung von Hilfssatz 2 in [5] zeigt die Existenz genau einer linearen Injektion $\varrho: R \rightarrow P'$, also einer Kollineation $R \rightarrow \text{Im}(\varrho) \subset P'$, welche ϱ_1 fortsetzt und $S \mapsto S'$, $T \mapsto T'$ leistet. Das Produkt der Projektion $\pi: P \rightarrow R$ zum Zentrum $A(\psi_1)$ mit der linearen Injektion ϱ ist die einzige Lösung. \square

Bekannte Sonderfälle dieser Standardangabe sind die Angabe einer perspektiven Kollineation durch Zentrum, Achse und ein Paar zugeordneter Punkte oder das "Aufbauen" eines axonometrischen Risses über dem axonometrischen Grundriß in der elementaren Darstellenden

Geometrie.

Zusätzlich sollen auch die folgenden trivialen Angaben einer linearen Abbildung, bei denen eine lineare Abbildung $\psi_1: P_1 \rightarrow P'$ aus einer Hyperebene P_1 vorgegeben ist, als Standardangaben bezeichnet werden:

Neben ψ_1 ist noch ein Punkt $S \notin P_1$ gegeben. Dann existiert genau eine lineare Abbildung $\psi: P \rightarrow P'$ mit $S \in A(\psi)$ und $\psi|_{P_1} = \psi_1$.

Es gilt $\text{rg}\psi_1 = -1$, und ein Punkt $S \notin P_1$ ist gegeben. Dann existiert genau eine lineare Abbildung $\psi: P \rightarrow P'$ mit $\text{Im}(\psi) = \{S\}$ und $\psi|_{P_1} = \psi_1$.

Es gilt $\text{rg}\psi_1 = 0$; ferner sei $o \notin P_1$ eine Gerade und $\omega: o \rightarrow P'$ eine Kotierung mit $(o \cap P_1)\omega = (o \cap P_1)\psi_1$. Dann existiert genau eine lineare Abbildung $\psi: P \rightarrow P'$ mit $\psi|_o = \omega$ und $\psi|_{P_1} = \psi_1$.

3. Lineare Geradenabbildungen

3.1 Sei $\Pi = (P, G)$ ein dreidimensionaler projektiver Pappos-Raum.

Für alle Punkte $P \in P$ und alle Ebenen $\varepsilon \subset P$ mit $P \in \varepsilon$ sei $G[P, \varepsilon] :=$

$\{x \in G \mid P \in x, x \subset \varepsilon\}$. Die Menge dieser Geradenbüschel wird mit B bezeichnet, kleine Scriptbuchstaben stehen für Geradenbüschel. Das Paar

$$\Gamma = (G, B)$$

heißt Geradenraum von Π und ist nach [10] ein Graßmann-Raum³ mit dem Dimensionspaar $(2, 2)$. Ein Geradenbündel $G[P]$ besteht aus allen Geraden durch einen Punkt $P \in P$, ein Geradenfeld $G[\varepsilon]$ aus allen Geraden in einer Ebene $\varepsilon \subset P$. Zwei Geraden $a, b \in G$ mit $a \cap b \neq \emptyset$ heißen treffend und sind benachbart im Sinne von [10].

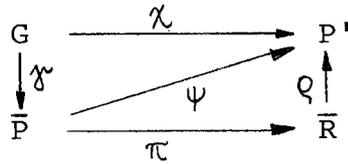
Weiters sei $\Pi' = (P', G')$ ein projektiver Pappos-Raum, wobei Π und Π' isomorphe Algebraisierungskörper besitzen, und $\chi: G \rightarrow P'$ eine lineare Abbildung [10;165]. Wir betrachten für Rang von χ gleich 1 ($\text{rg}\chi = 1$) nur solche lineare Abbildungen χ , welche einen Algebraisierungskörper eines Geradenbündels oder Geradenfeldes isomorph auf einen Algebraisierungskörper von Π' abbilden und sprechen analog zu 2.1 von Kotierungen.

Der Rang von χ genügt der Ungleichung $\text{rg}\chi \leq 5$ [10;166]. Ist $\bar{\Pi} = (\bar{P}, \bar{G})$ ein fünfdimensionaler projektiver Pappos-Raum und $\gamma: G \rightarrow \bar{P}$ eine reguläre lineare Abbildung [10;166], also $\text{rg}\gamma = 5$, so existiert nach dem Fortsetzungssatz⁴ in [11;174] genau eine lineare Abbildung $\psi: \bar{P} \rightarrow P'$ mit $\chi = \gamma\psi$ und ψ kann nach dem Hauptsatz in [10;153] in

³Wir übernehmen die Begriffe, nicht jedoch die Notation aus [10], [11].

