Mathematik und Landkarten

Hans Havlicek

Einleitung

Die *Kartenentwurfslehre* beschäftigt sich mit der Darstellung der (gekrümmten) Erdoberfläche in einer (ebenen) Karte. In diesem Beitrag sollen einige mathematische Grundideen vorgestellt werden. Zu deren präziser Beschreibung werden tiefer liegende Kenntnisse der *Differentialgeometrie* benötigt, also jenes Teilgebiets der Mathematik, wo Geometrie und Infinitesimalrechnung aufeinander treffen. Die Entwicklung der Infinitesimalrechnung begann erst mit den Untersuchungen von Isaac Newton (1643–1727) und Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716). Demgegenüber wurde eine Reihe von Kartenentwürfen lange vor dem 17. Jahrhundert gefunden.

Jede Darstellung der Erdoberfläche in der Ebene wird als *Projektion* oder *Entwurf* bezeichnet. In der geometrischen Literatur dient der Terminus „Projektion“ als Oberbegriff für Parallel- und Zentralprojektion. Nur wenige Karten beruhen aber auf einer derartigen Projektion. Daher bevorzugen wir hier die Bezeichnung Kartenentwurf.

Geometrie auf der Kugeloberfläche

Auf der Kugel können zwei Arten von Kreisen unterschieden werden. *Großkreise* haben denselben Mittelpunkt und daher auch denselben Radius wie die Kugel. Alle anderen Kreise der Kugel heißen *Kleinkreise*; ihr Radius ist kleiner als der Kugelradius.

Abbildung 1 zeigt die Erdkugel samt Gradnetz. Jene Kreise, die den Nord- mit dem Südpol verbinden, sind Großkreise. Sie werden auch *Meridiane* genannt. Der *Äquator* ist ebenfalls ein Großkreis, während die anderen *Breitenkreise* durchwegs Kleinkreise sind.

Abb. 1: Erdkugel

Die Großkreise spielen auf der Kugel dieselbe Rolle wie die Geraden in der Ebene: Als kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten der Kugel tritt immer ein Stück eines Großkreises auf. Die Länge dieses Bogens ist der *sphärische Abstand* der beiden Punkte, also der an der Oberfläche gemessene Abstand. Im Gegensatz zur Ebene können zwei Punkte der Kugel nicht beliebig weit entfernt sein: Jeder Punkt der Kugel hat von seinem *Antipoden*, also dem auf der Kugel gegenüberliegenden Punkt, den maximalen sphärischen Abstand. Auf der Erdkugel ist der maximale Abstand gleich dem halben Umfang des Äquators (also rund 20000 km).

Schneiden einander zwei Kurven auf der Kugel in einem Punkt, so wird ihr *Winkel* als der Winkel der Tangenten im Schnittpunkt erklärt. Damit ist der Winkel krummer Kurven auf den Winkel von Geraden zurückgeführt. Die Berechnung der *Oberfläche* von Teilen der Kugel lässt sich nicht einfach erklären. Es sollte aber auch ohne theoretischen Hintergrund klar sein, dass es prinzipiell möglich ist, derartige Oberflächen zu berechnen.

Problemstellung

Die Erde ist näherungsweise eine Kugel mit einem Radius von 6370 km. Um eine bessere anschauliche Vorstellung zu haben, gehen wir von einem *Globus*, also einem verkleinerten Modell des Erdballs aus. Ein optimaler Kartenentwurf müsste ein (flächenhaftes) Gebiet oder sogar den gesamten Globus *isometrisch* abbilden. D.h., für *je zwei Punkte* des Gebiets müsste der sphärische Abstand mit dem Abstand ihrer Bilder in der Karte übereinstimmen. Die Differentialgeometrie lehrt aber, *dass es einen isometrischen Entwurf nicht gibt*, wie klein auch immer das abzubildende Gebiet gewählt wird. Es lassen sich nur Darstellungen finden, bei denen *manche Abstände* erhalten bleiben, niemals aber *alle Abstände*. Jede Darstellung eines Gebiets der Erdkugel ist also hinsichtlich der Abstände an gewissen Stellen verzerrt.

