Lineare Abbildung .... Projektion mal Kollineation

affin:

Parallelpr. Zentralpr. Affinität ...

euklidisch:

... ... orthogonale Zentralpr. ... Ähnlichkeit ...

Hilfsmittel

I, J … euklidische Vektorräume

$f : I \to J$ linear $x \mapsto f(x)$

$f^{ad} : J \to I$ $y \mapsto f^{ad}(y)$

$$f(x) \cdot y = x \cdot f^{ad}(y) \quad \forall x \in I \ \forall y \in J$$

$f^{ad} \circ f : I \to I$ selbstadjungiert

Eigenwerte ≥ 0

EW $\neq 0 \Rightarrow \sqrt{EW}$ … Singulärwerte von f (f^{ad})

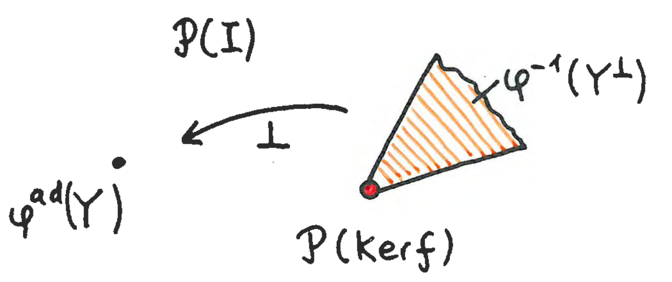
Projektive Räume $P(I), P(J)$ … elliptische Räume

$\varphi : P(I) \setminus P(\ker f) \to P(J)$

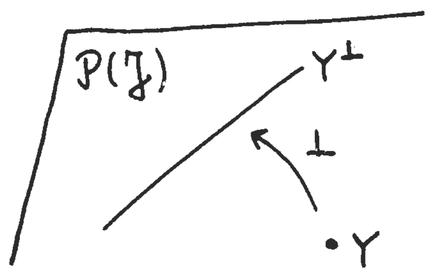
$\mathbb{R}x \mapsto \mathbb{R}(f(x))$

$\varphi^{ad} : P(J) \setminus P(\ker f^{ad}) \to P(I)$

$\mathbb{R}y \mapsto \mathbb{R}(f^{ad}(y))$



„erweitertes Urbild"



$\mathcal{P}(V)$ ... n-dim	$\mathcal{P}(W)$ ... m-dim	proj. Raum
$\mathcal{P}(I)$	$\mathcal{P}(J)$	Fernhyperebenen
I	J	euklidische Vektorräume