⁴Für die Gültigkeit dieses Fortsetzungssatzes ist das Axiom von Pappos erforderlich.

ein Produkt einer Projektion $\pi: \bar{P} \rightarrow \bar{R}$ auf einen Unterraum \bar{R} von $\bar{\Pi}$ und einer linearen Injektion $Q: \bar{R} \rightarrow P'$ zerlegt werden. Die Bild-



menge $\text{Im}(\gamma) =: \bar{M}$ ist eine quadratische (Graßmann-) Varietät⁵, also kollinear zu Nullstellenmenge einer quadratischen Form [6;302], [11;179].

3.2 Bei fest gewählter regulärer linearer Abbildung γ ist nach 3.1 die Angabe einer linearen Geradenabbildung $\chi: G \rightarrow P'$ äquivalent zur Angabe einer linearen Abbildung $\psi: \bar{P} \rightarrow P'$. Um ψ und damit χ festzulegen, wählen wir in $\bar{\Pi}$ zwei verschiedene Geradenfelder $G[\beta], G[\sigma]$, zwei verschiedene Geradenbündel $G[P], G[S]$ mit $P \in \sigma, P \notin \beta, S \in \beta \cap \sigma$ (Fig.1) und ein Geradenbündel $b_1 \subset G[\beta]$. Dann sind $\bar{P}_1 := b_1 \gamma, \bar{P}_2 := G[\beta] \gamma, \bar{P}_3 := G[S] \gamma \vee \bar{P}_2, \bar{P}_4 := G[\sigma] \gamma \vee \bar{P}_3$ und $\bar{P}_5 := G[P] \gamma \vee \bar{P}_4$ Unterräume von $\bar{\Pi}$ mit $\bar{P}_1 \subset \bar{P}_2 \subset \dots \subset \bar{P}_5$ und $\dim \bar{\Pi}(\bar{P}_i) = i$ für $i=1, 2, \dots, 5$.

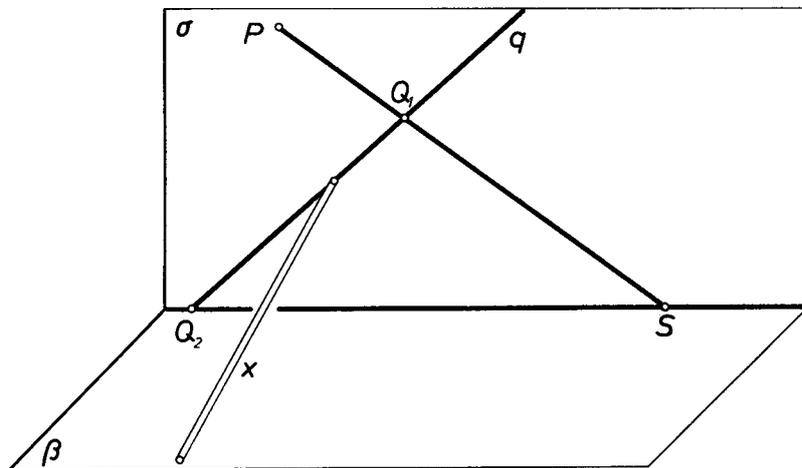


Fig.1

Sei weiters $\chi_1: b_1 \rightarrow P'$ eine lineare Abbildung und damit $\psi_1 := \gamma^{-1} \chi_1: \bar{P}_1 \rightarrow P'$ ebenfalls linear. Mittels einer Standardangabe kann ψ_1 zu einer linearen Abbildung $\psi_2: \bar{P}_2 \rightarrow P'$ fortgesetzt werden. Analog kann ψ_2 zu einer linearen Abbildung $\psi_3: \bar{P}_3 \rightarrow P'$ fortgesetzt

⁵Falls $\bar{\Pi}$ zusätzlich fanosch ist, liegt eine Quadrik vor.

werden. Wir erhalten also durch mehrmalige Anwendung von Standardangaben eine lineare Abbildung

$$\psi := \psi_5 : \bar{P}_5 = \bar{P} \rightarrow P'.$$

Da die für eine Standardangabe nötigen Angabepunkte in $\bar{\Pi}$ stets in der Varietät \bar{M} gewählt werden können, sind sie dann mit γ^{-1} in die Geradenmenge G übertragbar, und wir haben eine geometrische Angabe der durch ψ eindeutig festgelegten linearen Geradenabbildung

$$\chi := \gamma\psi : G \rightarrow P'$$

gefunden, welche nur die Räume Γ und Π' benötigt⁶. Jede lineare Geradenabbildung kann auf diese Weise festgelegt werden.

