# Projektive Geometrie über Schiefkörpern

Lassen sich »klassische« Begriffe, z.B. „Kegelschnitt", bei beliebigem Grundkörper einführen?

Probleme:

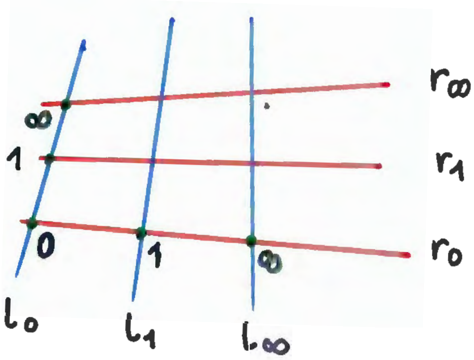
1. Passende Definition?
2. Was bleibt von den »klassischen« Ergebnissen?
3. Was kommt »neu« hinzu?
4. Querverbindungen Algebra $\rightleftarrows$ Geometrie

$K$ .... beliebiger Körper (nicht notwendig kommutativ)

- Charakteristik $\operatorname{Char} K$
- $t \in K$ bestimmt $Z(t) := \{x \in K \mid tx = xt\}$ Zentralisator
  $\hat{t} := \{ctc^{-1} \mid c \in K, c \neq 0\}$ Konjugiertenklasse
- Zentrum $Z(K) := \bigcap_{t \in K} Z(t)$

$\mathcal{P}$ ... dreidimensionaler projektiver Raum über $K$

Regulus $\mathcal{R}(l_0, l_1, l_\infty)$



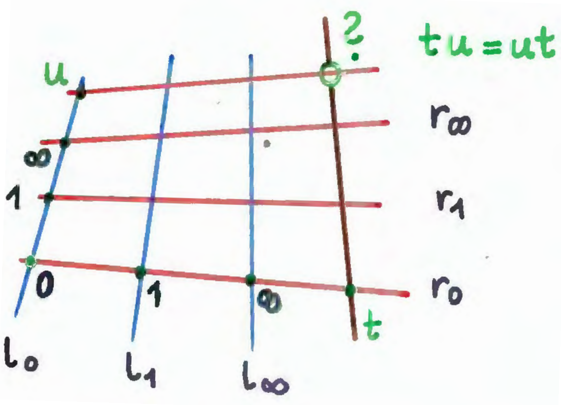

Schnittpunktbedingung $\rightleftarrows$ Zentralisator

Alle Leitgeraden von $\mathcal{R}(l_0, l_1, l_\infty)$ bilden einen Regulus über dem Zentrum von $K$.

G. Hessenberg, B. Segre, W. Krüger

$\mathcal{P}$... dreidimensionaler projektiver Raum über K

Regulus $\mathcal{R}(l_0, l_1, l_\infty)$




Schnittpunktbedingung $\rightleftarrows$ Zentralisator

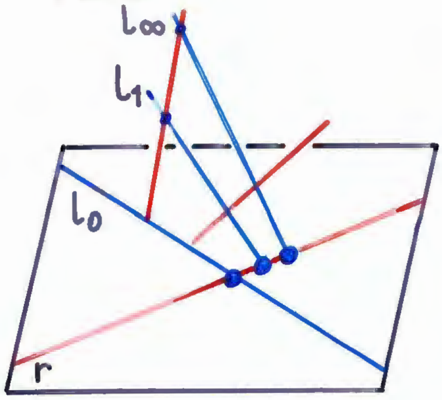
Alle Leitgeraden von $\mathcal{R}(l_0, l_1, l_\infty)$ bilden einen Regulus über dem Zentrum von K.

G. Hessenberg, B. Segre, W. Krüger

Schnitt eines Regulus mit einer Ebene

(B. SEGRE, E. BERZ, R. RIESINGER, H. H.)

