ÜBER DIE ABBILDUNGSGLEICHUNGEN EINER NORMALPROJEKTION

Von Hans Havlicek, Wien

1. Gleich vorweg: In diesem Beitrag gibt es keine Programmlistings und auch keine Plotterzeichnungen. Es geht vielmehr um das eher "trockene" Thema der Festlegung einer Normalprojektion (oder normalen Axonometrie) im rechnergestützten Konstruieren. Die Motivation für die Wahl einer Normalprojektion anstelle einer Schrägprojektion liegt hier wohl primär darin, daß Normalrisse "unverzerrt" erscheinen. Dieses mit unserer Seherfahrung zusammenhängende Argument trifft auch für Parallelrisse zu, die nicht "allzu schräg" sind. Bei einem Normalriß ist diese (zweifellos vage) Bedingung sicherlich erfüllt, und es ist nicht nötig, etwa an Hand des Risses eines Würfels, die "Güte" der Angabe zu überprüfen. (Daneben ist für die "Anschaulichkeit" eines Risses vor allem die Lage der Sehstrahlen zum abzubildenden Objekt maßgeblich).

Solange "im Raum" gerechnet wird und das Ergebnis danach in die Bildebene projiziert wird, ergibt eine Normalprojektion keine Vorteile gegenüber einer Schrägprojektion. Erst wenn "im Riß" gerechnet wird, also etwa eine aus der Darstellenden Geometrie bekannte Konstruktion nachvollzogen wird, treten die bekannten Vorteile eines Normalrisses (z.B. Satz vom rechten Winkel) wieder hervor.

2. Um eine *Normalprojektion* ($X \mapsto X^n$) des Raumes auf eine Bildebene π rechnerisch zu beschreiben, verwenden wir ein (x,y,z)-Koordinatensystem im Raum und ein $(\bar{x},\bar{y})$-Koordinatensystem in der Bildebene π. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei O der gemeinsame Ursprung beider Systeme[1]. Mit E_1,E_2,E_3 bzw. A,B bezeichnen wir die jeweiligen Einheitspunkte.

Für die räumlichen Koordinaten (a_1,a_2,a_3) von A und (b_1,b_2,b_3) von B folgt nach den Eigenschaften eines kartesischen Koordinatensystems

$$(1) \qquad a_1^2+a_2^2+a_3^2 = b_1^2+b_2^2+b_3^2 = 1 \quad a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3 = 0.$$

Ist X ein Raumpunkt und X^n sein Normalriß, so erhalten wir wegen $(\overrightarrow{OX}^n-\overrightarrow{OX})\perp\pi$ mit $\bar{x}=\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OX}^n=\overrightarrow{OA}.(\overrightarrow{OX}+(\overrightarrow{OX}^n-\overrightarrow{OX}))=\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OX}$ und analog $\bar{y}=\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OX}$ die ebenen Koordinaten $(\bar{x},\bar{y})$ des Normalrisses X^n. Setzen wir noch die räumlichen Koordinaten (x,y,z) von X ein, so liefert die Berechnung dieser inneren Produkte die Abbildungsgleichungen

$$(2) \qquad \bar{x} = a_1x+a_2y+a_3z \qquad \bar{y} = b_1x+b_2y+b_3z.$$

Mit den räumlichen Koordinaten der Punkte A und B sind also die Abbildungsgleichungen in einfachster Weise mitbestimmt.

Durch Vorgabe eines Sehstrahls ist eine Normalprojektion bis auf Parallelverschiebung der Bildebene völlig bestimmt. Diese elementare Angabe ist bloß in der Darstellenden Geometrie - etwa ausgehend von Grund- und Aufriß - nicht ohne größeren Aufwand zu lösen (z.B. zwei Seitenrisse). Wenn es daher nur darum geht, anschauliche Bilder eines Objekts zu zeichnen,

[1] Alle verwendeten Koordinatensysteme sind kartesisch und haben kongruente Einheitsstrecken. Das (x,y,z)-System sei ein Rechtssystem.