3.3 Es bleibt zu zeigen, wie man ohne Heranziehung der regulären linearen Abbildung γ für jede Gerade $x \in G$ die Bildmenge $\{x\}\chi$ ermitteln kann.

Da der Geradenraum Γ in $G[\beta]$ die Struktur einer projektiven Ebene induziert, beherrschen wir mit der unter γ^{-1} übertragenen Standardangabe von ψ_2 die Einschränkung $\chi|G[\beta]$. Die übertragenen Angabeelemente für ψ_3 gehören wegen $\bar{P}_3 \cap \bar{M} = (G[\beta] \cup G[S])\gamma$ dem Geradenbündel $G[S]$ an. Gemeinsam mit $\chi|G[S, \beta]$ ergibt das entweder eine Standardangabe von $\chi|G[S]$, oder es gilt $\text{rg}(\chi|G[S, \beta]) = 0$ und zu zwei verschiedenen Geraden $s, t \in G[S]$ sind die verschiedenen Bildpunkte S', T' vorgeschrieben. Dann ist $o := \{s\} \vee \{t\}$ [10; 163] ein Geradenbüschel mit $o \cap G[S, \beta] = \{r\} \subset D(\chi|G[\beta])$, und es gilt $\text{rg}(\chi|G[\beta]) \geq 1$, da eine Standardangabe für ψ_2 vorliegt. Es existieren daher ein Geradenbüschel $\tilde{o} \subset D(\chi|G[\beta])$, drei paarweise verschiedene Geraden $\tilde{r}, \tilde{s}, \tilde{t} \in \tilde{o}$, genau eine Projektivität

$$\tau : o \rightarrow \tilde{o} \text{ mit } r \mapsto \tilde{r}, s \mapsto \tilde{s}, t \mapsto \tilde{t}$$

und genau eine Projektivität

$$\tau' : S'T' \rightarrow \tilde{o}\chi \text{ mit } r\chi \mapsto \tilde{r}\chi, S' \mapsto \tilde{s}\chi, T' \mapsto \tilde{t}\chi.$$

Wegen [11; 171] folgt $\chi|o = \tau(\chi|\tilde{o})\tau'^{-1}$ und $\chi|G[S, \beta]$ gibt gemeinsam mit $\chi|o$ eine triviale Standardangabe von $\chi|G[S]$ ab.

Wiederholung dieser Überlegungen liefert $\chi|G[\delta]$ und anschließend $\chi|G[P]$. Wir beherrschen dann die Abbildung χ für alle Geraden der Menge

$$G_0 := G[\beta] \cup G[S] \cup G[\delta] \cup G[P].$$

Da die Abbildungen χ und ψ denselben Rang besitzen [11; 174] kann dieser nach [10; 154] mit Hilfe eines Dreiseits $\{b_1, b_2, b_3\} \subset G[\beta]$ und eines Dreikants $\{p_1, p_2, p_3\} \subset G[P]$ berechnet werden, und stimmt mit der Dimension des von $\{b_1, b_2, b_3, p_1, p_2, p_3\}\chi \subset P'$ aufgespannten

⁶ Alle Angabegeraden in G können etwa so gewählt werden, daß sie den Ebenen eines Tetraeders angehören.

Unterraumes von Π' überein. Für $\text{rg}\chi \geq 1$ gehört wegen der wiederholten Standardangaben mindestens ein Geradenbüschel der Definitionsmenge von $\chi|_{G_0}$ an. Wir setzen voraus, daß das Geradenbüschel $G[S, \beta]$ diese Eigenschaft hat, da dies die folgenden Überlegungen vereinfacht.

Besitzt χ den Rang -1 , so gilt $A(\chi) = G$. Für $\text{rg}\chi = 0$ ist $A(\chi)$ die Menge der Nullgeraden (isotropen Geraden) einer regulären oder singulären Nullpolarität [3;166,181f.], also ein Gewinde oder ein Gebüsch. Die Nullpolarität kann mit linearen Konstruktionen vervollständigt werden. Vgl. [3;181f.].

