Zur Differentialgeometrie bei Charakteristik p

Hans Havlicek
Abteilung für Lineare Algebra und Geometrie
Technische Universität Wien

FWF Projekt P–12353–MAT

Hasse–Ableitung in $K[t]$:

$$\begin{array}{rcll} D_t^{(r)} \ : \ K[t] & \longrightarrow & K[t] & \quad \text{linear} \\ t^m & \longmapsto & \binom{m}{r} t^{m-r} & \end{array}$$

Zusammenhang mit der formalen Ableitung in $K[t]$:

$$\frac{d^r}{dt^r} = r!\, D_t^{(r)}$$

$D_t^{(r)} \circ D_t^{(s)} \neq D_t^{(r+s)}$, d.h. die Hasse–Ableitung ist nicht iterativ.

Beispiel: Normkurve in 4–Raum bei Charakteristik $p = 2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ t & 1 & 0 & 0 & 0 \\ t^2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ t^3 & t^2 & t & 1 & 0 \\ t^4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

p . . . fest gewählte Primzahl

p–adische Zifferndarstellung:

$$n = \sum_{\lambda=0}^{\infty} n_\lambda p^\lambda =: \langle n_\lambda \rangle =: \langle n_r, n_{r-1}, \ldots, n_0 \rangle$$

mit $0 \le n_\lambda \le p-1$.

Satz von Lucas:

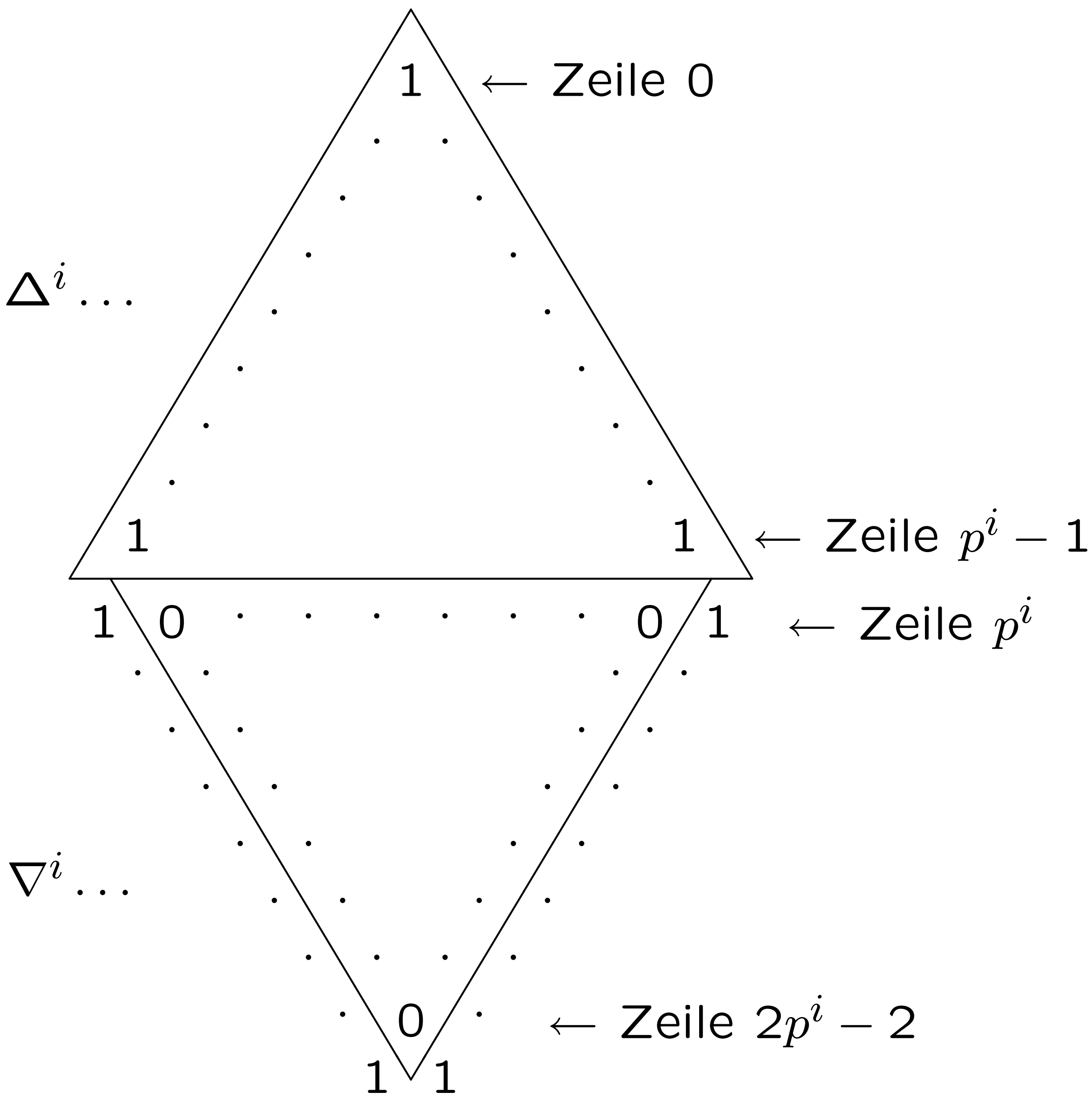
$$\binom{n}{j} \equiv \prod_{\lambda=0}^{\infty} \binom{n_\lambda}{j_\lambda} \pmod{p}.$$