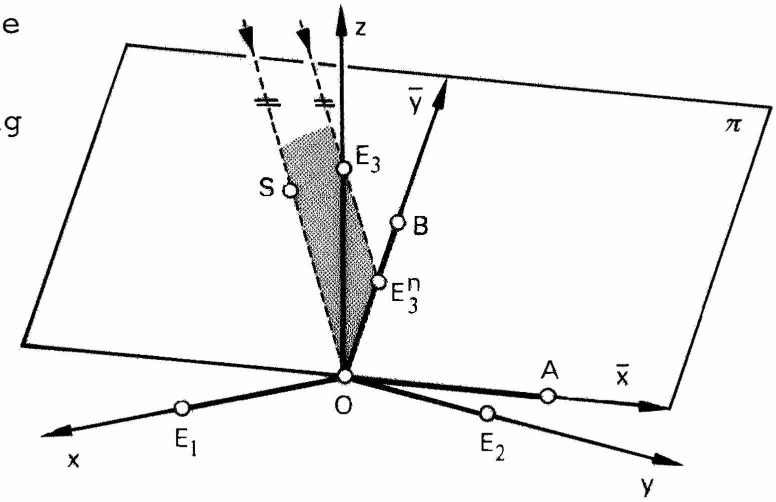
dessen Hauptrisse unanschaulich wirken, so werden in der Darstellenden Geometrie normalaxonometrische Methoden bevorzugt. Betrachten wir aber nun die Situation im rechnergestützten Konstruieren.

Sei OS eine Sehgerade, die wir uns "von S nach O" orientiert denken. (Wir setzen das räumliche Koordinatensystem fest gewählt voraus.) Die Bildebene π legen wir wieder durch O; in dieser müssen nur noch die Einheitspunkte A,B des ebenen Koordinatensystems durch ihre räumlichen Koordinaten (a_1,a_2,a_3) bzw. (b_1,b_2,b_3) "zweckmäßig" festgelegt werden.

Schließen wir zunächst den Sonderfall einer projizierenden z-Achse aus. Hat S die Koordinaten (s_1,s_2,s_3), so gilt

$$k := \sqrt{s_1^2+s_2^2} > 0 \qquad l := \sqrt{s_1^2+s_2^2+s_3^2} > 0$$

Der Normalriß der orientierten z-Achse sei als orientierte $\bar{y}$-Achse gewählt. Dann ist die $\bar{x}$-Achse bereits eindeutig bestimmt, wenn wir verlangen, daß das $(\bar{x},\bar{y})$-Koordinatensystem aus S als ebenes Rechtssystem erscheint.



Wegen $\bar{x}\perp z$ folgt $a_3=0$ und $\overrightarrow{OE_3^n}$ gleich orientiert zu $\overrightarrow{OB}$ zeigt $b_3>0$. Weiter liefert $\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OS}$ dann (a_1,a_2,a_3) proportional zu

(3) $$(-s_2,s_1,0).$$

Da die Punkte O,B,S,E_3 komplanar liegen, gilt

$$(b_1,b_2,b_3) = u(s_1,s_2,s_3) + v(0,0,1),\ \text{für } u,v\in\mathbb{R}.$$

Mit $\overrightarrow{OS}\perp\overrightarrow{OB}$ folgt $ul^2+vs_3=0$, also $u:v=-s_3:l^2$. Das Tripel (b_1,b_2,b_3) ist damit proportional zu

(4) $$(-s_1s_3,-s_2s_3,k^2).$$

Da $\overrightarrow{OA}$ und $\overrightarrow{OB}$ je die Länge 1 haben, folgt aus (3) und (4)

(5) $$\begin{array}{lll} a_1 = -s_2/k & a_2 = s_1/k & a_3 = 0 \\ b_1 = -s_1s_3/kl & b_2 = -s_2s_3/kl & b_3 = k/l; \end{array}$$

wegen $\det(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OS})=l>0$ ist die $\bar{x}$-Achse schon richtig orientiert[2].

Im Sonderfall einer projizierenden z-Achse gilt $0=s_1=s_2\neq s_3$. Bei $s_3>0$ bietet sich $A=E_1$, $B=E_2$ an (Grundriß), für $s_3<0$ kann etwa $A=E_1$, $B(0,-1,0)$ gewählt werden.

Die Formeln (5) vereinfachen sich für $\overline{OS}=l=1$. Wer seinen Schülerinnen und Schülern Kugelkoordinaten (φ,ψ) zumuten will, kann dann $s_1=\cos\varphi\cos\psi$,

[2] Die drei Vektoren müssen ein Rechtssystem bilden.

