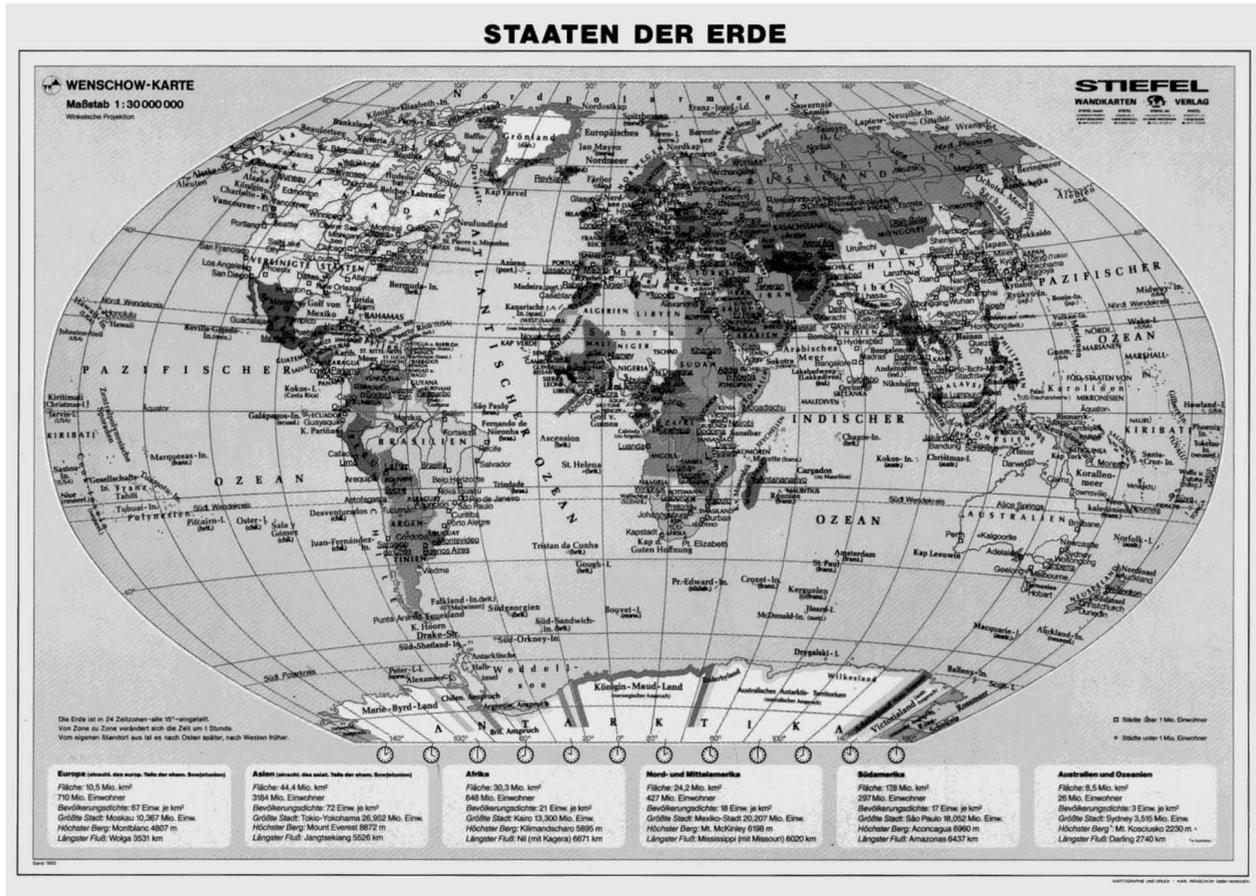


# Der Entwurf von Winkel oder "Wieviel Geometrie steckt in einer Schulwandkarte?"

Von Hans Havlicek, Wien.

In vielen Schulklassen hängen geographische Karten, insbesondere dürfte die in Figur 1 abgebildete Karte "Staaten der Erde" recht verbreitet sein. Sie zeigt, wie in der linken oberen Ecke vermerkt, eine politische Weltkarte im Entwurf von Winkel.



Figur 1: Weltkarte im Entwurf von Winkel (© Karl Wenschow GmbH München)

In diesem Artikel soll dargestellt werden, wie dieser Kartenentwurf erklärt ist. Dabei werden wir mit einigen wenigen Begriffen aus dem Grundstoff der Darstellenden Geometrie auskommen:

- Großkreise, Kleinkreise und Tangentialebene einer Kugel,
- Abwicklung eines Drehzylinders,
- orthogonale perspektive Affinität.

Das liegt daran, daß der Entwurf von Winkel nicht durch differentialgeometrische Forderungen (wie etwa Flächentreue oder Winkeltreue) erklärt wird, sondern durch eine Abfolge von "Manipulationen" aus anderen, einfach zu beschreibenden Kartenentwürfen entsteht.