Eine andere Forderung ist die *Flächentreue*. Es muss *jeder beliebige Teil* eines Gebiets des Globus in der Karte denselben Flächeninhalt besitzen wie im Original. Es zeigt sich, dass diese Forderung relativ einfach zu erfüllen ist. Dementsprechend gibt es eine Fülle von flächentreuen Entwürfen. Flächentreue Karten werden gerne zur Illustration von Wirtschaftsdaten verwendet, da sie jedes Land – wenn schon nicht in richtiger Gestalt – so dennoch in der richtigen Größe wiedergeben.

Weiters seien die *winkeltreuen Karten* genannt. Hier werden *alle Winkel* in wahrer Größe dargestellt. Statt „winkeltreu“ wird auch der Begriff *konform* verwendet. Es gibt zahlreiche Beispiele konformer Karten, ihre mathematische Beschreibung ist aber oft aufwändig.

Erwähnt werden muss noch folgendes Ergebnis der Differentialgeometrie: *Ein Entwurf kann in einem Gebiet nicht flächentreu und winkeltreu zugleich sein.* Ein derartiger Entwurf wäre nämlich isometrisch, was nicht möglich ist. Es kommt aber durchaus vor, dass etwa ein flächentreuer Entwurf in einzelnen Punkten winkeltreu ist.

Verzerrung

Die in einem Kartenpunkt auftretenden Verzerrungen lassen sich an Hand der nach dem französischen Mathematiker Nicolas Auguste Tissot (1824–1897) benannten *Indikatrix* illustrieren. Eine präzise Definition kann nur mit Hilfe der Infinitesimalrechnung erfolgen. Wir beschreiben die Indikatrix hier näherungsweise:

- Um einen Punkt P am Globus wird ein *sehr kleiner Kreis* gezeichnet, etwa mit einem sphärischen Radius $r = 1$ mm.
- Das Kartenbild dieses Kreises weicht dann von einer *Ellipse* nur ganz wenig ab. Der auftretende Fehler wird hier vernachlässigt.
- Diese Ellipse in der Karte ist aber meist sehr kein. Daher wird sie in einer *fest gewählten Vergrößerung* dargestellt. Dies ergibt die *Indikatrix* im Kartenbild von P.

Diese Konstruktion kann für verschiedene Punkte des Globus durchgeführt werden. Um die Indikatrizen vergleichen zu können, muss dabei immer *derselbe Kreisradius r* und *derselbe Vergrößerungsfaktor* gewählt werden. In manchen Punkten kann die Indikatrix sogar ein *Kreis* sein. Dort herrscht in allen Richtungen dieselbe Längenverzerrung und sogar *Winkeltreue*. Andernfalls bestimmen die große und die kleine Halbachse der Indikatrix die beiden Richtungen mit den extremalen Längenverzerrungen. Bei einem (hypothetischen) isometrischen Entwurf wären *alle* Indikatrizen Kreise mit demselben Radius.