$s_2=\sin\varphi\cos\psi$ und $s_3=\sin\psi$ setzen, mit $0 \le \varphi < 2\pi$, $-\pi/2 \le \psi \le \pi/2$. Damit folgt

$$\begin{array}{lll} a_1 = -\sin\varphi & a_2 = \cos\varphi & a_3 = 0 \\ b_1 = -\cos\varphi\sin\psi & b_2 = -\sin\varphi\sin\psi & b_3 = \cos\psi. \end{array}$$

3. Betrachten wir mit den Bezeichnungen aus 2 eine *Parallelprojektion* $X \mapsto X^p$ auf die Ebene π in Richtung einer Geraden OS, die nicht notwendig zu π normal steht. Diese hat dann Abbildungsgleichungen der Form

$$\bar{x} = c_1x+c_2y+c_3z \qquad \bar{y} = d_1x+d_2y+d_3z. \tag{6}$$

Wir fassen (c_1,c_2,c_3) und (d_1,d_2,d_3) als räumliche Koordinaten von Punkten C bzw. D auf. Die Vektoren $\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OD}$ sind dann linear unabhängig, denn sonst wären alle Bildpunkte der Parallelprojektion kollinear (die Koeffizientenmatrix in (6) hat den Rang 2). Die Abbildungsgleichungen (6) erhalten dann die Form

$$\bar{x} = \overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OX} \qquad \bar{y} = \overrightarrow{OD}.\overrightarrow{OX}. \tag{7}$$

Da S^p die Koordinaten (0,0) hat folgt $\overrightarrow{OC} \perp \overrightarrow{OS}$ und $\overrightarrow{OD} \perp \overrightarrow{OS}$, d.h. die Ebene OCD steht normal zur Blickrichtung[3].

Setzen wir nun voraus, daß für die Zahlen $c_1,\ldots,d_3$ die Bedingungen

$$c_1^2+c_2^2+c_3^2 = d_1^2+d_2^2+d_3^2 = 1 \qquad c_1d_1+c_2d_2+c_3d_3 = 0 \tag{8}$$

gelten. Dann liegt eine Normalprojektion vor[4]. Wir müssen (8) nur doppelt interpretieren: Im Raum bedeutet (8), daß das Dreieck (O,C,D) rechtwinkelig-gleichschenkelig mit Kathetenlänge 1 ist. In der Bildebene gilt aber dasselbe für $(O=O^p, C^p, D^p)$, denn (6) und (8) zeigen, daß C^p bzw. D^p die Koordinaten (1,0) bzw. (0,1) haben. Da OCD zur Blickrichtung normal ist, folgt $C=C^p$, $D=D^p$, also $\pi=OCD \perp OS$.

Für eine beliebige Parallelprojektion läßt sich noch ableiten, daß A und C bzw. B und D je einer zu π normalen Geraden angehören: Wir müssen nur in (7) für X die Punkte A bzw. B einsetzen, deren $(\bar{x},\bar{y})$-Koordinaten ja (1,0) bzw. (0,1) sind. Was wir hier verwenden sind einfache Ergebnisse über adjungierte Endomorphismen euklidischer Vektorräume: Zur Projektion (6) gehört die adjungierte Abbildung $x=c_1\bar{x}+d_1\bar{y}$, $y=c_2\bar{x}+d_2\bar{y}$, $z=c_3\bar{x}+d_3\bar{y}$ (transponierte Koeffizientenmatrix) und C,D sind die Bilder von A,B unter dieser adjungierten Abbildung.

Fassen wir nun $\bar{x}$ und $\bar{y}$ als kartesische Koordinaten in einer Zeichenebene ζ auf (Koordinatenursprung $\bar{O}$, Einheitspunkte $\bar{A},\bar{B}$). Jede *axonometrische Abbildung* $(X \mapsto X^p)$ des Raumes auf die Zeichenebene ζ besitzt dann Abbildungsgleichungen der Form (6), falls $O^p=\bar{O}$ erfüllt ist. Dabei hat E_1^p die Koordinaten (c_1,d_1) usw. Die Bedingungen

$$c_1^2+c_2^2+c_3^2 = d_1^2+d_2^2+d_3^2 = m^2 \ (m>0), \quad c_1d_1+c_2d_2+c_3d_3 = 0 \tag{9}$$

---

[3] Es läßt sich daher bei bekannten Abbildungsgleichungen über das äußere Produkt $\overrightarrow{OC}\times\overrightarrow{OD}$ ein "Sehvektor" bestimmen.