Sei nun $\text{rg}\chi \geq 1$. In jedem Geradenbündel $G[X]$ mit $X \in \delta \cap \beta$ beherrschen wir $\chi|_{G[X, \delta]}$ und $\chi|_{G[X, \beta]}$. Wegen $\delta \cap \beta \in D(\chi)$ kann nach [10;156] die Einschränkung $\chi|_{G[X]}$ als Produkt einer Projektion in $G[X]$ und einer linearen Injektion dargestellt werden⁷. Dual ergibt sich $\chi|_{G[\gamma]}$ für alle Ebenen $\gamma \supset PS$ wegen $PS \in D(\chi)$. Trifft eine Gerade x weder PS noch $\delta \cap \beta$, so existiert eine x treffende Gerade $q \in G[\delta] \cap D(\chi)$, welche S nicht enthält; wegen $G[S, \beta] \subset D(\chi)$ ist ja höchstens eine Gerade von $G[\delta]$ eine Ausnahmegerade. Sind Q_1 bzw. Q_2 die Schnittpunkte von q mit PS bzw. $\delta \cap \beta$ (Fig.1), so ergibt sich mit $\chi|_{G[Q_i]}$ ($i=1,2$) wie oben $\chi|_{G[xvq]}$ nach [10;156], womit für alle Geraden das Bild unter χ mit Hilfe linearer Konstruktionen zu finden ist.

3.4 In der elementaren Axonometrie wird ein Punkt durch seine drei Koordinaten erfaßt, die es gestatten, ausgehend von einer axonometrischen Angabe seinen axonometrischen Riß zu ergänzen; vgl. auch [5]. Wir geben eine ähnliche Konstruktionsvorschrift für die in 3.2 festgelegte lineare Geradenabbildung $\chi: G \rightarrow P'$ an und wollen dabei im Gegensatz zu 3.3 "möglichst wenig" in Γ und "möglichst viel" in Π' arbeiten. Es sei $\text{rg}\chi \geq 1$ vorausgesetzt.

Durch die Angabeelemente P, β, S, δ sind drei lineare Abbildungen χ_1, χ_2, χ_3 aus Γ auf projektive Teilräume von Γ [10;163] festgelegt, und zwar

$$\chi_1: G \rightarrow G[P] \text{ mit } x \mapsto x\chi_1 := (x \cap \beta) \vee \{P\}, \text{ für alle } x \in G \setminus G[\beta],$$

$$\chi_2: G \rightarrow G[\beta] \text{ mit } x \mapsto x\chi_2 := (x \vee \{P\}) \cap \beta, \text{ für alle } x \in G \setminus G[P] \text{ und}$$

$$\chi_3: G \rightarrow G[S, \delta] \text{ mit } x \mapsto x\chi_3 := (x \cap \delta) \vee \{S\}, \text{ für alle } x \in G \setminus (G[S] \cup G[\delta]).$$

Für jede Gerade x , welche weder PS noch $\delta \cap \beta$ trifft, sind die Geraden $x\chi_i := x^i$ ($i=1,2,3$) erklärt und die Abbildung $x \mapsto (x^1, x^2, x^3)$

⁷Für $\delta \cap \beta \in A(\chi)$ versagt dieses Verfahren.

ist injektiv; x^1, x^2, x gehören einem Geradenbüschel an und x trifft x^3 (Fig.2).

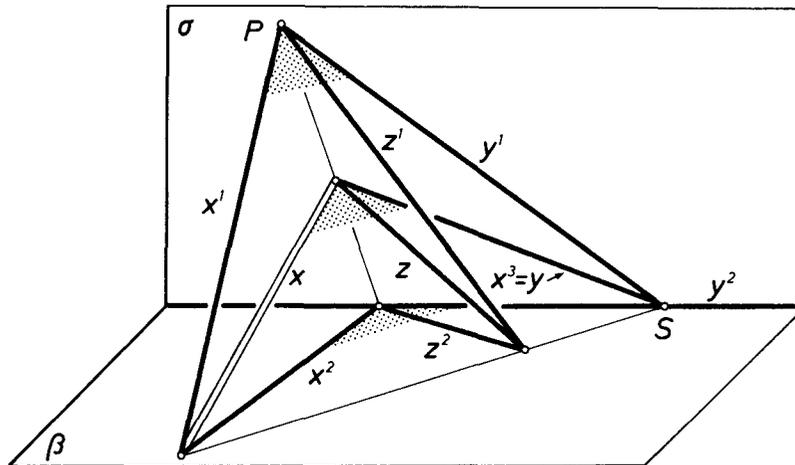


Fig.2

Die Konstruktion stützt sich darauf, die Gerade x in das Geradenbüschel

$$b := \{x\} \vee \{x^3\}$$

einzubetten und allein unter Verwendung von $\chi|G[P], \chi|G[\beta], \chi|G[S, \delta]$ sowie den Gesetzen einer linearen Abbildung das Bild von b unter χ und dann $\{x\}\chi$ zu ermitteln. Wir schreiben b^i für $b\chi_i$ ($i=1,2,3$).

