Begegnungen mit Helmut Karzel

Hans Havlicek

TECHNISCHE UNIVERSITÄT WIEN
Vienna University of Technology

Forschungsgruppe Differentialgeometrie und Geometrische Strukturen
Institut für Diskrete Mathematik und Geometrie

Festkolloquium anlässlich des 90. Geburtstags von
Prof. Dr. Dr. h.c. Helmut Karzel
Berlin, 3. Februar 2018

Encounters with Helmut Karzel

This talk is a token of gratitude for the influence of

Helmut Karzel

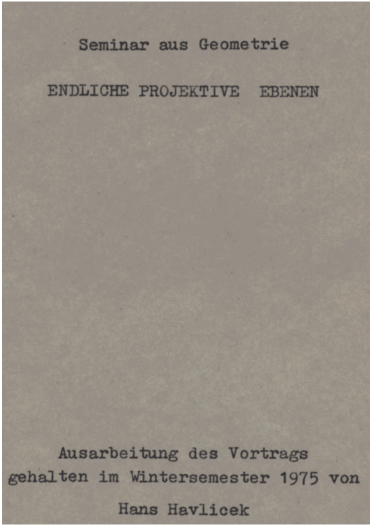
on my scientific work.

However, I am unable to express myself properly in a foreign language when speaking about non-mathematical topics.

These slides contain abridged and simplified translations of my presentation, which is delivered in German throughout.

Incidence groups

1975: A seminar talk



Seminar aus Geometrie

ENDLICHE PROJEKTIVE EBENEN

Ausarbeitung des Vortrags
gehalten im Wintersemester 1975 von
Hans Havlicek

Seminar on Geometry

FINITE PROJECTIVE PLANES

Seminar Report Winter Term 1975

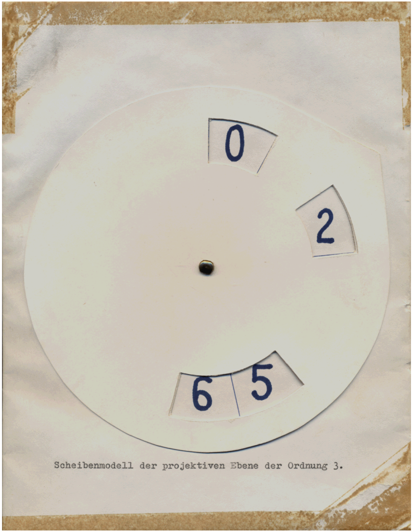
Joint seminar of Walter Wunderlich and Heinrich Brauner, Institute of Geometry, Vienna University of Technology.

Cyclic projective planes

One section of my seminar talk was about *cyclic projective planes*, a topic that goes back to James Singer [23] and Marshall Hall jr. [5].

Let me go on by presenting an example from my seminar talk, because it will pave the way to the work of Helmut Karzel.

A cyclic projective plane of order three



The points of this projective plane are the 13 elements of the cyclic group

$$(\mathbb{Z}_{13}, +),$$

the lines are the 13 translates of the *difference set*

$$D := \{0, 2, 5, 6\},$$

that is, lines are the sets

$$D + x \quad \text{with} \quad x \in \mathbb{Z}_{13}.$$

I learned about building "disk models" of finite cyclic projective planes from Rolf Riesinger, who had supported me in preparing my seminar talk.

Looking for Karzel in my seminar paper . . .

Literatur:

1. D. R. Hughes - F. C. Piper: Projective Planes; Graduate Texts in Mathematics VI, New York 1973: Springer Verlag.
2. G. Pickert: Projektive Ebenen; Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen Band 80, Berlin - Göttingen - Heidelberg 1955: Springer Verlag.
3. F. W. Stevenson: Projective Planes; San Francisco 1972: W. H. Freeman & Company

The name of Helmut Karzel cannot be found in the list of references of my seminar paper [6].

Page 27 of my seminar paper

5. Zum Abschluß zeigen wir folgende Aussage:

<u>Satz 1.6.3:</u> Jede endliche Desarguesebene ist eine zyklische projektive Ebene.

Bemerkung: Man vermutet, daß jede endliche zyklische Ebene desarguessch ist. KARZEL hat 1964 gezeigt, daß jede unendliche zyklische Ebene notwendig eine Nichtdesarguesebene sein muß.