[4] Aus den Formeln (8) folgt $(c_1+d_1)^2+(c_2+d_2)^2+(c_3+d_3)^2=2$. Das ist der bekannte Satz, daß bei Normalprojektion die Quadratsumme der Verzerrungen in den drei Koordinatenachsen gleich zwei ist.

sind notwendig und hinreichend dafür, daß sich die gegebene axonometrische Abbildung in eine Normalprojektion auf eine Ebene π und eine Ähnlichkeit $\pi \to \zeta$ faktorisieren läßt. Für $m=1$ folgt das leicht aus den bisherigen Ergebnissen, bei $m \neq 1$ ist noch der Ähnlichkeitsfaktor m zu berücksichtigen. Damit haben wir eine elementare Kennzeichnung normalaxonometrischer Angaben. Vgl. dazu auch [5,S.180].

4. Die Bedingungen (9) gestatten es etwa, die von P.Paukowitsch in [6] vorgeschlagene normalaxonometrische Angabe rein rechnerisch zu behandeln: Geben wir die Punkte $O^n=\bar{O}$, E_1^n (c_1,d_1) und E_2^n (c_2,d_2) als Dreieck[5] in der Zeichenebene ζ vor, so hat der noch nicht bekannte Riß des Punktes E_3 Koordinaten $\bar{x}=c_3$, $\bar{y}=d_3$. Nach (9) folgt

$$(10) \qquad c_1^2+c_2^2+\bar{x}^2 = d_1^2+d_2^2+\bar{y}^2 \qquad c_1d_1+c_2d_2+\bar{x}\bar{y} = 0,$$

bzw. $\bar{x}^2=u+\bar{y}^2$ mit $u:=d_1^2-c_1^2+d_2^2-c_2^2$ und $(\bar{x}\bar{y})^2=v^2$ mit $v:=c_1d_1+c_2d_2$. Einsetzen liefert $\bar{y}^4+u\bar{y}^2=v^2$, also

$$(11) \qquad \bar{y}^2 = -u/2+\sqrt{(u/2)^2+v^2},$$

denn nur ein "+" vor der Wurzel liefert keine negative Lösung. Mit $\bar{y}^2$ ist daher $\bar{y}$ zweideutig bestimmt. Sei etwa $\bar{y}=d_3\geq 0$. Analog folgt

$$(12) \qquad \bar{x}^2 = u+\bar{y}^2 = u/2+\sqrt{(u/2)^2+v^2},$$

also $|\bar{x}|$. Das Signum von $\bar{x}=d_3$ ist aus (10) zu ermitteln: Genau bei $v>0$ ist $\bar{x}$ negativ. Die Ermittlung des Ähnlichkeitsfaktors m ist trivial.

Weitere Formeln zu Normalprojektion und normaler Axonometrie finden sich in der angegebenen Literatur.

Literatur:

[1] Brauner, H.: Lehrbuch der Konstruktiven Geometrie, Wien-New York: Springer 1986 (S.60ff).

[2] Gläser G.: Axonometrie und Perspektive mit programmierbaren Taschenrechnern, IBDG Jg.3 Heft 1 (1984), S.29-33.

[3] Gläser G.: 3-D-Programmierung mit Basic, Wien: HPT 1986 (S.15ff).

[4] Kastenberger, A.: Schrägrißkonstruktionen mit dem Computer, IBDG Jg.5 Heft 1 (1986), S.27-30.

[5] Müller, E. und E.Kruppa: Vorlesungen über Darstellende Geometrie, Bd.I: Die linearen Abbildungen, Leipzig-Wien: Deuticke 1923 (S.180f).

[6] Paukowitsch, P.: Darstellende Geometrie - Grundlage zur Herstellung intelligenter Produkte für die Informatik (Teil I), IBDG Jg.5 Heft 1 (1986), S.18-22.

[7] Stachel, H.: Geometrie für Elektrotechnik - Arbeitsskriptum (S.170ff).

[8] Stiefel,E.: Lehrbuch der Darstellenden Geometrie, Basel: Birkhäuser 1947 (S.41ff).

[9] Wunderlich, W.: Darstellende Geometrie II, Mannheim: BI 1967 (S.98ff).

---

[5] Die Formeln (11) und (12) gelten auch noch, wenn die drei Angabepunkte kollinear liegen, jedoch höchstens zwei dieser drei Punkte zusammenfallen.