Gilt etwa $\{x^1\}\chi = \emptyset$, so folgt $\{x\}\chi = \{x^2\}\chi$. Für $x^1\chi = x^2\chi \in P'$ ist entweder $x\chi = x^1\chi$ oder $\{x\}\chi = \emptyset$. Ist jedoch $x^1\chi \neq x^2\chi$, so liegt der sicher existierende Bildpunkt $x\chi$ auf der Verbindungsgeraden der Punkte $x^1\chi, x^2\chi$ und ist von diesen verschieden.

Setzen wir $y := x^3$ und ist $z \in b$ von x und y verschieden, so wird die Projektivität

$$\xi := (\chi_1|b)(\chi_2|b)^{-1} : b^1 \rightarrow b^2$$

durch $x^1 \mapsto x^2, y^1 \mapsto y^2, z^1 \mapsto z^2$ eindeutig festgelegt. Falls $b^1\chi$ und $b^2\chi$ Geraden von Π' sind, ist auch

$$\xi' := (\chi|b^1)^{-1}\xi(\chi|b^2) : b^1\chi \rightarrow b^2\chi$$

eine Projektivität [11;171] und ist durch das Bild unter χ der obigen Angabe für ξ eindeutig bestimmt.

(1) Sind $b^1\chi$ und $b^2\chi$ windschiefe Geraden von Π' , so erzeugt ξ' einen Regulus eines dreidimensionalen Unterraumes von Π' . Mit $\chi|G[S, \delta]$ kann $y\chi$ ergänzt werden, und die Gerade des ergänzenden Regulus durch $y\chi$ schneidet aus $x^1\chi, x^2\chi$ den gesuchten Punkt $x\chi$.

(2) Haben die verschiedenen Geraden $b^1\chi$ und $b^2\chi$ einen Schnittpunkt und ist ξ' keine Perspektivität, so erzeugt ξ' in der zu $\Pi'(b^1\chi \vee b^2\chi)$ dualen projektiven Ebene einen Kegelschnitt⁸ k'^* .

⁸In einem fanoschen Pappos-Raum liegt die Tangentenmenge eines Kegelschnitts einer Ebene von Π vor.

Nach dem Satz von Pascal ermitteln wir die Restgerade r' von k'^* durch $y\chi$, und diese schneidet die Gerade $x^1\chi \cdot x^2\chi$ im Punkt⁹ $x\chi$ (Fig.3).

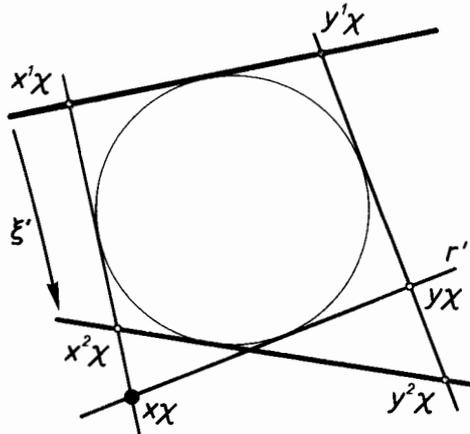


Fig.3

(3) Seien $b^1\chi$ und $b^2\chi$ verschiedene treffende Geraden und ξ' eine Perspektivität zum Zentrum Z' . Falls $x\chi$ existiert, sind die Punkte $x\chi, y\chi, b^1\chi \cdot b^2\chi$ kollinear (Fig.4); genau für $x^1\chi = x^2\chi = b^1\chi \cdot b^2\chi$ und $y\chi = Z'$ gilt $\{x\}\chi = \emptyset$.