Ohne geometrische Grundkenntnisse wird die Herleitung und Beschreibung des Entwurfs von Winkel vermutlich nicht leicht gelingen. So wird etwa im populärwissenschaftlichen Buch [3], das einen ausgezeichneten historischen Überblick der Kartographie mit reichem Bildmaterial gibt, der Entwurf von Winkel eher vage als

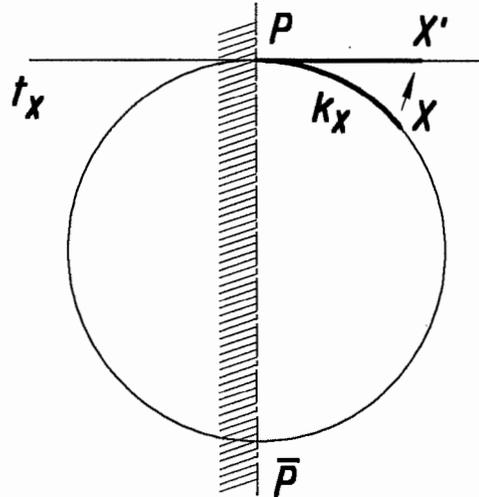
**"vermittelnd"**

umschrieben, während für Kegel-, Zylinder- und Azimutalentwürfe zumindest die geometrischen Grundideen illustriert werden. Um zu zeigen, was sich alles hinter dem Wort "vermittelnd" verbirgt, gehen wir in mehreren Schritten vor:

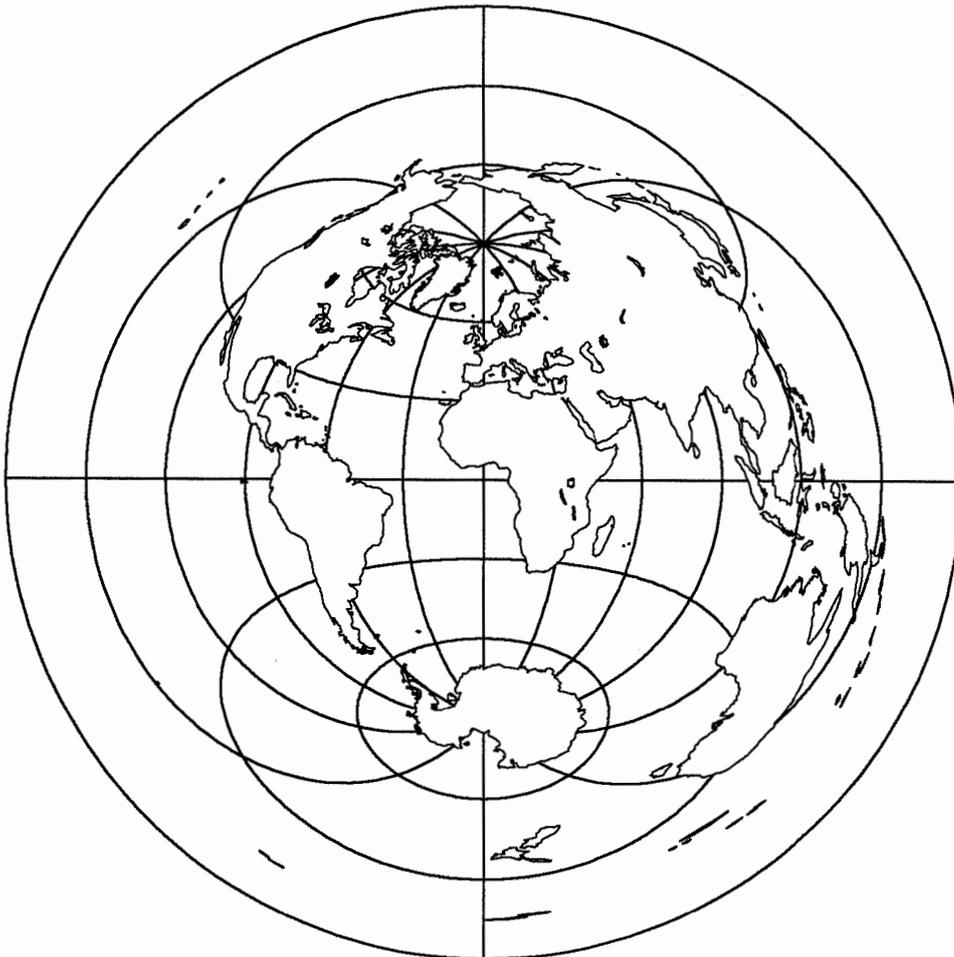
### Schritt 1: Abstandstreuer Azimutalentwurf

Es sei  $P$  der Schnittpunkt von Nullmeridian und Äquator und  $\bar{P}$  dessen Gegenpunkt. Im Punkt  $P$  legen wir die Tangentialebene  $\tau$  an die Erdkugel. Nun wird die gesamte Kugeloberfläche mit Ausnahme von  $\bar{P}$  wie folgt in die Ebene  $\tau$  abgebildet (vgl. Figur 2):