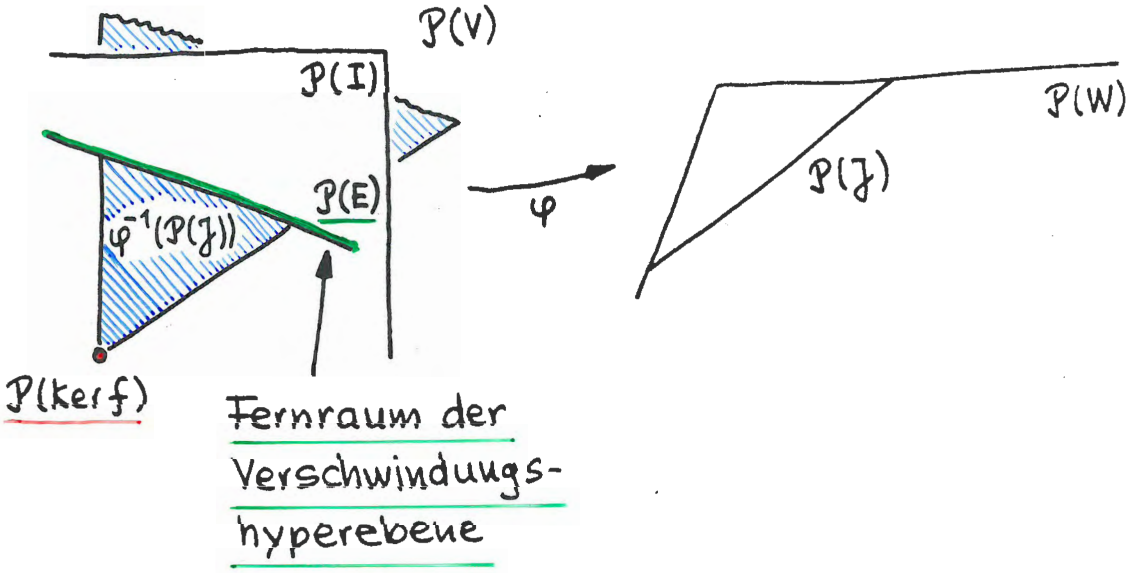
$2 \leq m < n < \infty$

$f: V \to W$ ... linear

φ ... zentral ... $\ker f \not\subset I$

surjektiv ... f surjektiv

$n = 3$ $m = 2$

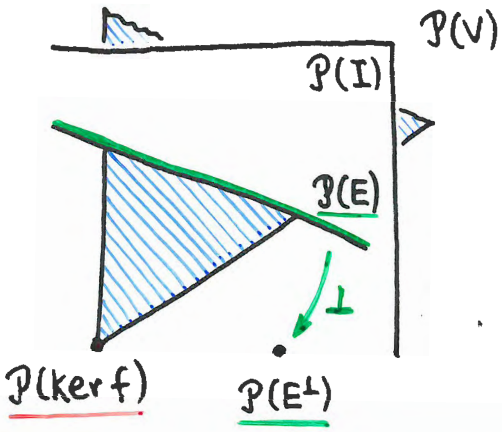


V. HAVEL (1960), H. BRAUNER (1986) : $f_E : E \to J$, $x \mapsto f(x)$

φ = Zentralprojektion mal Ähnlichkeit $\Longleftrightarrow$ kleinster Singulärwert von f_E mind. $2m-n+1$-fach

φ = orth. Zentralprojektion mal Ähnlichkeit $\Longleftrightarrow$ alle Singulärwerte von f_E sind gleich.

PAUKOWITSCH, SZABÓ, STACHEL, VOGEL H.



$p : I \to E$ ... orthogonale Projektion

$p^{ad} : E \to I$ ... natürliche Einbettung

$$\boxed{\text{Ersetze } f_E \text{ durch } f_E \circ p : I \to J}$$

$$(f_E \circ p)^{ad} \circ (f_E \circ p) = p^{ad} \circ f_E^{ad} \circ f_E \circ p$$

$f_E \circ p$ und f_E haben dieselben Singulärwerte (inkl. Vielfachheit)

homogene kartesische Koordinaten

$$f \ldots \qquad A = \left[\begin{array}{c|ccc} a_{00} & a_{01} & \cdots & a_{0n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m0} & a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} \cancel{a_{00}} & a_0 \\ \hline \cancel{a_{01}} & a_1 \\ \vdots & \vdots \\ \cancel{a_{m0}} & a_m \end{array}\right] \in \mathbb{R}^{(m+1)\times(n+1)}$$

$a_0 \neq 0$ weil zentral und $a_{00}x_0 + \cdots + a_{0n}x_n = 0 \ldots$ Gleichung der Verschwindungshyp.

$$f_E \circ p \ldots \qquad \tilde{A} := \begin{bmatrix} a_1 - \dfrac{a_0 \cdot a_1}{a_0 \cdot a_0} a_0 \\ \vdots \\ a_m - \dfrac{a_0 \cdot a_m}{a_0 \cdot a_0} a_0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

Eigenwerte von $\underbrace{\tilde{A}^T \tilde{A}}_{\in \mathbb{R}^{n\times n}}$ oder (!) $\underbrace{\tilde{A}\tilde{A}^T}_{\in \mathbb{R}^{m\times m}}$, regulär

orth. Zentralprojektion mal Ähnlichkeit $\Longleftrightarrow$
$\tilde{A}\tilde{A}^T = \operatorname{diag}(v, \ldots, v)$, $v > 0$.