# Normisomorphismen und Normkurven endlichdimensionaler projektiver Desargues-Räume

Von

Hans Havlicek, Wien

Herrn emer.O.Univ.Prof.Dr.J.KRAMES zum 85. Geburtstag gewidmet.

Normal Isomorphisms and Normal Curves in finite-dimensional Desarguesian Projective Spaces. Abstract. In a finite dimensional desarguesian projective space the set of all points of intersection of homologous lines of two projective bundles of lines is called a non-degenerated (n.d.) normal curve, if the projective isomorphism is non-degenerated. Every frame determines a n.d. projective isomorphism of two bundles of lines called a normal isomorphism; every n.d. normal isomorphism of two bundles of lines is a normal isomorphism. A definition of osculating subspaces of a normal isomorphism is given and we show how the osculating subspaces can be constructed by using linear mappings. Simple examples show that there may be collineations fixing a n.d. normal curve but not fixing the osculating subspaces of the associated normal isomorphism. The set of osculating hyperplanes of a normal isomorphism is a n.d. normal curve in the dual space if and only if a certain number-theoretical condition holds.

## 1. Einleitung

Es gibt zahlreiche Möglichkeiten zur Definition von Normkurven endlichdimensionaler reeller projektiver Räume, z.B. [2,S.318], [5,S.166], [9], [17,S.894]. In jedem Punkt einer reellen Normkurve existieren Schmiegunterräume, welche allein durch die Punktmenge der Normkurve bestimmt sind.

R.RIESINGER [13] definiert nicht entartete (n.e.) Normkurven[1] endlichdimensionaler projektiver Desargues-Räume als Erzeugnis eines nicht entarteten projektiven Bündelisomorphismus und verallgemeinert damit die von E.BERZ [3] betrachteten n.e. Steiner-Kegelschnitte. (Weitere verwandte Literatur [1], [8,S.31], [14], [15], [16,S.306].) Zur Definition der Schmiegunterräume einer n.e. Normkurve wird in [13] benützt, daß die Identität stets die einzige

---

[1] Die rellen Normkurven sind n.e. Normkurven im Sinne dieser Definition.

Kollineation sei, welche alle Punkte einer n.e. Normkurve fest läßt. Diese Aussage ist aber nicht richtig; als Gegenbeispiele betrachten wir n.e. Normkurven (Kubiken) dreidimensionaler endlicher projektiver Räume der Ordnung N = 2,3,4. Eine Kubik ist für N = 2 ein Dreieck, für N = 3 ein Tetraeder bzw. für N = 4 eine Fundamentalmenge und es gibt dann eine nichttriviale Elation, eine harmonische Homologie bzw. eine nichtprojektive Kollineation, welche alle Punkte der Kubik als Fixpunkte besitzt.

In Verallgemeinerung der Kegelschnittdefinition nach W.KRÜGER [12] ordnen wir jeder geordneten Fundamentalmenge einen Normisomorphismus genannten n.e. projektiven Bündelsiomorphismus zu und zeigen, daß jeder n.e. projektive Bündelisomorphismus ein Normisomorphismus ist. In jedem Punkt des Erzeugnisses eines Normisomorphismus werden Schmiegunterräume des Normisomorphismus definiert; die Menge aller Schmiegunterräume führt zum Begriff des vollständigen Erzeugnisses. Die obigen Beispiele zeigen dann die Existenz nichttrivialer Kollineationen, die das Erzeugnis, nicht jedoch das vollständige Erzeugnis, eines Normisomorphismus festlassen; es ist daher nicht stets sinnvoll die Schmiegunterräume eines Normisomorphismus als Schmiegunterräume der assoziierten n.e. Normkurve zu bezeichnen. Besitzen zwei Normisomorphismen dasselbe vollständige Erzeugnis, was in reellen projektiven Räumen bereits aus der Gleichheit der Erzeugnisse folgt, so sprechen wir von assoziierten Normisomorphismen. Neben der Klassifikation assoziierter Normisomorphismen geben wir eine einfache Konstruktionsvorschrift für die Schmiegunterräume eines Normisomorphismus unter Benützung linearer Abbildungen.

## 2. Normisomorphismen

2.1. Im folgenden setzen wir einen n-dimensionalen ($2 \leq n < \infty$) projektiven Desargues-Raum $\Pi = (P,G)$ voraus. (Wir verwenden weitestgehend die Notation aus [7], [8].) Die Menge aller Unterräume von $\Pi$ bildet den Unterraumverband $(u\Pi, \vee, \cap)$. Jeder Unterraum $P_1 \in u\Pi$ definiert einerseits den Unterverband $u\Pi(P_1)$ aller Unterräume von $\Pi$, die in $P_1$ enthalten sind und andererseits den Unterverband $u\Pi/P_1$ aller Unterräume von $\Pi$, in denen $P_1$ enthalten ist. Die Verbände $u\Pi/P_1$ und $u\Pi(\bar{P}_1)$ sind isomorph, falls $P_1$ und $\bar{P}_1$ komplementäre

Unterräume sind. Ist P ein Punkt, so nennen wir $u\Pi/P$ das Bündel um P. (Wir unterscheiden nicht zwischen einem Punkt P und dem Unterraum $\{P\}$.)

2.2. Jede geordnete Fundamentalmenge $F = \{P_0,\ldots,P_n,E\}$ von $\Pi$ legt projektive Isomorphismen $\varphi_j: u\Pi/P_j \to u\Pi/P_{j+1}$ $(j=0,\ldots,n-1)$ fest, die durch $M \mapsto (M\cap(P_0\vee\ldots\vee P_{j-1}\vee P_{j+2}\vee\ldots\vee P_n\vee E))\vee P_{j+1}$ für alle $M\in u\Pi/P_j$ definiert sind. Dann heißt das Produkt $\varphi := \varphi_0\cdots\varphi_{n-1}$ der durch F bestimmte Normisomorphismus $u\Pi/P_0 \to u\Pi/P_n$. Jede der Abbildungen $\varphi_j$ kann zu genau einer involutorischen perspektiven Kollineation $\gamma_j: u\Pi \to u\Pi$ fortgesetzt werden; je nachdem $\Pi$ fanosch ist oder nicht, liegt eine Homologie oder Elation vor. Das Produkt $\gamma :=$ $:= \gamma_0\cdots\gamma_{n-1}$ setzt $\varphi$ fort und leistet $P_0 \mapsto P_n$, $P_i \mapsto P_{i-1}$ $(i=1,\ldots,n)$, $E \mapsto E$. Anwendung des Verkürzungssatzes [8,S.144] lehrt, daß $\gamma|u\Pi(P_0E): u\Pi(P_0E) \to u\Pi(P_0E)$ eine Perspektivität ist. Neuerliche Anwendung des Verkürzungssatzes liefert die Perspektivität $\gamma^n|u\Pi(P_0E): u\Pi(P_0E) \to u\Pi(P_1E)$, so daß $\gamma^{n+1}|u\Pi(P_0E)$ Produkt von zwei Perspektivitäten ist und $P_0$, $E$, $P_0E\cap(P_1\vee\ldots\vee P_n)$ als Fixpunkte besitzt. Nach [4,S.45] ist $\gamma^{n+1}|u\Pi(P_0E)$ die Identität und wegen $P_i \mapsto P_i$ $(i=0,\ldots,n)$ folgt sogar $\gamma^{n+1} = id_{u\Pi}$ [8,S.155]. Die Kollineation $\gamma$ hat als Element der projektiven Gruppe $PGL(\Pi)$ die Ordnung $n+1$. Wir nennen $\gamma$ die durch F bestimmte zyklische projektive Kollineation.