- Als Bild von  $P$  setzen wir  $P' := P$ .
- Für jeden Punkt  $X \neq P, \bar{P}$  spannen  $P, \bar{P}$  und  $X$  eine Ebene  $\epsilon_X$  auf. In dieser liegt die kürzeste Verbindung von  $P$  nach  $X$  entlang der Kugeloberfläche, also ein Großkreisbogen  $k_X$  mit Endpunkten  $P$  und  $X$ . Die Länge des Bogens  $k_X$  ist der **sphärische Abstand** des Punktes  $X$  vom Punkt  $P$ . Nun betrachten wir die Tangente  $t_X := \epsilon_X \cap \tau$  dieses Großkreises im Punkt  $P$ . Auf der Geraden  $t_X$  gibt es genau zwei Punkte, deren Abstand von  $P$  gleich dem sphärischen Abstand von  $X$  und  $P$  ist. Unter diesen beiden wählen wir jenen als Bildpunkt  $X'$  von  $X$  aus, der bezogen auf die Ebene  $\epsilon_X$  auf der selben Seite der Geraden  $P\bar{P}$  liegt wie  $X$ .



Figur 2: Abstandstreue bezüglich  $P$



Figur 3: Abstandstreuer Azimutalentwurf (querachsig)

Die soeben beschriebene Abbildung<sup>1</sup> ist der **abstandstreue Azimutalentwurf in quer-**

<sup>1</sup>Hier und im folgenden ist die Ebene  $\tau$  noch unter Berücksichtigung eines geeigneten Maßstabes mittels einer Ähnlichkeit seitenrichtig in die Kartenebene abzubilden. Die Figuren 3, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 12 und 13 sind sämtlich im selben Maßstab angefertigt, für die anderen Figuren dieses Artikels trifft das nicht zu.

**achsiger Lage.** Die "Abstandstreue" bezieht sich dabei aber nur auf vom Punkt  $P$  aus gemessene Werte, die Bezeichnung "querachsig" kommt daher, daß die Verbindung von  $P$  mit der Mitte der Erdkugel quer (= rechtwinkelig) zur Erdachse liegt. Vgl. auch [1]. Figur 3 zeigt diesen Kartenentwurf.

Der abstandstreue Azimutalentwurf findet als geographische Karte kaum Verwendung, wird jedoch im Kurzwellenfunk als **Funkmeßkarte** benützt, da daraus für eine im Punkt  $P$  befindliche Funkstation und jedes beliebige Zielgebiet der optimale **Ausstrahlungswinkel** und die **Entfernung** unmittelbar abgelesen werden können.

### Schritt 2: Umbeziffern

Wir denken uns jetzt die "Haut" der Erdkugel entlang des Halbmeridians  $180^\circ$  W (West)  $\hat{=}$   $180^\circ$  E (Ost) aufgeschnitten, d.h. die Punkte auf diesem Halbmeridian inklusive der Pole werden im folgenden nicht mehr betrachtet. Dieser Halbmeridian entspricht ungefähr der **Datumsgrenze**.

Den verbleibenden Rest der Erdoberfläche bilden wir nach Auswahl einer Konstanten  $c$  mit  $0 < c < 1$  wie folgt in sich ab (vgl. Figur 4):

- Hat ein Punkt  $X$  die geographische Länge  $\lambda^\circ$  und die geographische Breite  $\beta^\circ$ , so wird ihm der Punkt  $X'$  mit den geographischen Koordinaten