Remark: It is conjectured that any *finite* cyclic projective plane is desarguesian. KARZEL established in 1964 that any *infinite* cyclic projective plane is necessarily non-desarguesian.

This short remark in the textbook of Daniel R. Hughes and Fred C. Piper [18] about Karzel's paper [19], raised my keen interest in the work of our jubilarian.

1976: A thesis in Descriptive Geometry

I asked Heinrich Brauner to be the advisor of my thesis in Descriptive Geometry. My suggestion was to continue the studies of my seminar talk with a focus on Karzel's work about *group spaces* and *incidence groups*, and related topics.

Brauner's answer was affirmative, and I started to work.

Geometry vs. algebra

There is one feature of Karzel's work that has fascinated me ever since: It is the interplay of geometry and algebra. For example, the theory of incidence groups links

- incidence spaces,
- collineations,
- projective spaces,
- groups,
- near fields.

A question

During my work I asked my advisor the following question:

Is there a projective plane admitting a group of collineations that acts regularly on set of points but does not act transitively on the set of lines?

Heinrich Brauner did not know an answer, and so he wrote a letter to Helmut Karzel.

June 1976: A reply from Munich

TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
INSTITUT FÜR GEOMETRIE
PROFESSOR DR. HELMUT KARZEL

8 MÜNCHEN 2, DEN 3.6.76
ARCISSTRASSE 21
POSTFACH 20 24 20
RUF 2105 / 82 97

Herrn
Prof. Dr. H. Brauner
Institut für Geometrie
Technische Universität Wien
Gußhausstr. 27-29

A-1040 Wien/Österreich

Lieber Herr Brauner!

Für die Begutachtung der Arbeit von Herrn Sachs danke ich Ihnen im Namen des Journals of Geometry.

Über Ihre Frage habe ich schon früher manchmal nachgedacht. Nach unseren bisherigen Überlegungen dürfte ein Beispiel recht kompliziert sein. Zunächst gilt, daß jede kommutative transitiv auf der Punktmenge operierende Untergruppe der Kollineationsgruppe auch auf der Geradenmenge transitiv operiert. Bisher sind nur mit Hilfe von kommutativen Gruppen nicht desarguessche projektive Ebenen konstruiert worden, so daß diese Gruppe eine Untergruppe der Kollineationsgruppe ist, die auf den Punkten transitiv operiert. Um Beispiele desarguesscher projektiver Ebenen, die eine scharf transitive auf der Punktmenge operierende Kollineationsgruppe gestatten, die nicht auf der Geradenmenge transitiv operiert, müßte man von einem echten Schiekörper K ausgehen, der keinen Antiautomorphismus gestattet. Über diesem müßte man einen Fastkörper F konstruieren, so daß die multiplikative Gruppe von K Normalteiler der multiplikativen Gruppe von F ist und Rang [F : K] = 3 ist. Selbst wenn man einen solchen Fastkörper konstruiert hätte, wäre damit noch nicht klar, ob die zugehörige Kollineationsgruppe auf der Geradenmenge nicht transitiv operiert. Ich werde die Frage nach der Konstruktion solcher Fastkörper meinem Mitarbeiter Herrn Kist und Herrn Wähling aus Hamburg vorlegen, der auf diesem Gebiet der beste Kenner ist.

Mit herzlichen Grüßen
Ihr
Helmut Karzel

On the left hand side you can see Karzel's reply:

I thought about your question in the past. Our considerations so far have shown that finding an explicit example appears to be an extremely intricate task . . .

I expressed my thanks to Helmut Karzel in a letter dated June 23, 1976.

Looking for Karzel in my thesis . . .

L i t e r a t u r v e r z e i c h n i s:

1. Baer R., Polarities in finite projective planes, Bull. of the A.M.S., vol. 52 (1946), S. 77 ff.
2. Brandis A., Über die multiplikative Struktur von Körpererweiterungen, Math. Zeitschrift 87 (1965), S. 71 - 73
3. Brauner H., Projektive Geometrie I, Vorlesungsskriptum
4. Brauner H., Projektive Geometrie II, Vorlesungsskriptum
5. Brauner H., Geometrie projektiver Räume I, Mannheim, Wien, Zürich 1976, B.I. Wissenschaftsverlag
6. Brauner H., Geometrie projektiver Räume II, Mannheim, Wien, Zürich 1976, B.I. Wissenschaftsverlag
7. Ellers E. und Karzel H., Involutorische Geometrien, Abh. des Math. Sem. der Univ. Hamburg 25 (1961), S 93 - 104
8. Ellers E. und Karzel H., Kennzeichnung elliptischer Gruppenräume, Abh. des Math. Sem. der Univ. Hamburg 26 (1963), S. 55 - 77

Looking for Karzel in my thesis . . . (cont.)