Da die projektive Gruppe transitiv auf der Menge der geordneten Fundamentalmengen operiert, existiert im Sinne dieser Gruppe genau ein Normisomorphismus.

2.3. Ein projektiver Isomorphismus $\zeta: u\Pi/P \to u\Pi/Q$ des Bündels um den Punkt P auf das Bündel um den Punkt $Q \neq P$ heißt nach [13] nicht entartet (n.e.), wenn aus $M\in u\Pi/P$ und $M\zeta = M$ stets $M = P$ folgt. Unter einer Sehne von $\zeta$ verstehen wir jede Hyperebene von $\Pi$ sowie jeden k-dimensionalen Unterraum M, der eine Darstellung der Gestalt $M = L\cap L\zeta$ mit $L\in u\Pi/P$ und $1 \leq \dim\Pi(L) = k+1$ gestattet. Die Menge $\Gamma$ aller einpunktigen Sehnen von $\zeta$ ist wegen $P,Q\in\Gamma$ nicht leer und heißt das Erzeugnis von $\zeta$. Die Sehnen $S_P^{(k)}$ von $\zeta$ $(k=0,\ldots,n-1)$, welche durch $S_P^{(0)} := P$ und $S_P^{(k)} := (S_P^{(k-1)}\vee Q)\zeta^{-1}$ $(k=1,\ldots,n-1)$ erklärt sind, werden als k-Schmiegunterräume von $\zeta$ in P definiert. (Vgl. [13].) Die k-Schmiegunterräume von $\zeta^{-1}$ in Q werden als k-Schmiegunterräume von $\zeta$ in $Q$ bezeichnet. Ein 1-Schmiegunterraum bzw. ein $(n-1)$-Schmiegunterraum heißt auch Tangente bzw. Schmieghyperebene. Die Schmieghyperebenen von $\zeta$ in $P$ bzw. $Q$ enthalten außer $P$ bzw. $Q$ keinen Punkt des Erzeugnisses $\Gamma$ [13].

Jede geradlinige Sehne $m = L \cap L\zeta$ von $\zeta$ durch $P$ $(\dim \Pi(L) = 2)$ schneidet ihre Bildgerade $m\zeta \neq m$, da beide Geraden der Ebene $L\zeta$ angehören. Die Einschränkung $\zeta|(u\Pi/m): u\Pi/m \to u\Pi/m\zeta$ ist ein n.e. projektiver Bündelisomorphismus in $u\Pi/(m \cap m\zeta)$.

2.4. Im Sinne der projektiven Gruppe gibt es genau einen n.e. projektiven Bündelisomorphismus. Dies lehrt

Satz 1. Jeder n.e. projektive Bündelisomorphismus $\zeta: u\Pi/P \to u\Pi/Q$ ist ein Normisomorphismus $\varphi$, der durch eine geordnete Fundamentalmenge $F = \{P_0, \ldots, P_n, E\}$ bestimmt wird.

Beweis. (1) Falls ein Normisomorphismus $\varphi$ existiert, der das Gewünschte leistet, so folgt notwendig $P_0 = P$, $P_n = Q$, und $E$ gehört dem Erzeugnis $\Gamma$ von $\zeta = \varphi$ an. Wir beweisen Satz 1 durch Induktion nach $n = \dim \Pi$.

(2) Für $n = 2$ ist ein n.e. projektiver Bündelisomorphismus eine n.e. Projektivität und läßt sich nach [12] stets so in ein Produkt von Perspektivitäten faktorisieren, daß $\zeta$ Normisomorphismus eines geordneten Vierecks $\{P_0, \ldots, P_3, E\}$ ist.

(3) Für $n \geqq 3$ ist $u\Pi/P$ isomorph zum Unterraumverband eines $(n-1)$-dimensionalen Desargues-Raumes und es existiert in $u\Pi/P$ eine geordnete Fundamentalmenge $\bar{F}$ so, daß $\zeta|(u\Pi/S_P^{(1)})$ mit dem durch $\bar{F}$ bestimmten Normisomorphismus $\bar{\varphi}$ übereinstimmt. Wir können $\bar{F} = \{P_0P_1, \ldots, P_0P_n, P_0\bar{E}\}$ mit $P_0 = P$, und $P_j, \bar{E} \subset S_Q^{(n-1)}$ $(j=1,\ldots,n)$ voraussetzen; dann gilt $P_0P_1 = S_P^{(1)}$, $P_n = Q$. Da nach (1) die Gerade $P_0\bar{E}$ dem Erzeugnis von $\zeta|(u\Pi/S_P^{(1)})$ angehört, existiert eine Ebene $L \supset S_P^{(1)}$ mit $L \cap L\zeta = P_0\bar{E}$. Die Geraden $P_0\bar{E} \neq S_P^{(1)}$ und $(P_0\bar{E})\zeta \neq P_0P_n$ liegen in $L\zeta$ und haben daher eine Punkt $E$ des Erzeugnisses von $\zeta$ gemeinsam. Dann ist $F := \{P_0, \ldots, P_n, E\}$ eine geordnete Fundamentalmenge von $\Pi$, da $E$ nicht in der Schmieghyperebene von $\zeta$ in $Q$ liegen kann. Der durch $F$ festgelegte Normisomorphismus $\varphi: u\Pi/P_0 \to u\Pi/P_n$ stimmt auf $u\Pi/S_P^{(1)}$ mit $\bar{\varphi} = \zeta|(u\Pi/S_P^{(1)})$ überein. Ferner gilt nach Konstruktion $(PE)\zeta = (PE)\varphi$ sowie $(PQ)\zeta = ((S_P^{(1)} \vee Q) \cap S_Q^{(n-1)}\zeta^{-1})\zeta =$