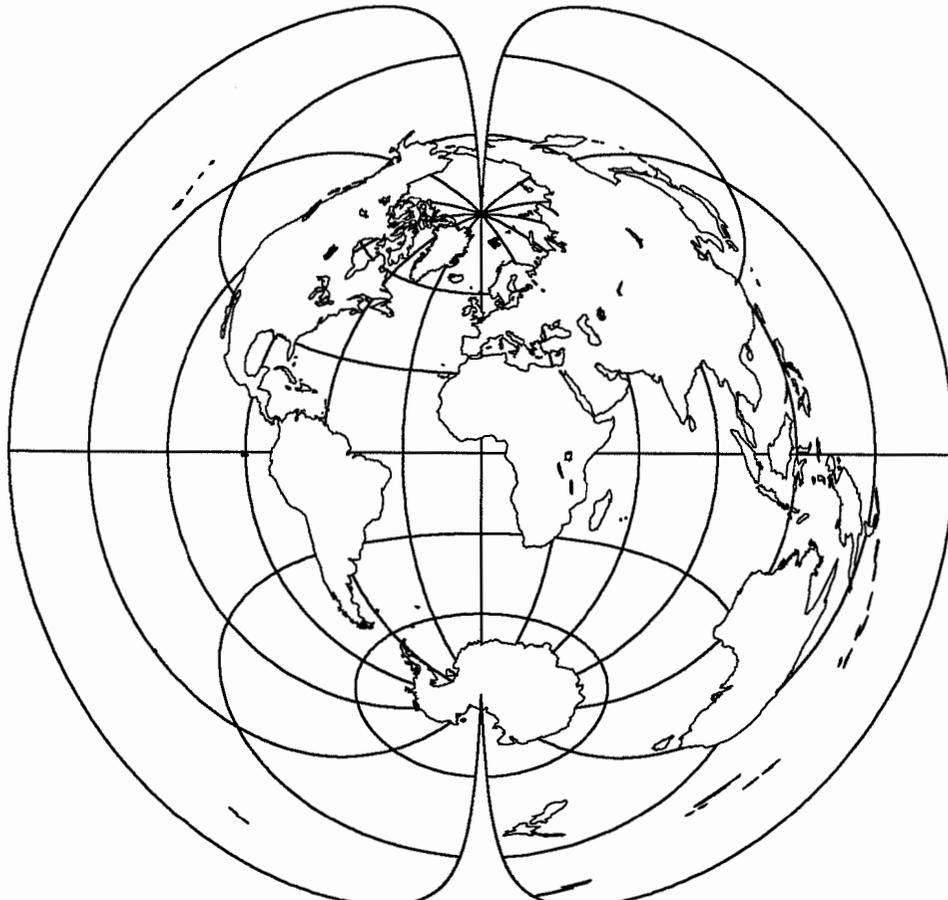
$$(c \cdot \lambda^\circ, \beta^\circ)$$

zugeordnet; dabei verwenden wir negative Koordinaten für westliche Länge und südliche Breite.



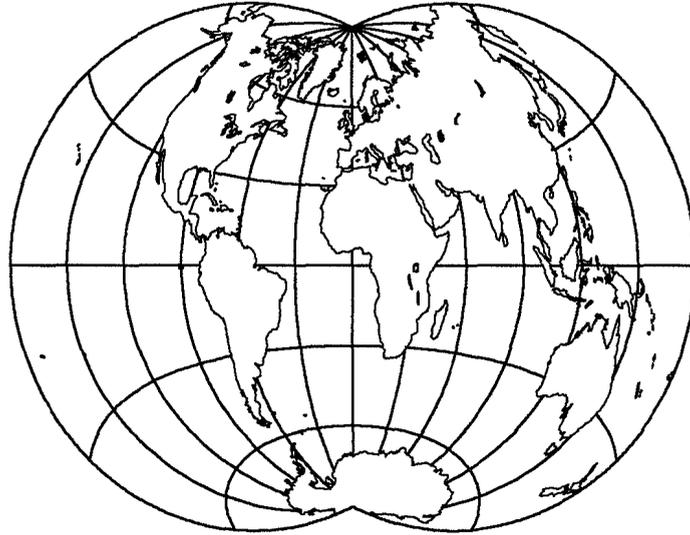
Figur 4: Längenstauchung

Diese Abbildung ist vom Auf- und Zuklappen eines Lampions wohlbekannt. Allerdings sollten wir uns die Erdoberfläche bei dieser Abbildung nicht aus Papier, sondern aus einem dehnbaren Material materialisiert denken. Es kommt ja, anders als bei einem Lampion, zu keinem "Ziehharmonika-Effekt".



Figur 5: Umbezifferter abstandstreuer Azimutalentwurf (querachsig,  $c = 0,99$ )

Für jeden Wert von  $c$  können wir die entsprechend gestauchte Erdoberfläche, die nun nur noch einen Teil der Kugel überdeckt, dem abstandstreuen Azimutalentwurf aus Schritt 1 unterwerfen. Das zeigen die Figuren 5, 6 und 7 für  $c = 0,99$ ,  $c = 0,7$  bzw.  $c = 0,5$ . Das Kartenbild wird dabei Schritt um Schritt kleiner. Insbesondere bei  $c = 0,5$  ist die Karte auf eine Kreisscheibe geschrumpft, da die gestauchte Erdoberfläche nur noch eine Halbkugel bedeckt. Kleiner soll  $c$  hier nicht werden.



Figur 6: Umbezifferter abstandstreuer Azimutalentwurf (querachsig,  $c = 0,7$ )



Figur 7: Umbezifferter abstandstreuer Azimutalentwurf (querachsig,  $c = 0,5$ )