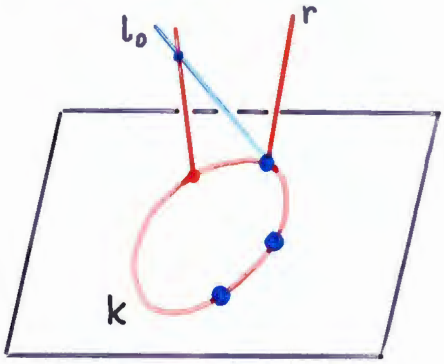
**Fall A:**




Schnitt ... $l_0 \cup r$

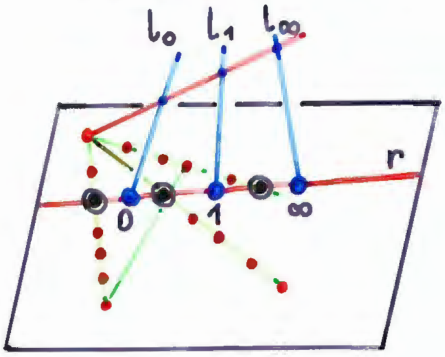
In r ist eine Z(K)-Untergerade durch die Leitgeraden des Regulus mitbestimmt.

**Fall B:**




Schnitt ... k ... Kegelschnitt (nicht entartet)

**Fall C:** Existiert nur falls K ein Schiefkörper ist




Schnitt ... $\cup$ r ... entarteter Kegelschnitt

In r ist eine Z(K)-Untergerade und eine Teilmenge $n$ ausgezeichnet.

Es gibt ein $a \in K \setminus Z(K)$ mit $n \dots (1, cac^{-1})K$, $c \in K \setminus \{0\}$. Es entspricht also diese Menge der Konjugiertenklasse $\hat{a}$.

In einem geeigneten affinen Koordinatensystem hat d die Gleichung $y = xa$. (Rechtsvektorraum!)

projektiven Kollineation oder nach einer oder mehreren Zentralprojektionen) ist also ein Kegelschnitt. Wie dieses Beispiel zeigt, kommt es auf die Wahl der Grundpunkte nicht an. Das soll bald allgemein gezeigt werden.

Aufgabe 3.1: Man zeige, daß jede Kollineation Kegelschnitte auf Kegelschnitte abbildet.

Zunächst wollen wir zeigen, daß ein Kegelschnitt in einer projektiven Koordinatenebene über kommutativem Körper eine homogene Gleichung zweiten Grades hat.

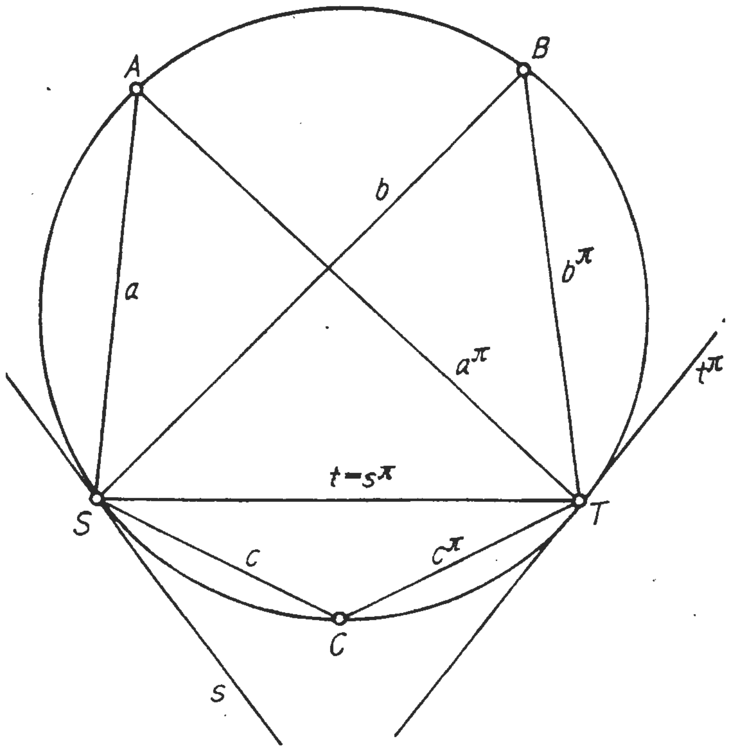



Abb. 38

**Hilfssatz 3.1:** Sind drei Punkte durch die Koordinatenvektoren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ bestimmt, und stellen die Linienkoordinatenvektoren[1] $\mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \mathfrak{u} + \mathfrak{v}$ drei voneinander und von $\mathfrak{a}K + \mathfrak{b}K$ verschiedene Geraden durch diese Punkte dar, so stellt die Abbildung

$$\mathfrak{a}x + \mathfrak{b}y \leftrightarrow x\mathfrak{u} + y\mathfrak{v} \tag{3.1}$$