$= (S_P^{(1)} \vee Q)\bar{\varphi} \cap S_Q^{(n-1)} = (P_0 \vee P_n \vee P_{n-1}) \cap S_Q^{(n-1)} = P_n \vee P_{n-1} = (PQ)\varphi$.
Nach [8,S.126] folgt $\zeta = \varphi$. □

Aus dem obigen Beweis erkennen wir, daß jeder Normisomorphsimus $\varphi$ nicht entartet ist. Die Schmiegunterräume von $\zeta = \varphi$ erfüllen

$$S_{P_0}^{(k)} = P_0 \vee \ldots \vee P_k,\ S_{P_n}^{(k)} = P_n \vee \ldots \vee P_{n-k}\ (k=0,\ldots,n-1). \qquad (2.1)$$

In Anlehnung an [13] nennen wir die geordnete Basis $\{P_0,\ldots,P_n\}$ die Schmiegbasis von $\zeta = \varphi$.

2.5 Zur weiteren Diskussion n.e. projektiver Bündelisomorphismen genügt es Normisomorphismen $\varphi$ zu betrachten, die durch eine geordnete Fundamentalmenge $F = \{P_0,\ldots,P_n,E\}$ festgelegt werden.

Satz 2. Jede Hyperebene H durch den Schmiegunterraum $S_P^{(n-2)}$ des Normisomorphismus $\varphi$ enthält für $H \neq S_P^{(n-1)}$ genau einen von $P_0$ verschiedenen Punkt X des Erzeugnisses $\Gamma$ von $\varphi$ und für $H = S_P^{(n-1)}$ genau den Punkt $X = P_0$ des Erzeugnisses $\Gamma$ von $\varphi$. Die durch F bestimmte zyklische projektive Kollineation $\gamma$ leistet $X = H \cap H\gamma \cap \ldots \cap$ $\cap H\gamma^{n-1}$.

Beweis. Wir benützen Induktion nach $n = \dim \Pi$.

(1) Der Satz gilt trivialerweise in projektiven Desargues-Ebenen.

(2) Für $n \geqq 3$ betrachten wir analog zum Beweis von Satz 1 den Normisomorphismus $\varphi|(u\Pi/P_0P_1) =: \bar{\varphi}: u\Pi/P_0P_1 \to u\Pi/P_0P_n$ in $u\Pi/P_0$ zur geordneten Fundamentalmenge $\bar{F} := \{P_0P_1,\ldots,P_0P_n,P_0E\}$. Damit ist $P_0 \vee \ldots \vee P_{n-2}$ sowohl (n-2)-Schmiegunterraum von $\varphi$ in $P_0$ als auch (n-3)-Schmiegunterraum von $\bar{\varphi}$ in $P_0P_1$. Für die Hyperebenen $P_0 \vee \ldots \vee$ $\vee P_{n-2} \vee P_{n-1}$ und $P_0 \vee \ldots \vee P_{n-2} \vee P_n$ folgt die Behauptung mit (2.1); jede davon verschiedene Hyperebene $H \supset P_0 \vee \ldots \vee P_{n-2}$ enthält nach Induktionsannahme genau eine Gerade x des Erzeugnisses $\bar{\Gamma}$ von $\bar{\varphi}$ und $X := x \cap x\varphi$ ist der einzige von $P_0$ verschiedene Punkt aus $\Gamma \cap H$. Wegen $(XP_0)\gamma =$ $= XP_n$ gilt $X \subset (X \vee P_0 \vee \ldots \vee P_{n-2}) \cap (X \vee P_n \vee P_0 \vee \ldots \vee P_{n-3}) \cap \ldots \cap (X \vee P_n \vee \ldots \vee P_2) =$ $= H \cap H\gamma \cap \ldots \cap H\gamma^{n-1}$. Dieser Durchschnitt ist einpunktig, da $\{P_0,\ldots P_n\}$ Basis von $\Pi$ ist. □

Die Punktmenge $\Gamma$ gestattet nach Satz 2 eine Erzeugung mittels n projektiv gekoppelter Hyperebenenbüschel. Vgl. [2,S.323].

2.6. Nach 2.3 sind in den Punkten $P_0$ und $P_n$ Schmiegunterräume des Normisomorphismus $\varphi$ definiert. Wir erklären nun in jedem Punkt $X \in \Gamma \setminus \{P_0,P_n\}$ k-Schmiegunterräume $S_X^{(k)}$ von $\varphi$ $(k=0,\ldots,n-1)$ durch

Rekursion.

Für $\dim\Pi = n = 2$ sei $S_X^{(0)} := X$; ferner übernehmen wir die Tangentendefinition für n.e. Kegelschnitte [3] und bezeichnen jene Gerade $S_X^{(1)} \supset X$ als 1-Schmiegunterraum (Tangente) von $\varphi$ in X, welche durch die harmonische Lage $H(P_0X, P_2X; P_1X, S_X^{(1)})$ gekennzeichnet ist. Dann sind alle k-Schmiegunterräume (k=0,1) Sehnen von $\varphi$, und es gilt $S_Y^{(0)} \subset S_Y^{(1)}$, $\dim\Pi(S_Y^{(k)}) = k$ für alle $Y \in \Gamma$.