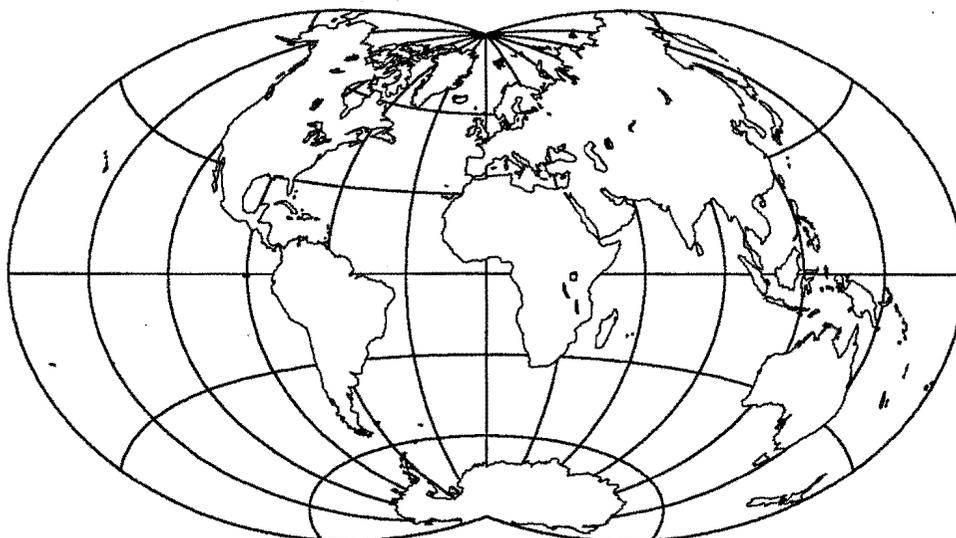
Beachtenswert ist jedoch, daß sich die Bilder des Gradnetzes in den Figuren 5, 6 und 7 gegenüber Figur 3 nicht wesentlich verändern. Die Breitenkreisbilder verkürzen sich bloß, und die Bilder der Längenkreise ändern (großzügig formuliert) nur ihre Beschriftung: Gehen wir etwa in Figur 3 vom Meridianbild  $30^\circ$  E (Ost) aus, so trägt in Figur 7 ein Teil derselben Kurve die Bezeichnung  $60^\circ$  E; aus  $60^\circ$  E wird  $120^\circ$  E usw. Was wir hier durchführen, ist ein einfaches Beispiel für das **Umbeziffern** eines Kartenentwurfs.

### Schritt 3: Orthogonale perspektive Affinität

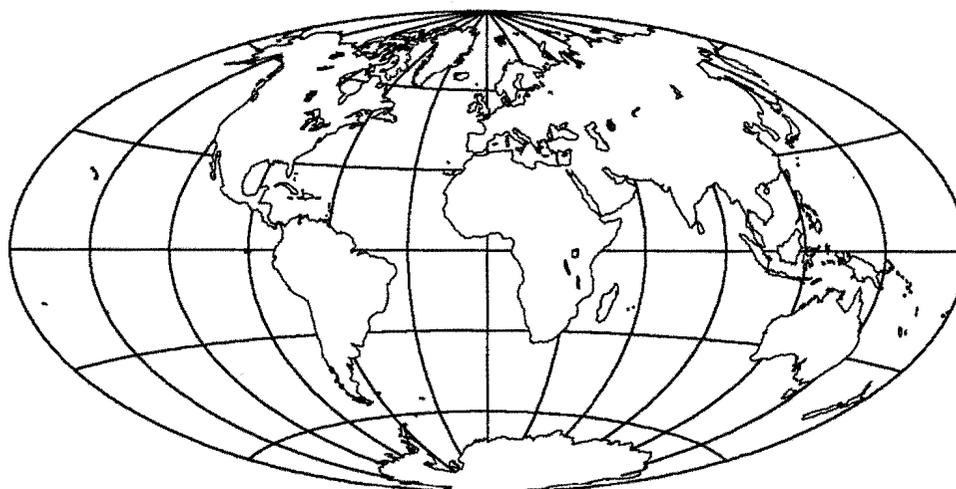
Die im vorhergehenden Schritt beschriebenen Bilder der Erdkugel können nicht überzeugen. Es wird zwar in jedem Fall der Nullmeridian längentreu abgebildet, aber der Äquator erscheint mit dem Faktor  $c$  gestaucht. Um das zu kompensieren, schließen wir an die bisher erklärten Abbildungen in Abhängigkeit von  $c$  je eine orthogonale perspektive Affinität der Ebene  $\tau$  an, deren Affinitätsachse das Bild des Nullmeridians enthält. Dabei wählen wir die Affinität so, daß der Äquator nach Anwendung der Affinität in wahrer Länge erscheint und kein "spiegelverkehrtes" Bild entsteht.

Während sich Figur 5 ( $c = 0,99$ ) unter dieser Affinität nur unwesentlich ändert, wird so aus der Karte in Figur 6 ( $c = 0,7$ ) die in Figur 8 gezeigte Darstellung des

Globus', bei der allerdings die Einbuchtungen in der Nähe der Polbilder als störend empfunden werden könnten. Für  $c = 0,5$  jedoch erhalten wir ausgehend von Figur 7 nun die in Figur 9 gezeigte Weltkarte mit einem eleganten elliptischen Rand. Dieser Kartenentwurf wird nach dem russischen Kartographen **Aitoff** benannt.