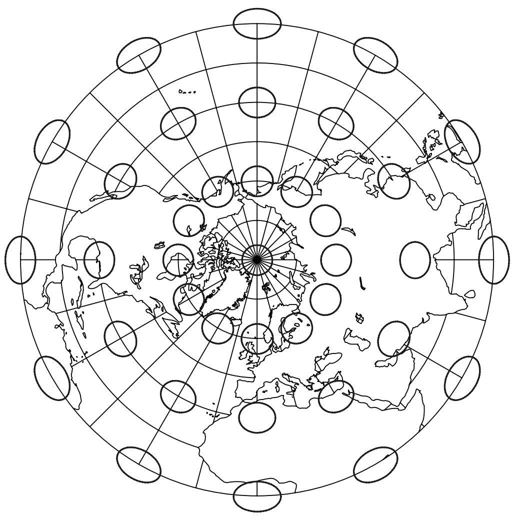

Abb. 2: Abstandsteuer Azimutalentwurf mit Tissot-Indikatrizen

Abbildung 2 zeigt einen *abstandstreuen Azimutalentwurf* in *normaler Lage*, d.h., der Nordpol ist in der Bildmitte. Die Abstandstreue bezieht sich aber nur auf die Meridiane: Diese werden in richtiger Länge als Stecken dargestellt. Die Indikatrix im Bild des Nordpols ist ein Kreis, alle anderen Indikatrizen sind Ellipsen mit derselben Länge der kleinen Halbachse. Die Breitenkreise erscheinen in der Karte zu lang. Die variable Länge der großen Halbachsen der Indikatrizen zeigt, dass die Breitenkreise verschieden stark verzerrt werden. Nahe am Nordpol ist die Abweichung deutlich geringer als am Äquator.

Als weiteres Beispiel betrachten wir in Abbildung 3 den *Entwurf von Sanson*. Er ist durch zwei Forderungen gekennzeichnet: Erstens wird der Nullmeridian als Strecke in richtiger Länge dargestellt, zweitens sind die Bilder der Breitenkreise dazu rechtwinkelige Strecken, die ebenfalls in richtiger Länge dargestellt werden. Diese Informationen reichen schon aus, um das Bild des Nullmeridians und der Breitenkreise zu zeichnen. Anschließend kann das Bild des gesamten Gradnetzes ergänzt werden.

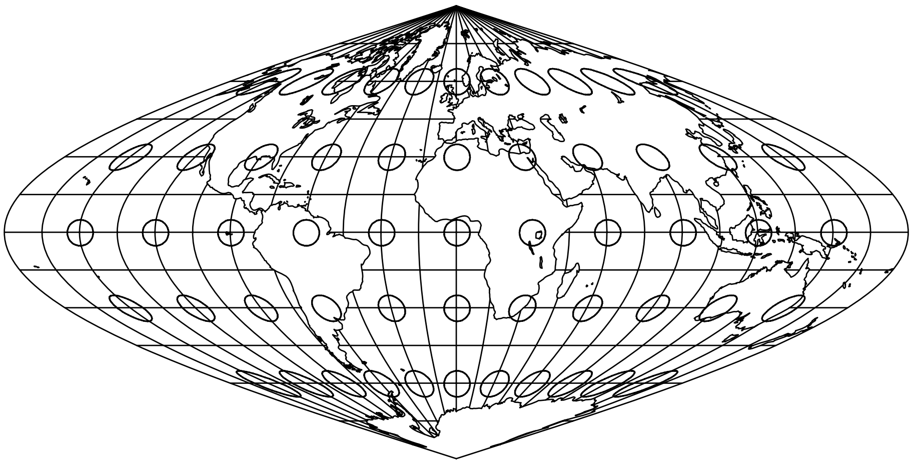

Abb. 3: Entwurf von Sanson mit Tissot-Indikatrizen

Was die obige Beschreibung nicht sofort erkennen lässt, ist die *Flächentreue* des Entwurfs von Sanson. Sie kann daran abgelesen werden, dass *alle Indikatrizen denselben Flächeninhalt* besitzen. Dennoch treten starke Deformationen auf. Das sehen wir etwa am Bild von Australien. In diesem Bereich weichen die Indikatrizen stark von der Kreisform ab. In den Punkten des Nullmeridians und des Äquators ist die Abbildung isometrisch. Hier sind die Indikatrizen Kreise mit demselben Radius. Dies ist kein Widerspruch zur Nicht-Existenz isometrischer Landkarten. Entlang einzelner Kurven lässt sich Isometrie realisieren, niemals aber in einem (flächenhaften) Gebiet des Globus.