Wir nehmen an, daß für Normisomorphismen $\bar\varphi$ in $\bar n$-dimensionalen projektiven Desargues-Räumen $(2 \leq \bar n < n)$ in jedem Punkt $\bar Y$ des Erzeugnisses von $\bar\varphi$ eine Sehne von $\bar\varphi$ als k-Schmiegunterraum (k= =0,...,n-1) definiert ist, wobei $\bar Y = \bar S_{\bar Y}^{(0)} \subset \ldots \subset \bar S_{\bar Y}^{(n-1)}$, $\dim\bar\Pi(\bar S_{\bar Y}^{(k)}) = k$ gilt. Dann sind $\varphi|(u\Pi/P_0P_1) =: \bar\varphi_0$ bzw. $\varphi|(u\Pi/P_0P_n) =: \bar\varphi_n$ bzw. $\varphi|(u\Pi/P_0X) =: \bar\varphi_X$ Normisomorphismen in $u\Pi/P_0$ bzw. in $u\Pi/P_n$ bzw. in $u\Pi/X$, so daß für diese Abbildungen k-Schmiegunterräume (k=0,...,n-2) erklärt sind. In $u\Pi/P_0$ gehört $P_0X$ zum Erzeugnis von $\bar\varphi_0$ und $\bar\varphi_0$ besitzt in $P_0X$ eine Sehne $M = L \cap L\bar\varphi_0$ als 1-Schmiegunterraum; in $\Pi$ gilt dabei $\dim\Pi(M) = 2$, $\dim\Pi(L) = 3$. Der Unterraum $P_nX = (P_0X)\varphi$ ist Element des Erzeugnisses von $\bar\varphi_n$ und $\bar\varphi_n$ besitzt $M\varphi$ als 1-Schmiegunterraum in $P_nX$. Da M und $M\varphi$ verschiedene Ebenen von $L\varphi$ sind, existiert eine Schnittgerade $x = M \cap M\varphi$, welche dem Erzeugnis von $\bar\varphi_X$ angehört. Wir definieren als k-Schmiegunterräume $S_X^{(k)}$ (k=0,...,n-1) von $\varphi$ im Punkt X die (k-1)-Schmiegunterräume von $\bar\varphi_X$ $(k \geq 1)$ und $S_X^{(0)} := X$. Dann sind alle k-Schmiegunterräume von $\varphi$ (k=0,...,n-1) Sehnen von $\varphi$ und es gilt $Y = S_Y^{(0)} \subset \ldots \subset S_Y^{(n-1)}$, $\dim\Pi(S_Y^{(k)}) = k$ für alle $Y \in \Gamma$.

Die Menge $\Gamma^{(k)} := \{(S_Y^{(0)}, \ldots S_Y^{(k)}) \mid Y \in \Gamma\} \subset (u\Pi)^k$ (k=0,...,n-1) nennen wir Erzeugnis k-ter Stufe von $\varphi$, $\Gamma^{(n-1)}$ auch vollständiges Erzeugnis von $\varphi$.

2.7. Im folgenden setzen wir $\Pi = \Pi(V,K)$ als projektiven Raum über einem (n+1)-dimensionalen Rechtsvektorraum (V,K) mit (nicht notwendig kommutativem) Körper K voraus. Z(K) sei das Zentrum von K.

Ist $B = \{p_0, \ldots, p_n\}$ geordnete Basis von V, so ergibt $\{P_0 = p_0K, \ldots, P_n = p_nK, E = eK\}$ mit[2] $e = \sum_j p_j$ eine geordnete Fundamentalmenge F in

---

[2] Wenn nicht anders angegeben, laufen Summationszeiger von 0 bis n; obere Indizes sind zur Unterscheidung von Potenzen stets eingeklammert.

$\Pi(V)$, und jede Fundamentalmenge gestattet umgekehrt eine solche Darstellung; dabei definiert eine Basis $B' = \{p_0',\dots,p_n'\}$ genau dann dieselbe Fundamentalmenge wie B, falls ein $a \in K\setminus\{0\}$ existiert mit $p_j' = p_j a$ $(j=0,\dots,n)$. Die durch F bestimmte zyklische projektive Kollineation $\gamma$ wird durch jene Abbildung $g \in GL(V)$ induziert, welche $p_0 \mapsto p_n$, $p_j \mapsto p_{j-1}$ $(j=1,\dots,n)$ leistet. Die geordnete Basis B legt ferner die linearen Vektorraumendomorphismen $d^{(k)}$: $V \to V$ $(k=0,\dots,n)$ mit

$$\begin{aligned} p_j d^{(k)} &:= p_{j+k}\binom{j+k}{j} \qquad (j=0,\dots,n-k) \\ p_j d^{(k)} &:= o \qquad\qquad\quad (j=n-k+1,\dots,n) \end{aligned} \tag{2.2}$$

fest; sie gestatten folgende Beschreibung der Schmiegunterräume des Normisomorphismus $\varphi$, der (mittels F) durch die geordnete Basis B bestimmt ist.

Satz 3. Das Erzeugnis $\Gamma$ von $\varphi$ ist die Punktmenge $\{X_t = x_t K \mid x_t = \sum_j p_j t^j,\ t \in K\} \cup \{p_n K\}$. Der k-Schmiegunterraum von $\varphi$ $(k=0,\dots,n-1)$ im Punkt $X_t$ wird durch die Punkte $(x_t d^{(0)})K,\dots,(x_t d^{(k)})K$ aufgespannt.

Beweis. (1) Wir rechnen die Konstruktionsvorschrift für $\Gamma$ aus Satz 2 nach: Jede Hyperebene $H \neq P_0 \vee\dots\vee P_{n-2} \vee P_n$ durch $P_0 \vee\dots\vee P_{n-2}$ wird unter Benützung der zu B dualen Basis $B^* = \{p_0^*,\dots,p_n^*\}$ durch einen Kovektor $x^* = tp_{n-1}^* - p_n^*$ mit $t \in K$ beschrieben. Der Durchschnitt $H \cap H\gamma \cap \dots \cap H\gamma^{n-1}$ ist Lösungsraum des linearen homogenen Gleichungssystems $\langle tp_j^* - p_{j+1}^*, x\rangle = 0$ $(j=0,\dots,n-1)$, also der eindimensionale Unterraum $x_t K$ von V mit $x_t = \sum_j p_j t^j$.

(2) Im Punkt $P_0 = p_0 K$ ist die angegebene Beschreibung der k-Schmiegunterräume von $\varphi$ richtig.

(3) Für $\dim \Pi = 2$ und $x_t = \sum_j^2 p_j t^j$ $(t \in K\setminus\{0\})$ gilt $x_t d^{(1)} = p_1 + p_2 2t \neq o$. Mit $p_1 t = (p_1 t + p_2 t^2) - p_2 t^2$, $(x_t d^{(1)})t = (p_1 t + p_2 t^2) + p_2 t^2$ folgt die harmonische Lage $H(x_t K \vee p_0 K, x_t K \vee p_2 K; x_t K \vee p_1 K, x_t K \vee (x_t d^{(1)})K)$, so daß $(x_t d^{(1)})K$ Punkt der Tangente von $\varphi$ in $x_t K$ ist.