Figur 8: Affin transformierte Karte aus Figur 6



Figur 9: Entwurf von Aitoff (affin transformierte Karte aus Figur 7)

#### Schritt 4: Abstandstreuer Zylinderentwurf mit längentreuem Äquator

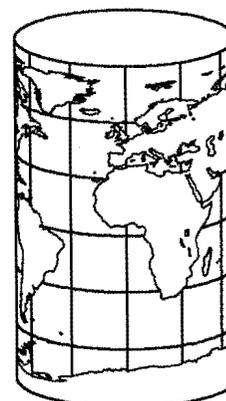
Wir schreiben der Erdkugel<sup>2</sup> entlang des Äquators einen Drehzylinder berührend an und ordnen jedem Punkt der Kugeloberfläche, mit Ausnahme der beiden Pole, einen Zylinderpunkt wie folgt zu:

- Jeder Halbmeridian der Kugel wird, analog zu Schritt 1, längentreu und seitenrichtig auf jene Zylindererzeugende abgewickelt, die diesen Halbkreis berührt.

Vgl. dazu Figur 10.

Anschließend schneiden wir den Zylinder längs der Tangente an den 180°-Halbmeridian auf und wickeln ihn so in die Ebene  $\tau$  ab, daß die Nullmeridiantangente fest bleibt. Das liefert eine in Figur 11 dargestellte Karte im **abstandstreuen Zylinderentwurf mit längentreuem Äquator**. Die Abstandstreue bezieht sich jetzt auf die Längengrade.

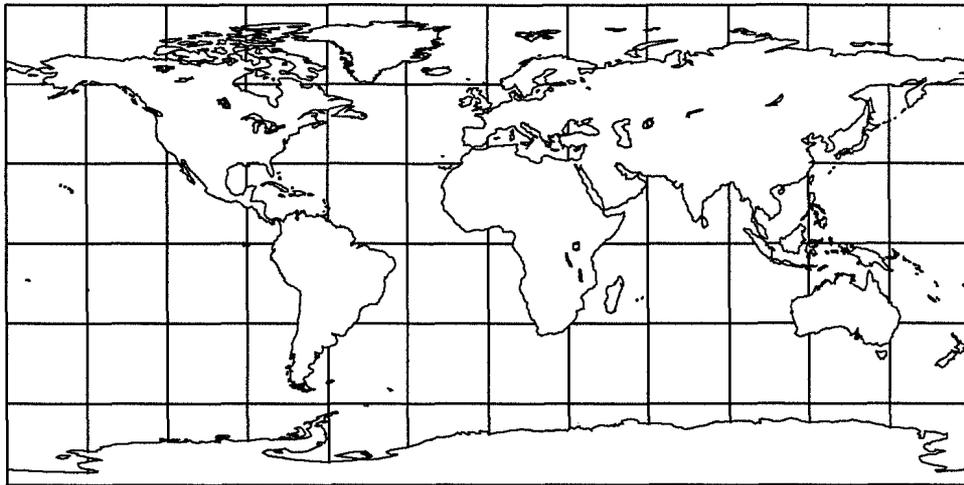
Diese Karte zeigt alle Meridiane und den Äquator unver-



Figur 10: Berührzylinder

<sup>2</sup>Die Transformation der Erdoberfläche aus Schritt 2 unterbleibt hier!

zerzt, während sämtliche anderen Breitenkreise in der Karte länger erscheinen als in Wirklichkeit. Sie wird auch als **quadratische Plattkarte** bezeichnet, da sich das Gradnetz als quadratisches Netz darstellt.



Figur 11: Abstandstreuer Zylinderentwurf (quadratische Plattkarte)

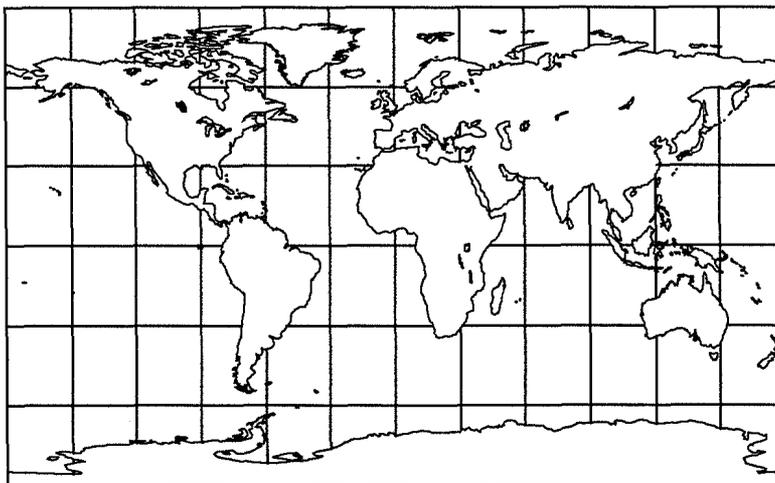
### Schritt 5: Noch einmal orthogonale perspektive Affinität