Als letztes Beispiel in diesem Abschnitt sei die *stereographische Projektion* vorgestellt: Jeder Punkt des Globus wird aus dem Südpol auf jene Ebene projiziert, welche den Globus im Nordpol berührt. Das ist eine nette Eigenschaft, die aber beim Betrachten der Karte keine Rolle spielt. Erneut haben wir hier eine Beschreibung, die wesentliche Eigenschaften nicht erkennen lässt: Die stereographische Projektion ist *winkeltreu* und sogar *kreistreu*. Letzteres bedeutet: Jeder Kreis am Globus erscheint in der stereographischen Karte wieder als Kreis oder (ausnahmsweise) als Gerade. Alle Tissot-Indikatrizen der stereographischen Projektion sind Kreise. In Abbildung 4 sind keine Indikatrizen eingezeichnet, wir merken aber folgendes an: Der Radius der Indikatrizen in allen Bildpunkten des Äquators ist *doppelt so groß* wie der Radius der Indikatrix im Bild des Nordpols. Deshalb vermittelt die Karte den völlig falschen Eindruck, Grönland (rund 2,17 Millionen m^2) wäre deutlich keiner als die arabische Halbinsel (rund 2,73 Millionen m^2). In Abbildung 5 wird ein wesentlich kleinerer Globus vom Nordpol bis hin zum Breitenkreis 80° Süd stereographisch abgebildet. Derartige Darstellungen sind für geographische Karten kaum brauchbar, da der Rand des Bildes rund 131 Mal größer dargestellt wird als die Bildmitte. Hingegen wird die stereographische Projektion gerne für *drehbare Sternkarten* verwendet.

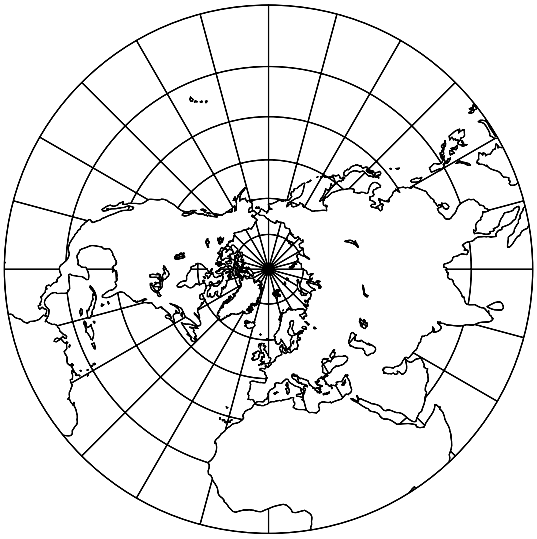

Abb. 4: Stereographische Projektion der Nordhalbkugel

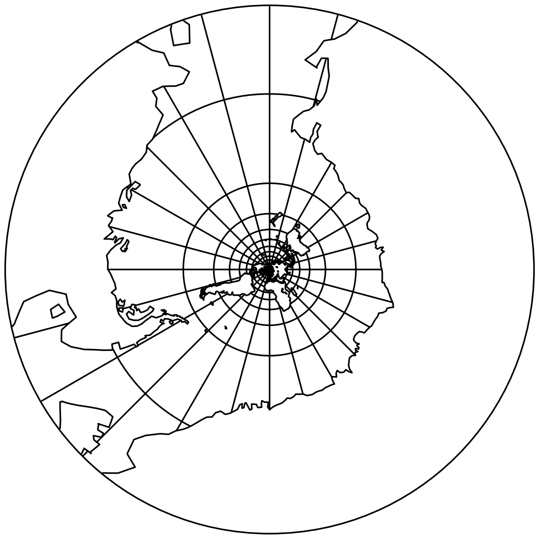

Abb. 5: Stereographische Projektion bis 80° Süd

Weltkarten

Wenn es darum geht, den ganzen Globus darzustellen, spielt neben der im letzten Abschnitt behandelten Verzerrung auch das *Gesamtbild des Globus* eine wichtige Rolle. Viele vom mathematischen Standpunkt interessante Karten taugen nicht oder nur beschränkt als Weltkarten.