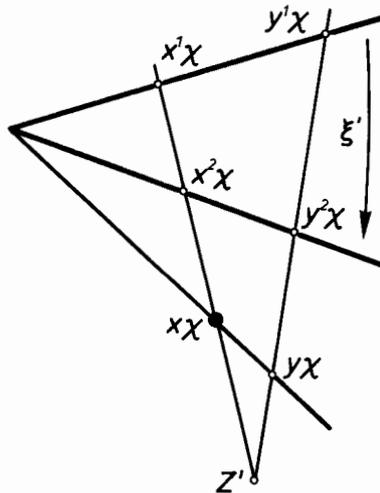


Fig.4

(4) Sei etwa $b^1\chi$ eine Gerade und $b^2\chi \neq b^1\chi$ einpunktig. Wir wählen zeb speziell so aus, daß $\{z^2\}\chi = \emptyset$ gilt. Dann liegen $z^1\chi = z\chi, y\chi$ und $x\chi$ kollinear (Fig.5).

(5) Sind $b^1\chi$ und $b^2\chi$ dieselbe Gerade g' von Π' , so legen wir durch g' eine Ebene ε' und wählen in ε' eine Projektion $\pi: \varepsilon' \rightarrow g'$ mit Zentrum A' . Nach dem Fortsetzungssatz (vgl. 3.1) können wir die Bildfigur in g' stets aus einer Hilfbildfigur gemäß (2) oder (3) unter der Projektion π erzeugen. Bezeichnet $\tilde{\chi}$ eine lineare

⁹Sind diese Geraden gleich, so ist $x\chi$ jener Punkt von r' , der in der dualen Ebene die "Tangente" von k'^* im "Punkt" r' abgibt.

Geradenabbildung, welche die Hilfsbildfigur liefert, so folgt $\{x\}\chi = \{x\}\tilde{\chi}\pi$.

(6) Sei etwa $b^1\chi$ eine Gerade g' und $b^2\chi \subset g'$ einpunktig. Wir wählen $z \in b$ speziell so, daß $\{z^2\}\chi = \emptyset$ erfüllt ist und können wie in (5) eine Hilfsbildfigur gemäß (4) ergänzen mit $\{z^2\}\tilde{\chi} = \emptyset$ (Fig.6). Genau für $x^1\chi = x^2\chi$ und $y\chi = z\chi$ folgt $x\tilde{\chi} = A'$, also $\{x\}\chi = \emptyset$.

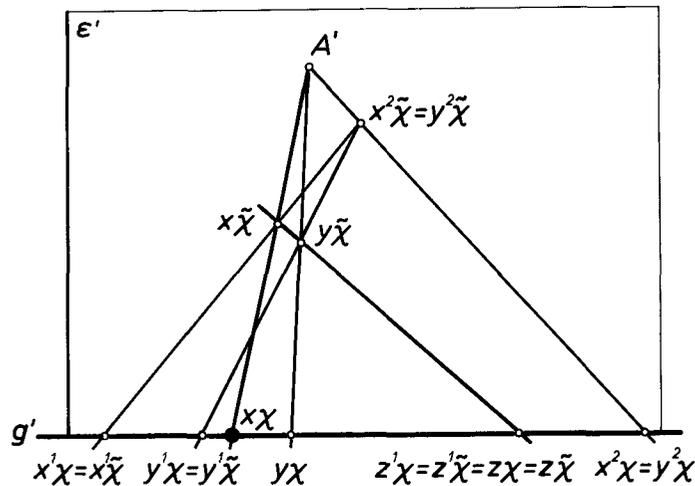


Fig.6

(7) Sind $b^1\chi$ und $b^2\chi$ verschiedene einpunktige Mengen, so existieren Geraden $z, w \in b$ mit $\{z^1\}\chi = \emptyset, \{w^2\}\chi = \emptyset$; aus $z=w$ folgt $y\chi = x\chi$. Andernfalls ist $y\chi \neq x\chi \in P'$, aber $x\chi$ kann in Π' alleine nicht konstruiert werden. Als Hilfskonstruktion in Γ benutzen wir eine Projektivität

$$\eta: b \rightarrow G[S, \sigma] \text{ mit } z \mapsto y^2, w \mapsto y^1, y \mapsto y.$$

Dann gilt $x\chi = x\eta(\chi|G[S, \sigma])$.

Die Bildmenge $\{x\}\chi$ einer Geraden, welche PS oder $\sigma \cap \beta$ trifft, kann als Durchschnitt der Bildmengen zweier Geradenbüschel durch x ermittelt werden. Nur für projektive Räume der Ordnung 2 versagt dieses Verfahren, da dann jedes Geradenbüschel höchstens eine zu PS und $\sigma \cap \beta$ windschiefe Gerade enthält.