9. Hall. M., Cyclic projective planes, Duke Math. Journal 14 (1947), S. 1079 - 1090

10. Hornfeck B., Algebra, Berlin 1969, de Gruyter & Co.

11. Hughes D. R. - Piper F. C., Projective Planes (Graduate Texts in Mathematics 6), New York, Heidelberg, Berlin 1973, Springer Verlag

12. Karzel H., Verallgemeinerte elliptische Geometrien und ihre Gruppenräume, Abh. des Math. Sem. der Univ. Hamburg 24 (1960), S. 167 - 188

13. Karzel H., Kommutative Inzidenzgruppen, Archiv d. Math. 13 (1962), S. 535 - 538

14. Karzel H., Ebene Inzidenzgruppen, Archiv d. Math. 15 (1964), S. 10 - 17

15. Karzel H., Bericht über projektive Inzidenzgruppen, Jahresbericht d. D.M.V. 67 (1965), S. 58 - 92

16. Karzel H., Unendliche Dicksonsche Fastkörper, Archiv d. Math. 16 (1965), S. 247 ff.

17. Karzel H., Projektive Räume mit einer kommutativen transitiven Kollineationsgruppe, Math. Zeitschr. 87 (1965), S. 74 - 77

Looking for Karzel in my thesis . . . (cont.)

18. Lausch H. - Nöbauer W., Algebra of Polynomials, Amsterdam, London 1973, North Holland Publishing Co.
19. Pickert G., Projektive Ebenen (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen, Band 80), Berlin, Heidelberg, New York 1975
20. Rosati L. A., Piani proiettivi desarguesiani non ciclici, Boll. della U.M.I. 12 (1957), S. 230 - 240.
21. Stevenson F. W., Projective Planes, San Francisco 1973, W. H. Freeman & Co.
22. Zassenhaus H., Über endliche Fastkörper, Abh. d. Math. Sem. d. Univ. Hamburg 11 (1936), S. 187 - 220

Nachtrag:

23. Ellers E. - Karzel H., Endliche Inzidenzgruppen, Abh. d. Math. Sem. d. Univ. Hamburg 27 (1964), S. 250 - 264.
24. Karzel H., Normale Fastkörper mit kommutativer Inzidenzgruppe, Abh. d. Math. Sem. d. Univ. Hamburg 28 (1965), S. 124 ff.

1978 to date

Even though I never made an explicit contribution to the theory of incidence groups, this topic has played a prominent role in numerous of my papers, some of these co-authored by Stefano Pasotti, Silvia Pianta, and Rolf Riesinger.

The story starts with an article on *chain geometries* [7] in the year 1983, continues with a paper on *orbits of collineation groups* [8], and leads us to ongoing work on *Clifford parallelism* and its generalisations [9], [10], [12], [13], [14], [15].

The book of Helmut Karzel and Hans-Joachim Kroll, *Geschichte der Geometrie seit Hilbert* [21], summarises the development of this topic up to the year 1988. See also the thesis of Joachim Otto [22].

Veronese varieties

Oberwolfach 1986

Front: Wefelscheid, Burau, Karzel.
Middle: Havlicek, Herzer, Sörensen, Windelberg.
Back: Timmermann, Kroll, Hotje, Schröder, Kist, Kreuzer.

Oberwolfach 1986: A contribution by Karzel . . .

Journal of Geometry
Vol.28 (1987)

0047-2468/87/010086-16$1.50+0.20/0

ÜBER EINEN FUNDAMENTALSATZ DER SYNTHETISCHEN ALGEBRAISCHEN GEOMETRIE VON W. BURAU UND H. TIMMERMANN

Werner Burau zum 80. Geburtstag gewidmet

Helmut Karzel

This article by Helmut Karzel [20] deals with problems that arise in the study of *Segre* and *Veronese varieties* when the characteristic of the ground field is different from zero.