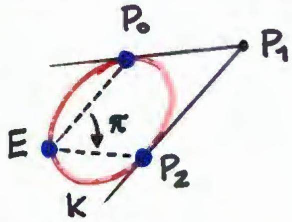
eine Perspektivität zwischen der Verbindungsgeraden der gegebenen Punkte und dem von den gegebenen Geraden bestimmten Büschel dar. Denn aus $\langle \mathfrak{u}, \mathfrak{a} \rangle = \langle \mathfrak{v}, \mathfrak{b} \rangle = \langle \mathfrak{u} + \mathfrak{v}, \mathfrak{a} + \mathfrak{b} \rangle = 0$ folgt unmittelbar $\langle x\mathfrak{u} + y\mathfrak{v}, \mathfrak{a}x + y\mathfrak{b} \rangle = 0$ für alle $x, y \in K$.

[1]) Vgl. Kap. I, Beispiel 1.3.

4

$\mathcal{P}$... projektive Ebene über $K$

**Kegelschnitte** (nicht entartet) erklärt nach J. Steiner




$\pi$ ist Projektivität, aber keine Perspektivität und $(P_0P_2)^\pi \neq P_0P_2$!
$(P_0, P_1, P_2, E)$ ... projektives Koordinatensystem

- Parameterdarstellung $t\ (\in K \cup \{\infty\}) \mapsto Q_t \ldots (1,t,t^2)K$

  $Q_0 = P_0,\ Q_1 = E,\ Q_\infty = P_2$

- affine Gleichung (Ferngerade $x_0 = 0$; $x_1 \ldots x$, $x_2 \ldots y$)

  $y = x^2$

- Es gibt genau dann Geraden $g$ mit $\#(g \cap k) > 2$, falls $K$ ein echter Schiefkörper ist.

$Q, Q' \in k$ heißen konjugiert, falls $Q = Q'$ oder $\#(QQ' \cap k) > 2$.

- Zwei Punkte $Q_t, Q_u$ $(t,u \in K)$ sind genau dann konjugiert, falls $t,u$ im Körper $K$ konjugiert sind, d.h. $u = ctc^{-1}$ mit $c \in K \setminus \{0\}$.

- Es liegt $t \in K$ genau dann im Zentrum $Z(K)$ oder $t = \infty$, falls $Q_t$ nur zu sich selbst konjugiert ist.

$t \mapsto \mathcal{C}_t$ ... Konjugiertenklasse von $Q_t$ im Kegelschnitt $k$

$\mathcal{C}_t = \{Q_t\}$ ... regulärer Punkt von $k$ (...geom. Bedeutung!)

- Es gibt mindestens drei reguläre Punkte $(P_0, P_2, E)$.

$\mathcal{P}$... $n$-dimensionaler projektiver Raum über $K$ $(2 \leq n < \infty)$

**Normkurven** (2. Art, nicht entartet)

$Q_t \mathrel{\hat{=}} (1, t, t^2, \ldots t^n)K$

R. ARTZY, E. BERZ, W. KRÜGER, T.G. OSTROM, R. RIESINGER, L.A. ROSATI, B. SEGRE, L. VOGT, H.H.

natentripel (oder Vektoren) $\mathfrak{x} = (x_0, x_1, x_2)$ und $\mathfrak{x}\, c = (x_0 c, x_1 c, x_2 c)$ mit $c \neq 0$ bestimmen denselben Punkt; daher bezeichnet man diesen auch mit $\mathfrak{x}\, K$. Dabei bedeutet $K$ den Koordinatenkörper, in unserem Fall also den reellen Zahlkörper $\mathbf{R}$. Für Vektoren $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ definieren wir ein Skalarprodukt $\mathfrak{x}\,\mathfrak{y}$ durch

$$\mathfrak{x}\,\mathfrak{y} = x_0 y_0 - x_1 y_1 - x_2 y_2. \tag{1.1}$$

Statt $\mathfrak{x}\,\mathfrak{x}$ schreiben wir auch $\mathfrak{x}^2$. Die Punkte $\mathfrak{x} K$ mit der Eigenschaft $\mathfrak{x}\,\mathfrak{x} = 0$ bilden einen Kegelschnitt $\mathfrak{K}$, der üblicherweise als Einheitskreis einer affinen Ebene aufgefaßt wird [dazu wähle man $x_0^{-1} x_1$ und $x_0^{-1} x_2$ als inhomogene Koordinaten]. Zwei Punkte $\mathfrak{x} K$, $\mathfrak{y} K$ heißen *konjugiert*, wenn die zugehörigen Vektoren $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ orthogonal sind, d. h. wenn $\mathfrak{x}\,\mathfrak{y} = 0$ ist. Dann liegt jeder von ihnen auf der Polaren (hinsichtlich $\mathfrak{K}$) des anderen.