3.5 Die Angabe einer linearen Abbildung $\chi: G \rightarrow P'$ aus 3.2 ist insbesondere dann zweckmäßig, wenn χ keine Ausnahmeelemente besitzt. Hat χ hingegen eine "so große" Ausnahmemenge, daß durch diese die Fasern von χ bestimmt sind, so können oft einfachere Angaben gefunden werden.

Betrachten wir als Beispiel eine lineare Abbildung

$$\chi: G \rightarrow P' \text{ mit } \text{rg}\chi = 4;$$

wir können $\dim \Pi' = 4$ voraussetzen. Nach 3.1 ist χ das Produkt einer

regulären linearen Abbildung $\chi: G \rightarrow \bar{P}$ und einer linearen Abbildung $\psi: \bar{P} \rightarrow P'$ mit genau einem Ausnahmepunkt $\bar{A} \in \bar{P}$.

(1) Für $\bar{A} \notin \bar{M} = \text{Im}(\chi)$ ist die Abbildung χ global, und verschiedene Geraden mit demselben Bildpunkt sind stets windschief. Zur Festlegung gemäß 3.2 sind nichttriviale Standardangaben zu verwenden, und diese sind so zu wählen, daß $G[\beta]\chi$ und $G[P]\chi$ zwei Ebenen von Π' mit genau einem Schnittpunkt $g_1\chi = g_2\chi$ sind, wobei die Geraden $g_1 \in G[P]$ und $g_2 \in G[\beta]$ einander nicht treffen.

(2) Falls \bar{A} in \bar{M} liegt, gilt $A(\chi) = \{\bar{A}\chi^{-1}\} =: \{a\}$. Die Tangentialhyperebene von \bar{M} in \bar{A} sei mit \bar{P}_∞ bezeichnet; wir fassen $\bar{P}_\infty\psi =: P'_\infty$ als Fernhyperebene von Π' auf. Dann ist das ψ -Bild des Tangentialkegels $\bar{M} \wedge \bar{P}_\infty$ die Punktmenge Q' eines Paares ergänzender Reguli und $\psi|(\bar{M} \setminus \bar{P}_\infty)$ eine Bijektion auf die Menge der eigentlichen Punkte von Π' . Schränkt man also χ auf die Menge der zu a windschiefen Geraden ein, so kann im Geradenraum Γ ein Modell eines vierdimensionalen affinen Raumes konstruiert werden, indem man die Struktur des affinen Ausschnittes von Π' mit der Umkehrabbildung nach Γ überträgt¹⁰.

Die folgenden Überlegungen werden es gestatten, die Abbildung χ ohne Benützung des projektiven Raumes $\bar{\Pi}$ zu beschreiben: Wir zeichnen drei verschiedene Geraden e', a'_1, a'_2 jenes Regulus von Q' aus, dessen Geraden die χ -Bildmengen der Geradenfelder durch a sind. Durch e' legen wir eine eigentliche Ebene ε' . Die Parallelprojektionen

$$\mu_i: P' \rightarrow \varepsilon' \quad (i=1,2)$$

werden durch ihre Zentren a_i festgelegt. Dann ist die Abbildung $X' \mapsto (X'\mu_1, X'\mu_2)$ eine Bijektion von $P' \setminus P'_\infty$ auf die Menge der geordneten Punktpaare von $\varepsilon' \setminus e'$ [7; 20f.]. Für jeden Punkt von $Q' \setminus (a'_1 \cup a'_2)$ stimmen die Bildpunkte unter μ_1 und μ_2 überein. Die Ausnahmemengen der zusammengesetzten Abbildungen $\chi\mu_i$ sind jene beiden Geradenfelder $G[\varepsilon_i]$ durch a , für die $G[\varepsilon_i]\chi = a'_i$ gilt. Bezeichnet

$$\varphi_i: G \rightarrow \varepsilon_i \quad (i=1,2)$$

die Spurabbildung, die jeder Geraden aus $G \setminus G[\varepsilon_i]$ ihren Spurpunkt in ε_i zuweist, so besitzen die Abbildungen $\chi\mu_i$ und φ_i dieselben Fasern, was die Existenz von Kollineationen

$$\kappa_i: \varepsilon_i \rightarrow \varepsilon' \quad \text{mit} \quad \varphi_i\kappa_i = \chi\mu_i \quad (i=1,2)$$

bewirkt. Es gilt $a\kappa_1 = e'$ und $\kappa_1|_a = \kappa_2|_a$, sodaß $\kappa_1\kappa_2^{-1}: \varepsilon_1 \rightarrow \varepsilon_2$ eine

¹⁰ Allgemeiner kann man in einem n -dimensionalen projektiven Pappos-Raum in der Menge aller d -dimensionalen Unterräume, welche zu einem festen $(n-d-1)$ -dimensionalen Unterraum komplementär sind, ein Modell eines $(n-d)(d+1)$ -dimensionalen affinen Raumes erhalten, wenn man die zugehörige Graßmann-Varietät "stereographisch" abbildet. Mit anderen Methoden werden diese affinen Räume in [15] behandelt.