(4) Für $\dim \Pi = n$ nehmen wir die Gültigkeit von Satz 3 für Normisomorphismen $\bar{n}$-dimensionaler Desargues-Räume $(2 \leq \bar{n} < n)$ an. Die Abbildung $\varphi \mid (u\Pi/P_0 P_1) =: \bar{\varphi}$ ist Normisomorphismus in $u\Pi/P_0$ zur geordneten Basis $\{p_0 K + p_1,\dots,p_0 K + p_n\}$ des Quotientenraumes $V/p_0 K$. (Wir identifizieren $u\Pi/P_0$ mit $u\Pi(V/p_0 K)$.) Daher wird die Ebene $\bar{S}^{(1)}_{P_0 X_t}$ $(t \in K\setminus\{0\})$ durch die Punkte $P_0$, $P_0 X_t \cap S^{(n-1)}_{P_n} = (\sum_{j=1}^{n} p_j t^{j-1})K$ und

$(\sum_{j=2}^{n} p_j t^{j-2}(j-1))K$ aufgespannt. Wegen $\sum_{j=1}^{n} p_j t^{j-1} + (\sum_{j=2}^{n} p_j t^{j-2}(j-1))t = x_t d^{(1)}$ liegt der Punkt $(x_t d^{(1)})K$ in $\bar{S}^{(1)}_{P_0 X_t}$. Analog folgt $(x_t d^{(1)})K \subset \bar{\bar{S}}^{(1)}_{P_0 X_t}$, so daß die Tangente $S^{(1)}_{X_t}$ von $\varphi$ mit dem Schnitt dieser Ebenen übereinstimmt.

Der Normisomorphismus $\varphi|(u\Pi/P_0X_t)$ in $u\Pi/X_t$ und der durch die geordnete Basis $\tilde{B} := \{x_tK+\tilde{p}_j \mid \tilde{p}_j = \sum_{i=j+1}^{n} p_i t^{i-j-1},\ j=0,\dots,n-1\}$ von $V/x_tK$ festgelegte Normisomorphismus $\tilde{\varphi}$ sind identisch, da die von $g$, $\tilde{g}$ in $V/(p_0K+x_tK)$ induzierten Abbildungen auf der Basis $\{(p_0K+x_tK)+\tilde{p}_j \mid j=1,\dots,n\}$ von $V/(p_0K+x_tK)$ dasselbe leisten. Das Erzeugnis $\tilde{\Gamma}$ von $\tilde{\varphi}$ ist daher nach (1) die Menge $\{(x_tK+\tilde{y}_u)K \mid \tilde{y}_u = \sum_{j=0}^{n-1} \tilde{p}_j u^j,\ u\in K\} \cup \{(x_tK+\tilde{p}_{n-1})K\}$. (Jede Gerade $x_v = x_tK \vee x_vK$, $v\in K\setminus\{t\}$ gehört $\tilde{\Gamma}$ an; eine einfache Rechnung zeigt $x_v = (x_tK+\tilde{y}_u)K$ mit $u = (t-v)v(t-v)^{-1}$.) Es gilt weiters $(x_tK+\tilde{y}_u)\tilde{d}^{(k)} = x_tK + \sum_{j=0}^{n-1-k} \tilde{p}_{j+k}\binom{j+k}{j}u^j = x_tK + \sum_{j=0}^{n-1-k}(\sum_{i=j+k+1}^{n} p_i t^{i-j-k-1})\binom{j+k}{k}u^j = x_tK + \sum_{i=0}^{n-1-k} p_{i+k+1}(\sum_{j=0}^{i} t^{i-j}u^j\binom{j+k}{j})$ für alle $u\in K$, also insbesondere $(x_tK+\tilde{y}_t)\tilde{d}^{(k)} = x_tK+x_td^{(k+1)}$ wegen $\sum_{j=0}^{i}\binom{j+k}{j} = \binom{i+k+1}{k+1}$. Aus der Definition des $(k+1)$-Schmiegunterraumes von $\varphi$ in $X_t$ als $k$-Schmiegunterraum von $\tilde{\varphi}$ in $S^{(1)}_{X_t}$ folgt die Gültigkeit von Satz 4.□

Ist insbesondere $b\in Z(K)$, so folgt aus dem binomischen Lehrsatz $\sum_j p_j t^j = \sum_j p_j(\sum_{k=0}^{j} b^k(t-b)^{j-k}\binom{j}{k})$, also

$$x_t = \sum_{k=0}^{n} x_b d^{(k)}(t-b)^k \tag{2.3}$$

für alle $t\in K$.

Die Vektorraumendomorphismen $d^{(k)}$ induzieren lineare Abbildungen [6], [11] $\delta^{(k)}: u\Pi \to u\Pi$, die sich als Produkt einer Projektion auf einen Unterraum von $S^{(n-1)}_{P_0}$, der Kollineation $\gamma$ und einer perspektiv erzeugbaren Kollineation von $\Pi(S^{(n-1)}_{P_n})$ darstellen lassen.

2.8. Nach 2.6 stimmen die durch geordnete Basen $\{p_0,\dots,p_n\}$ und $\{p_0a,\dots,p_na\}$ von $V$ $(a\in K\setminus\{0\})$ festgelegten Normisomorphismen überein. Eine Klassifikation aller geordneten Basen von $V$ und damit aller geordneten Fundamentalmengen von $\Pi(V)$, welche denselben Normisomorphismus definieren, liefert

Satz 4. Die durch geordnete Basen $B = \{p_0,\dots,p_n\}$, $B' = \{p_0',\dots,p_n'\}$ von $V$ in $\Pi(V)$ bestimmten geordneten Fundamentalmengen legen genau dann denselben Normisomorphismus fest, falls Körperelemente $a \in K\setminus\{0\}$, $b \in Z(K)\setminus\{0\}$ mit $p_j' = p_j a b^j$ $(j=0,\dots,n)$ existieren.