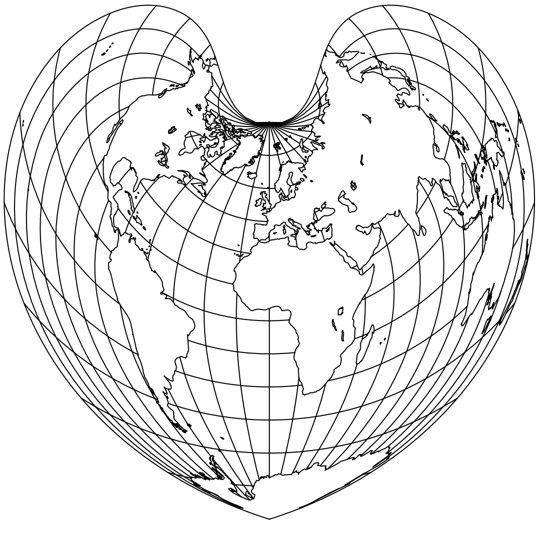

Abb. 6: Entwurf von Bonne

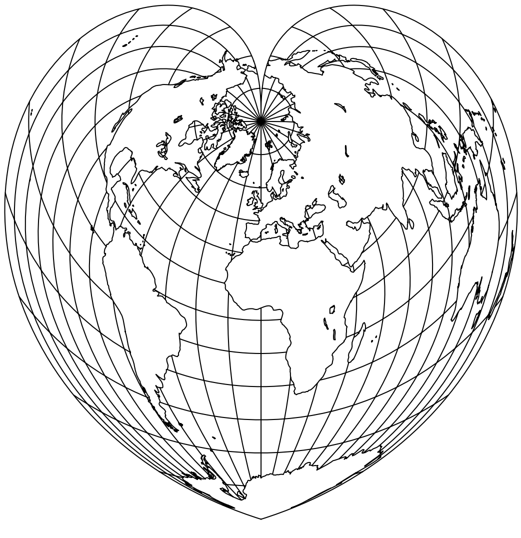

Abb. 7: Entwurf von Stab-Werner

Zum Beispiel stören beim Entwurf von Sanson (Abbildung 3) die beiden Ecken oben und unten. Die kugelförmige Erde hat doch keine Ecken! Ebenso wenig können die beiden Entwürfe in den Abbildungen 6 und 7 überzeugen. Sie sind Varianten des Sanson-Entwurfs. Der Nullmeridian erscheint als Strecke in wahrer Länge, alle Breitenkreise haben konzentrische Kreisbögen als Bilder und erscheinen ebenfalls in richtiger Länge. Der gemeinsame Mittelpunkt der Breitenkreisbilder ist beim Entwurf von Bonne irgendwo „oberhalb“ des Bildes des Nordpols (was einen zusätzlichen Freiheitsgrad ergibt), beim Stab-Werner-Entwurf jedoch im Bild des Nordpols. Beide Entwürfe sind so wie der Entwurf von Sanson *flächentreu*. Der Preis für die Längentreue entlang der Breitenkreise ist aber hoch: Er bewirkt die „Herzform“ der beiden Entwürfe.

Eine einfache und zugleich passable Weltkarte liefert die *quadratische Plattkarte* in Abbildung 8. Sie hat ihren Namen daher, dass das Bild des Gradnetzes aus Quadraten besteht. Entlang des Äquators ist die Abbildung (so wie der Sanson-Entwurf) isometrisch, alle anderen Breitenkreise erscheinen zu lange. Alle Meridiane haben im Bild die richtige Länge, die Indikatrizen dort sind aber Ellipsen (so wie beim abstandstreuen Azimutalentwurf). Es wird auch vom *abstandstreuen Zylinderentwürf* gesprochen. Ein Vorteil dieser Karte ist, dass sich aus ihr geographische Längen und Breiten leicht ablesen lassen. Flächentreue ist nicht gegeben.