Innere Punkte von $\mathfrak{K}$ sind solche Punkte $P$, für die jede Gerade durch $P$ den Einheitskreis $\mathfrak{K}$ in zwei Punkten schneidet. Die inneren Punkte nennen wir auch *eigentliche Punkte* des Kleinschen Modells; ihre Gesamtheit bildet die nichteuklidische Ebene $\mathfrak{J}$. Unter *nichteuklidischen Geraden* versteht man die Geraden durch innere Punkte, soweit sie im Inneren des Einheitskreises liegen. *Bewegungen* sind nach Definition diejenigen Kollineationen der reellen projektiven Ebene $\mathfrak{P}$, die den Einheitskreis $\mathfrak{K}$, also auch sein Inneres $\mathfrak{J}$, auf sich abbilden.

Wir wollen zeigen, daß das Innere $\mathfrak{J}$ des Einheitskreises $\mathfrak{K}$, mit den soeben definierten Bewegungen (die durch ihre Wirkung auf $\mathfrak{J}$ eindeutig bestimmt sind) den Bewegungsaxiomen (B 1) bis (B 6), und auch dem Axiom der freien Beweglichkeit (B 7) genügen.

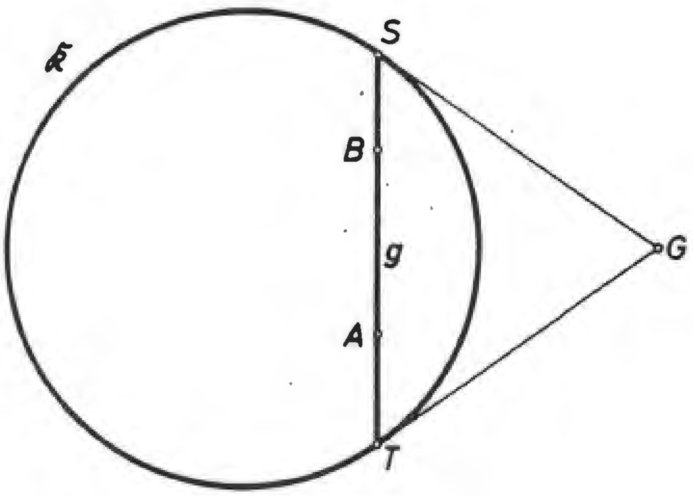



Abb. 65

Daß die Bewegungen eine Gruppe bilden, also (B 1), ist klar. Zu je zwei inneren Punkten $A$, $B$ gehört eine projektive Verbindungsgerade $g$ (Abb.

$t \in K$ .... $\mathcal{C}_t$ ... Konjugiertenklasse einer Normkurve im projektiven Raum $\mathcal{P}$ über $K$, $2 \le \dim \mathcal{P} = n < \infty$.

$\mathcal{C}_t$ sei versehen mit der Spurraum-Struktur.

- $\mathcal{C}_t$ ist ein projektiver Raum über dem Zentralisator $Z(t)$.
  Die Abbildung

  $$\begin{aligned} \mathcal{P}(K_{Z(t)}) &\longrightarrow \mathcal{C}_t \\ c \cdot Z(t) &\longmapsto Q_{ctc^{-1}} \end{aligned}$$

  ist eine Kollineation.
- $\dim \mathcal{C}_t = |K : Z(t)|_R - 1$. (innere Dimension)

  äußere Dimension von $\mathcal{C}_t$ ... $\dim [\mathcal{C}_t]$ (im proj. Raum $\mathcal{P}$)

  $\dim [\mathcal{C}_t] \le \dim \mathcal{C}_t$
- Für $[\mathcal{C}_t] \neq \mathcal{P}$ gibt es eine zentrale Hyperebene (dualer Koordinatenvektor aus $Z(K)^{n+1}$), die $\mathcal{C}_t$ umfaßt.
  $\Rightarrow$ $t$ ist algebraisch über $Z(K)$.
- $\dim [\mathcal{C}_t] = \min\{n, |t : Z(K)| - 1\}$.

Zentralisator-Theorem: $|K : Z(t)|_R = |t : Z(K)|$
falls wenigstens eine Seite endlich.