Beweis. Stimmen die Normisomorphismen $\varphi, \varphi'$ zu den geordneten Basen B, B' überein, so folgt aus der Gleichheit der Schmiegunterräume von $\varphi=\varphi'$ mit (2.1) $p_j' = p_j x_j$, $x_j \in K\setminus\{0\}$. Weiters ist $\varphi=\varphi'$ äquivalent zu $\gamma\gamma'^{-1}|u\Pi(V_1) = id_{u\Pi(V_1)}$ mit $V_1 := [p_1,\dots,p_n]$, so daß der lineare Vektorraumautomorphismus $gg'^{-1}|V_1$ eine zentrale Dilatation $x \mapsto xb$ $(b \in Z(K)\setminus\{0\})$ von $V_1$ ist. Mit $x_0 =: a$ erhalten wir $p_j g g'^{-1} = p_j x_j x_{j-1}^{-1} = p_j b$, also $x_1 = ab$ und mit Induktion $x_j = ab^j$ für alle $j=0,\dots,n$. Umkehrung dieser Überlegungen bestätigt dann Satz 4.□

Der Punkt e'K mit $e' = \sum_j p_j' = \sum_j p_j a b^j$ gehört dem Erzeugnis $\Gamma$ von $\varphi$ an, und es gilt $e'K = x_b K$. Zusammen mit Satz 4 erkennen wir, daß eine geordnete Fundamentalmenge $\{p_0K,\dots,p_nK,\tilde{e}K\}$ genau für $\tilde{e} = x_{\tilde{b}}$ und $\tilde{b} \in Z(K)\setminus\{0\}$ den Normisomorphismus $\varphi$ festlegt, was eine geometrische Kennzeichnung der Menge $\{x_tK \mid t \in Z(K)\setminus\{0\}\}$ ergibt. Wir nennen die Elemente dieser Menge sowie $p_0K$ und $p_nK$ reguläre Punkte von $\Gamma$. Diese Definition ist sinnvoll, da in [13] unter Benützung eines algebraischen Satzes [10] gezeigt wird, daß jede Gerade durch einen regulären Punkt höchstens zwei Punkte von $\Gamma$ enthält und mindestens eine Gerade durch einen nicht regulären Punkt mit $\Gamma$ unendlich viele Punkte gemeinsam hat.

Die geordnete Basis B legt nach 2.6 eine geordnete Fundamentalmenge F von $\Pi(V)$ fest. Ein Punkt $X \in \Gamma$ ist genau dann regulär, falls X Fixpunkt jeder projektiven Kollineation von $\Pi$ ist, die F elementweise fest läßt. Vgl. Satz 6.

## 3. Assoziierte Normisomorphismen

3.1. Normisomorphismen $\varphi$ und $\varphi'$ zu geordneten Fundamentalmengen $F = \{P_0,\dots,P_n,E\}$ bzw. $F' = \{P_0',\dots,P_n',E'\}$ nennen wir assoziiert, wenn die vollständigen Erzeugnisse $\Gamma^{(n-1)}$ von $\varphi$ und $\Gamma'^{(n-1)}$ von $\varphi'$ übereinstimmen.

Unter Benützung der in 2.6 ausgesprochenen Schmiegunterraumdefinition folgt unmittelbar mit Induktion nach $\dim\Pi = n$, daß $\varphi$ stets zu $\varphi' = \varphi^{-1}$ assoziiert ist. Als weiteres Beispiel betrachten wir in $\Pi(V)$ den Normisomorphismus $\varphi$ zur geordneten Basis $B = \{p_0,\dots, p_n\}$ und $b \in Z(K)\setminus\{0\}$. Dann sind $\varphi$ und der Normisomorphismus $\varphi'$ zur geordneten Basis $\{p_j' = x_b d^{(j)} \mid j=0,\ldots,n\}$ assoziiert, da für alle $t \in K$ und $k=0,\ldots,n-1$ aus dem binomischen Lehrsatz $x_{b+t}d^{(k)} = x_t' d'^{(k)}$ folgt. (Für $k=0$ vgl. [13].)

3.2. Kopplung der Beispiele aus 3.1 zeigt die Existenz eines zu $\varphi$ assoziierten Normisomorphismus $\varphi'$ zu einer geordneten Fundamentalmenge $F' = \{P_0',\ldots,P_n',E'\}$ für je zwei reguläre Punkte $P_0'$, $P_n'$ des Erzeugnisses $\Gamma$ von $\varphi$. Die geordnete Basis $B' = \{P_0',\ldots,P_n'\}$ wird dabei durch die Schmiegunterräume von $\varphi$ in $P_0'$, $P_n'$ analog (2.1) festgelegt. Wir nennen $B'$ Schmiegbasis des vollständigen Erzeugnisses $\Gamma^{(n-1)}$ von $\varphi$ zu den regulären Punkten $P_0'$, $P_n'$ von $\Gamma$.

Satz 5. Ein Normisomorphismus $\varphi'$ zur geordneten Fundamentalmenge $F' = \{P_0',\ldots,P_n',E'\}$ ist genau dann zu $\varphi$ assoziiert, wenn $P_0'$, $P_n'$, $E'$ paarweise verschiedene reguläre Punkte des Erzeugnisses $\Gamma$ von $\varphi$ sind und $\{P_0',\ldots,P_n'\}$ Schmiegbasis von $\Gamma^{(n-1)}$ zu den Punkten $P_0'$, $P_n'$ ist.

Beweis. (1) Ist $\varphi'$ zu $\varphi$ assoziiert, so sind $P_0'$, $P_n'$, $E'$ reguläre Punkte des Erzeugnisses $\Gamma$ von $\varphi$, da die Regularität nach 2.8 allein eine Eigenschaft der Punktmenge $\Gamma' = \Gamma$ ist; $\{P_0',\ldots,P_n'\}$ ist Schmiegbasis von $\Gamma'^{(n-1)} = \Gamma^{(n-1)}$ zu den Punkten $P_0'$, $P_n'$.

(2) Erfüllt $F'$ die Voraussetzungen, so existiert nach 3.1 ein zu $\varphi$ assoziierter Normisomorphsimus $\varphi'$ zu einer geordneten Fundamentalmenge $\{P_0',\ldots,P_n',E''\}$, der gemäß Satz 4 auch durch $F'$ festgelegt wird. □

3.3. Der Normisomorphsimus $\varphi$ und ein Normisomorphismus $\varphi' := := \psi^{-1}\varphi\psi$ mit $\psi \in P\Gamma L(\Pi)$ sind genau für $\Gamma'^{(n-1)} = \Gamma^{(n-1)}\psi = \Gamma^{(n-1)}$ assoziiert. Zusammen mit den Sätzen 2, 4 und 5 folgt nun

Satz 6. Die Gruppe $G$ aller (projektiven) automorphen Kollineationen des vollständigen Erzeugnisses $\Gamma^{(n-1)}$ von $\varphi$ operiert dreifach transitiv auf der Menge der regulären Punkte von $\Gamma$; die (projektive) Stabilitätsuntergruppe der regulären Punkte $P_0$, $P_n$, $E$ von $\Gamma$ ist identisch mit der Gruppe der (projektiven) Kollineationen von $\Pi$, welche die geordnete Fundamentalmenge $F = \{P_0,\ldots,P_n,E\}$ punktweise fest lassen. Die Identität ist die einzige Kollineation aus $G$, welche alle Punkte von $\Gamma$ als Fixpunkte besitzt.