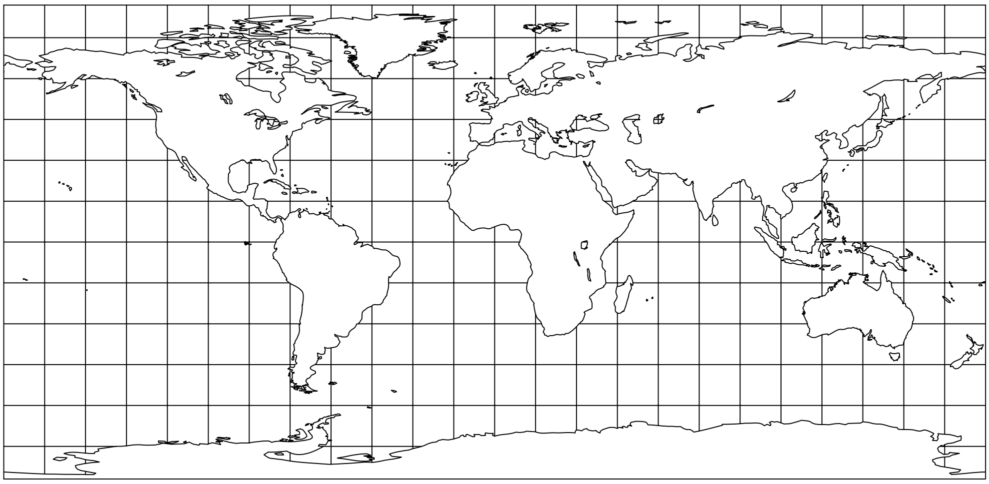

Abb. 8: Quadratische Plattkarte

Eine ansprechende Weltkarte liefert der *Entwurf von Mollweide* in Abbildung 9. Diese Karte hat die bemerkenswerte Eigenschaft, dass die Bilder der Meridiane *Ellipsen* sind. Als störend kann empfunden werden, dass die Breitenkreise geradlinig erscheinen. Dafür ist der Entwurf aber *flächentreu*.

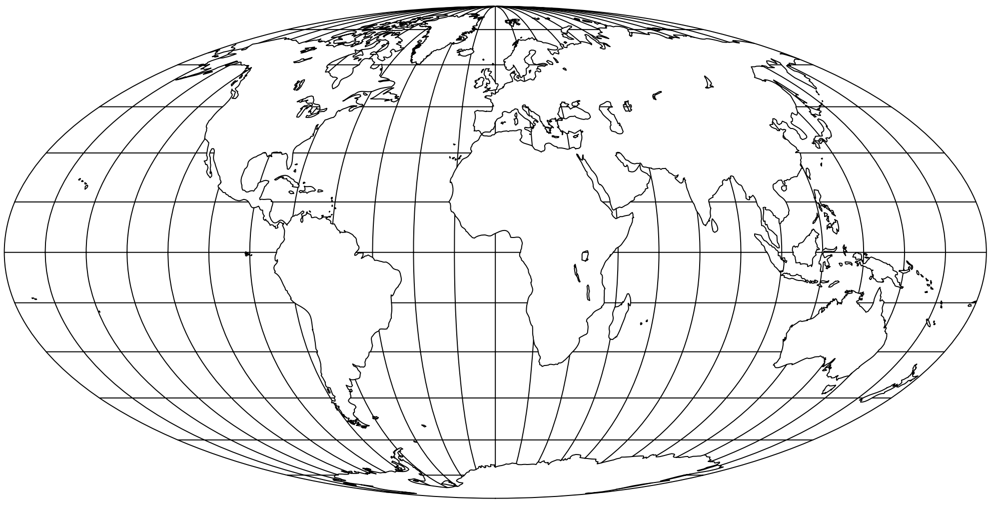

Abb. 9: Entwurf von Mollweide

Es gibt eine Reihe von Darstellungen des ganzen Globus, die als *vermittelnde Entwürfe* bezeichnet werden. Derartige Entwürfe sind in der Regel bloß nahezu flächentreu und bieten dafür meist bessere Werte bei der Längenverzerrung als eine tatsächlich flächentreue Karte.

Kartenausschnitte

Landkartenentwürfe lassen sich dadurch verändern, dass der Globus vor der eigentlichen Abbildung verdreht wird. Als Beispiel betrachten wir nochmals den Sanson-Entwurf. In Abbildung 10 liegt der Punkt am Äquator mit der geographischen Länge 30° Ost dort, wo vorher der Nordpol war. Es wird von einer Darstellung in *transversaler Lage* gesprochen.