Folgerung:

$$\binom{n}{j} \equiv 0 \pmod{p} \Longleftrightarrow \exists \lambda \text{ mit } n_\lambda < j_\lambda.$$

$\Delta(p)$ ... **Pascal**–Dreieck modulo p

Teildreiecke:



Klasseneinteilung der 0–Einträge von $\Delta(p)$:

$\bar{i}$ . . . Union aller ∇^i, $i \in \mathbb{N}^+$

Beispiel:

$p = 3$, $\binom{147}{43} \equiv 0 \pmod 3$, liegt in $\bar{i} = \bar{3}$

$$
\begin{array}{rcccccl}
n = \langle & 1, & 2, & 1, & 1, & 0 & \rangle = 147 \\
j = \langle & 0, & 1, & 1, & 2, & 1 & \rangle = 43 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 & & i & & L & &
\end{array}
$$

$$L := \max\{\lambda \in \mathbb{N} \mid j_\lambda > n_\lambda\} \in \mathbb{N}$$

$$i := \min\{\lambda \mid \lambda > L,\ j_\lambda < n_\lambda\} \in \mathbb{N}^+$$

Anzahl der Nullen der Klasse $\bar{i}$ in der Zeile n:

$$\Phi(i,n) := \Bigl(p^i - 1 - \sum_{\mu=0}^{i-1} n_\mu p^\mu\Bigr) \cdot n_i \cdot \prod_{\lambda=i+1}^{\infty} (n_\lambda + 1).$$

$$\Phi(i,n) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n_i = 0 \\ \text{oder} \\ n_{i-1} = \ldots = n_1 = n_0 = p-1 \end{cases}$$

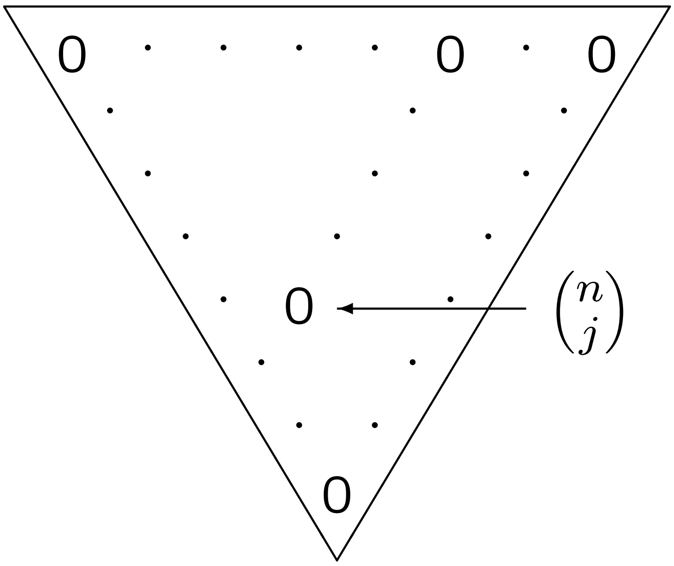
Übergang von n zu $b := n+1$:

$$\begin{aligned} n &= \langle \ldots, n_{M+1}, n_M, p-1, \ldots, p-1 \rangle \\ &\qquad\qquad \text{mit } n_M < p-1 \\ b &= \langle \ldots, b_{M+1}, b_M, 0, \ldots, 0 \rangle \\ &= \langle \ldots, n_{M+1}, n_M + 1, 0, \ldots, 0 \rangle \end{aligned}$$

$$\Phi(i,n) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b_{i-1} = 0 \text{ für } i \le M, \\ b_i = 0 \text{ für } i > M. \end{cases}$$

Vertikale Verteilung der Nullen in $\Delta(p)$:

$\binom{n}{j}$ liege in ∇^i



$\leftarrow$ Zeile $n - \sum_{\lambda=0}^{i-1} n_\lambda p^\lambda$

$\binom{n}{j}$

$$n - \sum_{\lambda=0}^{i-1} n_\lambda p^\lambda = b - \sum_{\lambda=0}^{i-1} b_\lambda p^\lambda =: T(i, b)$$

Beispiel: $p = 3$, $n = 584$

$$\begin{aligned} n &= \langle 2, 1, 0, 1, 2, 2 \rangle \\ b &= \langle 2, 1, 0, 2, 0, 0 \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T(1, b) &= \langle 2, 1, 0, 2, 0, 0 \rangle = 585 > 584 \\ T(2, b) &= \langle 2, 1, 0, 2, 0, 0 \rangle = 585 > 584 \\ T(3, b) &= \langle 2, 1, 0, 0, 0, 0 \rangle = 567 \\ T(4, b) &= \langle 2, 1, 0, 0, 0, 0 \rangle = 567 \\ T(5, b) &= \langle 2, 0, 0, 0, 0, 0 \rangle = 486 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi(1, n) &= 0 \\ \Phi(2, n) &= 0 \\ \Phi(3, n) &= 0 \\ \Phi(4, n) &= 189 \\ \Phi(5, n) &= 288 \end{aligned}$$