Über die Existenz nichttrivialer Kollineationen, die bloß $\Gamma$ punktweise fest lassen, kann keine allgemein gültige Aussage gemacht werden, worauf in der Einleitung schon hingewiesen wurde. Die in [13, S.442] angegebenen Kollineationen sind genau die Abbildungen der Gruppe $G$.

3.4. Im Dualraum $\Pi(V)^* = \Pi(V^*)$ von $\Pi(V)$ definiert die zu $B = \{p_0,\dots,p_n\}$ duale Basis $B^* = \{p_0^*,\dots,p_n^*\}$ einen Normisomorphismus $\varphi^*$ mit dem Erzeugnis $\Gamma^*$. Jeder Homomorphismus $h^*: V^* \to V^*$ induziert eine lineare Abbildung $\chi^*: u\Pi(V)^* \to u\Pi(V)^*$; vgl. 2.7. Die Annulatorabbildung $\lambda: u\Pi(V) \to u\Pi(V)^*$ wird durch das Verschwinden des Klammersymbols $\langle\,,\rangle: V^* \times V \to K$ beschrieben und ist ein Verbandsantiisomorphismus. Die Zusammensetzung $\chi^*\lambda^{-1}$ bildet jeden $(n-r-1)$-dimensionalen Unterraum von $\Pi(V)^*$ auf einen mindestens $r$-dimensionalen Unterraum von $\Pi(V)$ ab.

Die vollständigen Erzeugnisse von $\varphi$ und $\varphi^*$ sind wie folgt gekoppelt:

Satz 7. Der $k$-Schmiegunterraum von $\varphi$ $(k=0,\dots,n-1)$ im Punkt $x_tK$ $(t \in K)$ bzw. im Punkt $p_nK$ ist im Bild des $(n-k-1)$-Schmiegunterraumes von $\varphi^*$ im Punkt $Kx_t^*$ bzw. im Punkt $Kp_n^*$ unter der vom linearen Vektorraumendomorphismus $h^*: V^* \to V^*$ mit $p_j^* \to (-1)^j\binom{n}{j}p_{n-j}^*$ $(j=0,\dots,n)$ und der Annulatorabbildung $\lambda$ festgelegten linearen Abbildung $\chi^*\lambda^{-1}: u\Pi^* \to u\Pi$ enthalten.

Beweis. Nach (2.2) gilt $x_t d^{(k)} = \sum_{j=0}^{n-k} p_{j+k}\binom{j+k}{j}t^j = \sum_{i=k}^{n} p_i\binom{i}{k}t^{i-k}$ und $x_t^* d^{*(s)}h^* = \left(\sum_{r=0}^{n-s} t^r\binom{r+s}{r}p_{r+s}^*\right)h^* = \sum_{r=0}^{n-s} t^r\binom{r+s}{r}(-1)^{r+s}\binom{n}{r+s}p_{n-r-s}^* = \sum_{q=0}^{n-s} t^{n-s-q}\binom{n-q}{s}\binom{n}{n-q}(-1)^{n-q}p_q^*$ für alle $t \in K$, $k=0,\dots,n-1$, $s=0,\dots,n-1$. Ist zusätzlich $s \leq n-k-1$, so folgt $\langle x_t^* d^{*(s)}h^*, x_t d^{(k)}\rangle = t^{n-s-k}\sum_{q=k}^{n-s}(-1)^{n-q}\binom{q}{k}\binom{n-q}{s}\binom{n}{q} = t^{n-s-k}\left(\frac{n!}{s!k!}\sum_{p=0}^{n-s-k}\frac{(-1)^{n-p-k}}{p!(n-k-s-p)!}\right) = 0$. Das letzte Gleichheitszeichen kann dabei aus der reellen Potenzreihenentwicklung von $1 = e^x e^{-x}$ abgeleitet werden. In den Punkten $p_nK$ und $Kp_0^*$ ist der Satz trivialerweise richtig. $\square$

Wegen $x_t^*h^* \neq o$, $p_n^*h^* = p_n^*$ ist $\Gamma^*\chi^*\lambda^{-1}$ mit der Menge der Schmieghyperebenen von $\varphi$ identisch. Der Endomorphismus $h^*$ ist genau dann bijektiv, wenn keiner der Binomialkoeffizienten $\binom{n}{j}$ durch $\mathrm{Char}K \neq 0$ teilbar ist, oder $\mathrm{Char}K = 0$ gilt.

Für eine Bijektion $h^*$ sind die in Satz 7 beschriebenen Unterräume gleich, und die Annulatorabbildung koppelt die vollständigen Erzeugnisse von $\varphi$ und $\chi^{*-1}\varphi^*\chi^*$.

Ist $K$ insbesondere kommutativ, so existiert genau ein linearer Vektorraumantiisomorphismus ${}^ap: V \to V^*$ mit $p_j \mapsto p_j^*$ $(j=0,\dots,n)$ der eine projektive Korrelation $\pi: u\Pi \to u\Pi^*$ induziert. Die Korrelation $\pi\chi^*$ führt das vollständige Erzeugnis von $\varphi$ in das vollständige Erzeugnis von $\chi^{*^{-1}}\varphi^*\chi^*$ über. Da die Koordinatenmatrix von ${}^a ph^*$ bezüglich der Basen B, $B^*$ für $\mathrm{Dim}V \equiv 1 \bmod 2$ symmetrisch und nicht alternierend bzw. für $\mathrm{Dim}V \equiv 0 \bmod 2$ alternierend ist, liegt eine projektive Nichtnullpolarität bzw. eine Nullpolarität vor. Vgl. [5,S.169].

3.5. Das Doppelverhältnis von vier Punkten bzw. vier Hyperebenen ist eine Konjugiertenklasse eines zum Algebraisierungskörper von $\Pi$ isomorphen bzw. antiisomorphen Körpers K bzw. ${}^a K$. Gehört das Doppelverhältnis insbesondere dem Primkörper von K bzw. ${}^a K$ an, so ist es eine Eigenschaft der vier Elemente allein und invariant gegenüber Perspektivitäten.