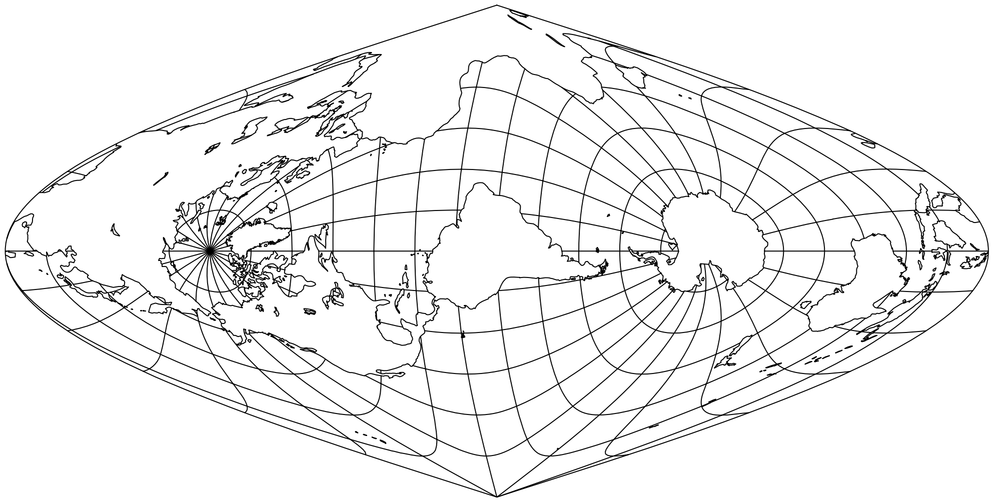

Abb. 10: Entwurf von Sanson in transversaler Lage

Die entstehende Karte folgt nicht der gängigen Konvention, den Nordpol „oben“ darzustellen. Sie ist aber flächentreu, hat dieselben Tissot-Indikatrizen wie Abbildung 3 und liefert in der Bildmitte eine nahezu unverzerrte Darstellung von Südamerika.

In einem Atlas könnte daher ein *Ausschnitt* der Karte aus Abbildung 10 zu finden sein, so wie er in Abbildung 11 (vergrößert und gedreht) wiedergegeben ist. Dass es sich dabei um einen Sanson-Entwurf handelt, ist nun wohl nicht mehr zu erkennen. Denn durch die vorhergehende Drehung des Globus stellen sich die Bilder der Längen- und Breitenkreise als komplizierte Kurven dar. Außerdem geht die charakteristische Gesamtform des Sanson-Entwurfs auf Grund des rechteckigen Bildausschnitts verloren. Dieses Beispiel soll zeigen, dass Kartenentwürfe, die für Weltkarten nur beschränkt geeignet sind, dennoch gute Detailkarten liefern können.

Abb. 11: Kartenausschnitt

Literaturverzeichnis

[1] F. Hohenberg: Konstruktive Geometrie in der Technik, 3. Aufl., Wien New York, Springer, 1966.

[2] J. Hoschek: Mathematische Grundlagen der Kartographie, 2. Aufl., Mannheim Wien Zürich, BI-Wissenschaftsverlag, 1984.

[3] E. Müller, E. Kruppa: Lehrbuch der darstellenden Geometrie, 6. Aufl., Springer, Wien, 1961.

[4] G. Sammet: Der Vermessene Planet, Gruner + Jahr, Hamburg, 1990.

[5] K. Strubecker, G. Scheffers: Wie findet und zeichnet man Gradnetze von Land- und Sternkarten? 2. Aufl., Stuttgart, Teubner, 1956.

Die Werke [1] und [3] sind Lehrbücher der Konstruktiven Geometrie, in denen das Thema Landkarten anschaulich behandelt wird. Das Buch [5] kann im Gegensatz zu [2] mit geringen mathematische Kenntnisse gelesen werden. Für historische Anmerkungen und Reproduktionen alter Karten sei auf [4] verwiesen.