Jordan-Homomorphismen und harmonische Abbildungen

Hans Havlicek

Institut für Geometrie
Technische Universität Wien
Österreich

A. Blunck und H. Havlicek. Jordan homomorphisms and harmonic mappings. Eingereicht bei *Monatsh. Math.*

Berlin, Februar 2002

Harmonische Bijektionen

STAUDT

$\mathbb{P}(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}(\mathbb{R})$ harmonische Bijektion $=$ Projektivität

---

statt $\mathbb{R}$ ...

Körper K mit $\operatorname{char} K \neq 2$: HUA, BUEKENHOUT, KLOTZEK

kommutativer oder lokaler oder ... Ring R, wobei 2 invertierbar ist: LIMAYE & LIMAYE, SCHAEFFER, HERZER

statt $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ ...

Automorphismus, Antiautomorphismus, Jordan-Automorphismus von R.

Jordan-Homomorphismen

Alle Ringe sind assoziativ mit Einselement.

$\alpha : R \to R'$ heißt *Jordan-Homomorphismus*, falls für alle $a, b \in R$ gilt:

$$\begin{aligned} (a+b)^\alpha &= a^\alpha + b^\alpha, \\ 1^\alpha &= 1', \\ (aba)^\alpha &= a^\alpha b^\alpha a^\alpha. \end{aligned}$$

Beispiele „echter“ Jordan-Automorphismen:

- $R = \mathbb{H} \times \mathbb{H}$, $(x, y) \mapsto (x, \overline{y})$.
- $R = \bigwedge \mathbb{R}^2$ mit Basis $1, e_1, e_2, e_3 := e_1 \wedge e_2$.

  $\alpha : R \to R$ sei $\mathbb{R}$-linear und es gelte

$$1 \mapsto 1, \; e_1 \mapsto e_1, \; e_2 \mapsto e_3, \; e_3 \mapsto e_2.$$

Punktabbildungen

Projektive Gerade über R:

$$\mathbb{P}(R) := R(1,0) \cdot \mathrm{GL}_2(R).$$

Es sei $\alpha : R \to R'$ ein Jordan-Homomorphismus. Dann ist durch

$$R(a,b) \mapsto R'(a^\alpha, b^\alpha)$$

im Allgemeinen *keine Abbildung* $\mathbb{P}(R) \to \mathbb{P}(R')$ erklärt.

Sonderfall: Ist R ein lokaler Ring, so ist eine Punktabbildung $\mathbb{P}(R) \to \mathbb{P}(R')$ wohldefiniert durch

$$\begin{aligned} R(a,1) &\mapsto R'(a^\alpha, 1'), \\ R(1,b) &\mapsto R'(1', b^\alpha). \end{aligned}$$

Ein Satz von Bartolone (1989)

R sei ein Ring vom *stabilen Rang* 2.

Dann kann jeder Punkt von $\mathbb{P}(R)$ in der Form

$$R(t_1t_2 - 1, t_1)$$

mit *Parametern* $t_1, t_2 \in R$ geschrieben werden.

Für jeden Jordan-Homomorphismus $\alpha : R \to R'$ ist

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}(R) & \to & \mathbb{P}(R') \\ R(t_1t_2 - 1, t_1) & \mapsto & R'(t_1^\alpha t_2^\alpha - 1', t_1^\alpha) \end{array}$$

ist eine wohldefinierte Punktabbildung.

Es operiert α somit auf den Parametern eines Punktes.

Die elementare lineare Gruppe

Die *elementare lineare Gruppe* $\mathrm{E}_2(R)$ wird von der Menge aller Matrizen

$$E(t) := \begin{pmatrix} t & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ mit } t \in R$$

erzeugt. Wegen

$$E(t)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & t \end{pmatrix} = E(0) \cdot E(-t) \cdot E(0),$$

läßt sich jedes Element von $\mathrm{E}_2(R)$ in der Form

$$E(t_1) \cdot E(t_2) \cdots E(t_n) =: E(t_1, t_2, \ldots, t_n)$$

schreiben, wobei $n \geq 0$ variabel ist (Cohn 1966).

Beispiel:

$$E(t_1, t_2) = \begin{pmatrix} t_1 t_2 - 1 & t_1 \\ -t_2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ein Hauptergebnis

Satz. *Sei $\alpha : R \to R'$ ein Jordan-Homomorphismus. Dann ist die Abbildung*

$$\overline{\alpha} : R(1,0) \cdot E(T) \mapsto R'(1',0') \cdot E(T^\alpha),$$

wobei $T = (t_1, t_2, \dots, t_n) \in R^n$ und $n \geq 0$ variabel ist, auf einer Teilmenge von $\mathbb{P}(R)$ wohldefiniert.

Beweisidee.

- Rekursionsformeln für die Bauart der Einträge von $E(t_1, t_2, \dots, t_n)$ (Cohn).
- Unendliche Serien von Identitäten für Jordan-Homomorphismen, z.B.

$$(t_1 t_2 t_3 + t_3 t_2 t_1)^\alpha = t_1^\alpha t_2^\alpha t_3^\alpha + t_3^\alpha t_2^\alpha t_1^\alpha.$$

Bemerkungen

Was leider nicht geht:

$$E(t_1, t_2, \dots, t_n) \mapsto E(t_1^\alpha, t_2^\alpha, \dots, t_n^\alpha)$$

ist im Allgemeinen nicht wohldefiniert.

Der Definitionsbereich von $\overline{\alpha}$ ist eine *Zusammenhangskomponente* von $\mathbb{P}(R)$ und stimmt genau dann mit $\mathbb{P}(R)$ überein, wenn $\mathrm{GE}_2(R) = \mathrm{GL}_2(R)$.

Die Abbildung $\overline{\alpha}$ läßt sich zu einer *harmonischen Abbildung* $\mathbb{P}(R) \to \mathbb{P}(R')$ erweitern (i.A. auf mannigfache Weise).

Die Ergebnisse lassen sich anwenden, um *Homomorphismen* von Kettengeometrien zu gewinnen.