Sei $\varphi$ Normisomorphismus zur geordneten Fundamentalmenge F = $= \{P_0,\dots,P_n,E\}$. Die Schmieghyperebene von $\varphi$ in einem regulären Punkt X des Erzeugnisses $\Gamma$ von $\varphi$ ist nach Satz 2 die einzige Hyperebene durch den (n-2)-Schmiegunterraum von $\varphi$ in X, welche genau einen Punkt von $\Gamma$ enthält. Ferner gilt

Satz 8. Ist $X \neq P_0, P_n$ ein Punkt des Erzeugnisses $\Gamma$ von $\varphi$, so gilt $DV(S_X^{(n-2)} \vee P_n, S_X^{(n-1)}, S_X^{(n-2)} \vee P_1, S_X^{(n-2)} \vee P_0) = (n-1)n^{-1}$ oder $DV(S_X^{(n-1)}, S_X^{(n-2)} \vee P_n, S_X^{(n-2)} \vee P_1, S_X^{(n-2)} \vee P_0) = n(n-1)^{-1}$.

Beweis. Wir können $\Pi = \Pi(V)$ voraussetzen; dann wird $S_X^{(n-1)}$ durch den Kovektor $\sum_j (-1)^{n-j}\binom{n}{j} t^{n-j} p_j^*$ $(t \in K \setminus \{0\})$ und $S_X^{(n-2)} \vee P_0$ als (n-2)-Schmiegunterraum des Normisomorphismus von $u\Pi/P_n$ zur geordneten Basis $\{p_nK+p_0,\dots,p_nK+p_{n-1}\}$ gemäß Satz 7 durch den Kovektor $\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^{n-1-j}\binom{n-1}{j} t^{n-1-j} p_j^*$ beschrieben. Diese Hyperebenen schneiden die Gerade $P_0P_1$ in den Punkten $(p_0n+p_1t)K$ bzw. $(p_0(n-1)+p_1t)K$, woraus die Behauptung folgt. □

In einer projektiven Desargues-Ebene gilt wegen $n-1 = 1 \neq 0$ stets $DV(S_X^{(1)}, X \vee P_2, X \vee P_1, X \vee P_0) = 2$ in Übereinstimmung mit der harmonischen Lage $H(X \vee P_0, X \vee P_2; X \vee P_1, S_X^{(1)})$.

Satz 8 zeigt ferner, daß die Schmieghyperebene von $\varphi$ in X durch das Erzeugnis (n-2)-ter Stufe von $\varphi$ mitbestimmt ist. Zwei Normisomorphismen sind daher bereits dann assoziiert, wenn ihre Erzeugnisse (n-2)-ter Stufe übereinstimmen.

3.6. Sei $\Pi(R^{n+1},R)$ ein reeller projektiver Raum und $\varphi$ Normisomorphismus zur kanonischen Basis von $R^{n+1}$. Dann ist die Abbildung $x:t \mapsto x_t$ ein analytischer Weg $R \to R^{n+1}$; für seine k-te Ableitung (k=0,...,n) gilt $\left(\frac{d^k x}{dt^k}\right)_{t_0} \cdot \frac{1}{k!} = (0,\ldots,0,\binom{k}{k},\binom{k+1}{k}t_0,\ldots,\binom{n}{k}t_0^{n-k}) = x_{t_0} d^{(k)}$. Damit geht (2.3) über in die Formel von Taylor, was unmittelbar zeigt, daß die Schmiegunterräume des Weges x genau die Schmiegunterräume des Normisomorphismus $\varphi$ sind.

Analoge Überlegungen gelten in beliebigen kommutativen Körpern der Charakteristik Null, wenn man die "Koordinatenpolynome" $t^j$ (j=0,...,n) formal differenziert. Über kommutativen Körpern mit Primzahlcharakteristik existieren aber stets Polynome, für die der Satz von Taylor falsch ist. Dann versagt die Beschreibung der Schmiegunterräume durch formale Differentiation.

## Literatur

[1] ARTZY, R.: The conic $y=x^2$ in Moufang planes. Aequationes Math. 6, 30-35 (1971).

[2] BERTINI, E.: Einführung in die projektive Geometrie mehrdimensionaler Räume. Wien: Seidel u. Sohn. 1924.

[3] BERZ, E.: Kegelschnitte in desarguesschen Ebenen. Math.Z. 78, 55-85 (1962).

[4] BILO, J.: Bijdrage tot de grondslagenleer der gewone complexe projectieve meetkunde en tot de zuiver synthetische studie der complexe grondfiguren van de eerste soort. Verhandelingen van de Koninklijke Vlaamse Academie voor Wetenschappen, Letteren, en Schone Kunsten van België Jg. XI, No. 29 (1949).

[5] BURAU, W.: Mehrdimensionale projektive und höhere Geometrie. Berlin: VEB Dt.Verlag d. Wissenschaften. 1961.

[6] BRAUNER, H.: Eine geometrische Kennzeichnung linearer Abbildungen. Mh.Math. 77, 10-20 (1973).

[7] BRAUNER, H.: Geometrie projektiver Räume I. Mannheim-Wien-Zürich: BI-Wissenschaftsverlag. 1976.

[8] BRAUNER, H.: Geometrie projektiver Räume II. Mannheim-Wien-Zürich: BI-Wissenschaftsverlag. 1976.

[9] CLIFFORD, W.K.: On the classification of loci. Phil.Trans. Roy.Soc. II, 663-681 (1878). (In: Mathematical Papers, London: Macmillan and Co. 1882.)

[10] GORDON, B., MOTZKIN T.S.: On the zeros of polynomials over division rings. Trans.Am.math.Soc. 116, 218-226 (1965).

[11] HAVLICEK, H.: Zur Theorie linearer Abbildungen I. J.Geometry 16, 152-167 (1981).

[12] KRÜGER, W.: Kegelschnitte in Moufangebenen. Math.Z. 120, 41-60 (1971).

[13] RIESINGER, R.: Normkurven in endlichdimensionalen Desarguesräumen. Geom.Ded. 10, 427-449 (1981).

[14] ROSATI, L.A.: Su alcune varietà dello spacio proiettivo sopra un corpo non commutativo. Ann.Math.pura appl., IV Ser. 59 213-228 (1962).
[15] ROSATI, L.A.: Su alcuni problemi di geometria non lineare sopra un corpo sghembo. Atti Acad.naz.Lincei, VIII Ser., Rend., Cl.sci.fis.math.natur. 36, 615-622 (1964).
[16] SEGRE, B.: Lectures on Modern Geometry. Roma: Ed. Cremonese. 1962.
[17] SEGRE, C.: Mehrdimensionale Räume. Enzyklopädie d.Math. Wissenschaften, III, 2,2A. Leipzig: B.G. Teubner. 1921-1928.

H. HAVLICEK
Institut für Geometrie
Technische Universität
Gußhausstraße 27-29
A-1040 Wien
Österreich