Um die Verzerrungsverhältnisse zu verbessern, unterwerfen wir auch den abstandstreuen Zylinderentwurf aus Figur 11 einer orthogonalen perspektiven Affinität, deren Achse das Bild des Nullmeridians enthält. Allerdings wird die Kartenfigur jetzt - im Gegensatz zu Schritt 3 - nicht rechtwinkelig zur Affinitätsachse "gedehnt" sondern echt "gestaucht", etwa mit einem Faktor  $0 < c < 1$ . Egal wie wir diese Affinität ansetzen, gibt es dann immer **zwei längentreu abgebildete Breitenkreise**; diese gehören zur geographischen Breite

$$\pm\beta_0 \text{ mit } \cos\beta_0 = c.$$

Die Breitenkreise zwischen diesen beiden werden verkürzt abgebildet, die Breitenkreise nördlich und südlich werden in der Karte verlängert dargestellt. In Figur 12 wurde die Affinität so gewählt, daß die Breitenkreise  $\pm 36^\circ$  in wahrer Länge erscheinen ( $\cos 36^\circ \approx 0,8090$ ). Damit ist zwar jetzt der Äquator deutlich zu kurz, aber der hier verwendete Zylinderentwurf ist ja noch nicht die endgültige Darstellung.

Ein solcher **abstandstreuer Zylinderentwurf mit zwei längentreuen Parallelkreisen** (Breitenkreisen) wird auch **rechteckige Plattkarte** genannt.



Figur 12: Abstandstreuer Zylinderentwurf (rechteckige Plattkarte)

Es finden sich gelegentlich Illustrationen zu diesem Entwurf, welche auf den Drehzylinder durch die beiden längentreu abgebildeten Breitenkreise zurückgreifen. Dabei ist aber zu beachten, daß der Abstand der beiden Breitenkreise - gemessen auf der Oberfläche der Sphäre - stets größer ist, als ihr auf dem Zylindermantel ge-

messener Abstand. Es ist daher nicht möglich, sich diesen Kartenentwurf so vorzustellen, daß die Kugeloberfläche auf diesen "Schnittzylinder" abgebildet wird, wobei beide Schnittkreise punktweise fest bleiben.

Andererseits läßt sich dieser abstandstreue Zylinderentwurf mit zwei längentreuen Parallelkreisen auch wie folgt realisieren: Unterwerfen wir zuerst die Erdoberfläche der in Schritt 2 beschriebenen Abbildung (Stauchung aller geographischen Längen mit der oben ausgewählten Konstanten  $c$ ) und wenden wir dann auf die so transformierte Erdoberfläche den abstandstreuen Zylinderentwurf mit längentreuem Äquator an, so liefert die zusammengesetzte Abbildung ebenfalls diese rechteckige Plattkarte.

### Schritt 6: Arithmetisches Mittel

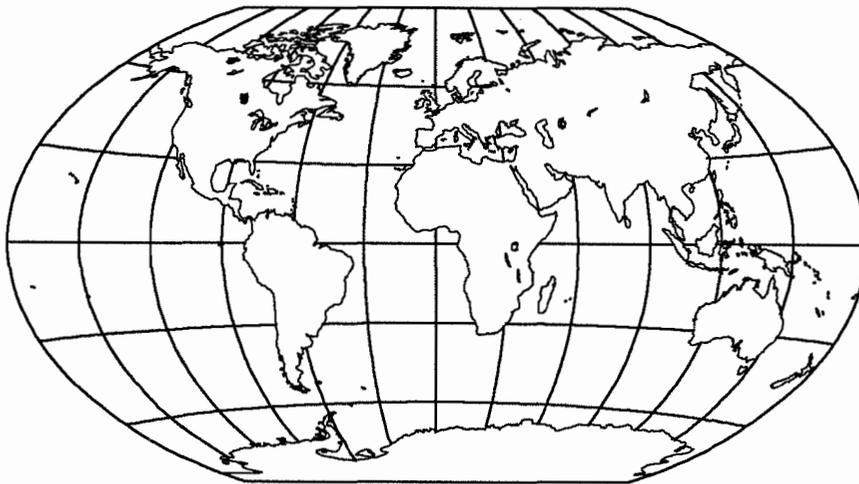
Nach langer Vorarbeit ist der letzte wesentliche Schritt sehr schnell erklärt: Jeder Punkt der Erdoberfläche - mit Ausnahme der Pole und der Punkte am  $180^\circ$ -Halbmeridian - hat einerseits ein Kartenbild unter dem Entwurf von Aitoff und andererseits unter dem abstandstreuen Zylinderentwurf aus Figur 12. Wir legen nun diese beiden Landkarten so übereinander, daß die beiden Nullmeridianbilder (punktweise) übereinstimmen.

- Von diesen beiden Bildpunkten eines Punktes der Erdoberfläche nehmen wir deren **Mittelpunkt als neuen Bildpunkt**<sup>3</sup>.