Perspektivität zu einem Zentrum $E \in P$ ist.

Gibt man umgekehrt in Π eine Gerade a , Ebenen $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ und einen Punkt E , sowie in Π' eine Ebene ε' und Geraden e', a'_1, a'_2 und schließlich eine Kollineation $\kappa_1: \varepsilon_1 \rightarrow \varepsilon'$ zulässig vor, so liefert die Umkehrung der obigen Konstruktion eine lineare Geradenabbildung $\chi: G \rightarrow P'$ mit $\text{rg}\chi=4$ und $A(\chi)=\{a\}$.

Literatur

- [1] Blaschke, W.: Euklidische Kinematik und nichteuklidische Geometrie, Z.Math.Phys. 60 (1911), 61-91 und 203-204.
- [2] Brauner, H.: Eine geometrische Kennzeichnung linearer Abbildungen, Mh.Math. 77 (1973), 10-20.
- [3] Brauner, H.: Geometrie projektiver Räume I, BI-Wissenschaftsverlag, Mannheim-Wien-Zürich 1976.
- [4] Brauner, H.: Geometrie projektiver Räume II, BI-Wissenschaftsverlag, Mannheim-Wien-Zürich 1976.
- [5] Brauner, H.: Zur Theorie linearer Abbildungen, erscheint in Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg.
- [6] Burau, W.: Mehrdimensionaler projektive und höhere Geometrie, VEB Dt. Verlag d. Wissenschaften, Berlin 1961.
- [7] Eckhart, L.: Konstruktive Abbildungsverfahren, Springer, Wien 1926.
- [8] Faigle, U.: Über Morphismen halbmodularer Verbände, Aequationes math. 21 (1980), 53-67.
- [9] Grünwald, J.: Ein Abbildungsprinzip, welches die ebene Geometrie und Kinematik mit der räumlichen Geometrie verknüpft, Sitz. Ber. Akad. Wiss. Wien, math. naturw. Kl. Abt. IIa 120 (1911), 677-741.
- [10] Havlicek, H.: Zur Theorie linearer Abbildungen I, J. Geometry 16 (1981), 152-167.
- [11] Havlicek, H.: Zur Theorie linearer Abbildungen II, J. Geometry 16 (1981), 168-180.
- [12] Hohenberg, F.: Projektionen projektiver Räume, Mh. Math. 61 (1957), 54-66.
- [13] Lo Re, P.M. - Olanda, D.: Grassmann Spaces, J. Geometry 17 (1981), 50-60.
- [14] Lübbert, C.: Über kinematische Geradenabbildungen, Abh. Braunschweig. wiss. Ges. 30 (1979), 35-49.
- [15] Metz, R.: Der affine Raum der verallgemeinerten Reguli, Geom. Dedicata 10 (1981), 337-367.
- [16] Müller, E.: Vorlesungen über Darstellende Geometrie, I.Bd.: Die linearen Abbildungen, F.Deuticke, Leipzig-Wien 1923.
- [17] Rehbock, F.: Die linearen Punkt-, Ebenen- und Strahlabbildungen der darstellenden Geometrie, Z. angew. Math. Mech. 6 (1926), 379-400 und 449-468.

- [18] Tallini, G.: On a characterization of the Grassmann manifold representing the lines in a projective space; in Cameron, P.J.-Hirschfeld, J.W.P. - Hughes, D.R. (Hrsg.): Finite Geometries and Designs, Proc. of the second Isle of Thorns Conf. 1980, London Math. Soc. Lecture Note Series 49, Cambridge U.P., Cambridge 1981.

- [19] Timmermann, H.: Koordinatenfreie Kennzeichnung von Projektionen in projektiven Räumen, Mitt. math. Ges. Hamburg 10 (1973), 88-102.

- [20] Wunderlich, W.: Eckhart - Rehbocksche Abbildung und Studysches Übertragungsprinzip, Publ. math. Debrecen 7 (1960), 94-107.