Diese Vorschrift liefert den **Kartenentwurf von Winkel** (1913); vgl. Figur 13.

Schlampig, aber einprägsam läßt sich dieser Vorgang als **arithmetisches Mittel** auffassen, etwa in der Form

$$\text{Winkel} = \frac{1}{2}(\text{Aitoff} + \text{Rechteckige Plattkarte}).$$



Figur 13: Entwurf von Winkel

Beim Entwurf von Winkel wird nach wie vor der Nullmeridian längentreu abgebildet, das Bild des Äquators ist jedoch mit dem Faktor

$$\frac{1}{2}(1 + \cos 36^\circ) \approx 0,9045$$

gestaucht, erscheint also in der Karte etwas zu kurz. Zur genaueren Diskussion aller auftretenden Verzerrungen muß auf Methoden der Differentialgeometrie zurückgegriffen werden, die im Schulunterricht nicht zur Verfügung stehen. Es wird aber jedenfalls eine breite Zone nördlich und südlich des Äquators mit einer maximalen Längenverzerrung von etwa  $\pm 10\%$  abgebildet. Zu den Polen hin nehmen die Verzerrungen jedoch über alle Grenzen zu, da der Entwurf dort divergiert. Das spiegelt sich im Auftreten

<sup>3</sup>Ein analoges Verfahren für die Darstellende Geometrie wird in [2] vorgestellt. Ausgehend von zwei beliebig (!) in einer Zeichenebene liegenden Parallelrissen läßt sich ein dritter Parallelriß alleine durch Zeichnen von Mittelpunkten gewinnen. Vgl. dazu auch [5].

je einer **Pollinie**, als ausgeartetem "Bild" von Nord- bzw. Südpol, wider.

Die Abbildungsgleichungen des Entwurfs von Winkel können etwa in [4] nachgelesen werden. Deren Herleitung ist (ganz ohne sphärische Trigonometrie) mit bescheidenen Kenntnissen aus räumlicher Vektorrechnung und ebener Trigonometrie anhand der Schritte 1 bis 6 durchaus möglich, aber etwas aufwendig.

Damit ist der geometrische Teil dieses Artikels zu Ende. Wohl aus geographischen Gründen folgt noch

### Schritt 7: Bildausschnitt anpassen

Zum Schluß wollen wir noch Figur 13 mit Figur 1 vergleichen. Abgesehen von gewissen Äußerlichkeiten, wie etwa der unterschiedlichen Schrittweite im Gradnetz ( $30^\circ$  bzw.  $20^\circ$ ) oder dem nicht übereinstimmenden Bildmaßstab, fällt ein kleiner Unterschied auf:

Das Bild des Nullmeridians ist in Figur 1 keine Strecke!

Das beruht darauf, daß in der dargestellten Schulwandkarte nicht der Schnittpunkt von Nullmeridian und Äquator sondern ein weiter östlich liegender Äquatorpunkt ( $10^\circ$  E) die Rolle des Bildmittelpunktes  $P$  übernommen hat. Damit wird erreicht, daß der gegenüberliegende Halbmeridian, er trägt den Punkt  $\bar{P}$ , durch die Beringstraße (zwischen Alaska und Sibiren) läuft; somit wird der asiatische Kontinent in Figur 1 in einem Teil und nicht, wie in Figur 13, in zwei unzusammenhängenden Teilen abgebildet.

Die geometrische Erklärung der Landkarte ändert sich durch diese Wahl des Bildausschnitts freilich nicht wesentlich.

Der Autor dankt dem *Stiefel Wandkartenverlag* (Ingolstadt und Mariazell) für die freundliche Unterstützung sowie der *K. Wenschow GmbH* (München) für das zur Verfügung gestellte Bildmaterial und die Genehmigung zu dessen Reproduktion. Weiters standen mir *Prof. Mag. Dr. Andreas Asperl* (Wien) und *Prof. Mag. Karin Baron* (Wien) mit Rat und Tat bei der Abfassung dieses Artikels zur Seite.

### Literatur

- [1] Havlicek H.: Von der Darstellenden Geometrie zu Kartenentwürfen am Personal-Computer, IBDG Jg. 8 (1989), 5-10.
- [2] Hohenberg F.: Axonometrie ohne Konstruktionslinien, Sb. österr. Akad. Wiss., math.-naturw. Kl. Abt. II, 180 (1972), 177-184.
- [3] Sammet G.: Der vermessene Planet, Bilderatlas zur Geschichte der Kartographie, GEO im Verlag Gruner + Jahr, Hamburg, 1990.
- [4] Wagner K.: Kartographische Netzentwürfe, 2. Auflage, Bibliographisches Institut, Mannheim, 1962.
- [5] Weiß G. und Kunnert C.: Herstellung linearer Risse nach Hohenberg, J. Geometry 47 (1993), 186-198.

Weitere einschlägige Literatur wurde in [1] angegeben.