. . . and its impact

Karzel's paper from the previous slide together with related work by Horst Timmermann [24], [25], [26] and Armin Herzer [17] provided the incentive for the work of Johannes Gmainer, Corrado Zanella, and myself ([1], [2], [3], [4], [11], [16]) in the period of 1996 to 2003.

1999: Gmainer's thesis

DISSERTATION

Rationale Normkurven in Räumen
mit positiver Charakteristik

ausgeführt zum Zwecke der Erlangung des akademischen Grades
eines Doktors der technischen Wissenschaften unter der Leitung von

Ao.Univ.Prof. Mag. Dr. Hans HAVLICEK
E 113
Institut für Geometrie

eingereicht an der Technischen Universität Wien
Technisch-Naturwissenschaftliche Fakultät

von

DI. Johannes GMAINER
Matr.: 9125153
Hauptstraße 71, 2454 Sarasdorf

Wien, im Jänner 1999

THESIS

Normal rational curves in spaces
with positive characteristic

A normal rational curve is the image of a projective line over a field *F* under a Veronese embedding.

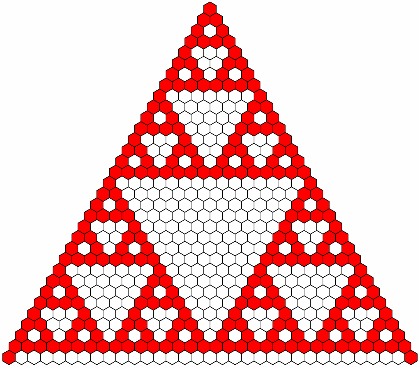
Geometry vs. number theory

A main outcome of Gmainer's work [1] is as follows:

If the ground field F has characteristic $p > 0$ and $|F|$ is sufficiently large then the geometric properties of normal rational curves are intimately related with *Pascal's triangle modulo p* or, in other words, the triangular array of binomial coefficients $\binom{n}{k}$ modulo p.

The pictures on the next pages have been taken from the thesis of Johannes Gmainer.

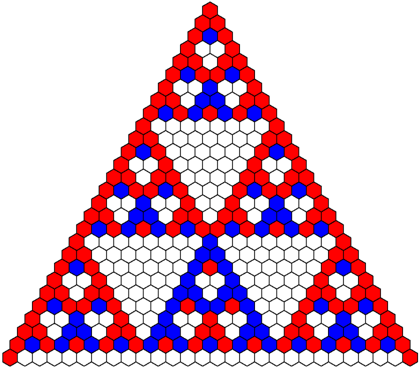
Pascal's triangle modulo 2, $0 \leq n \leq 32$



Residue classes are encoded by colours:

white = 0, red = 1.

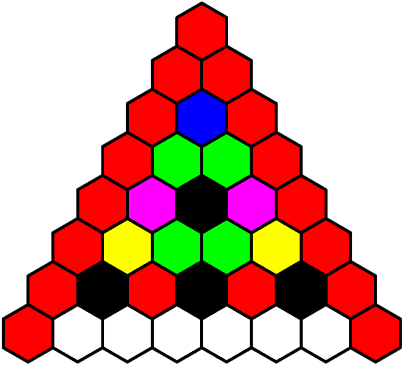
Pascal's triangle modulo 3, $0 \leq n \leq 27$



Residue classes are encoded by colours:

white = 0, red = 1, blue = 2.

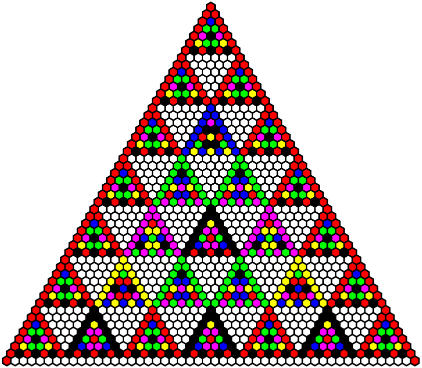
Pascal's triangle modulo 7, $0 \leq n \leq 7$



Residue classes are encoded by colours:

white = 0, red = 1, blue = 2, green = 3, magenta =4, yellow = 5, black = 6.

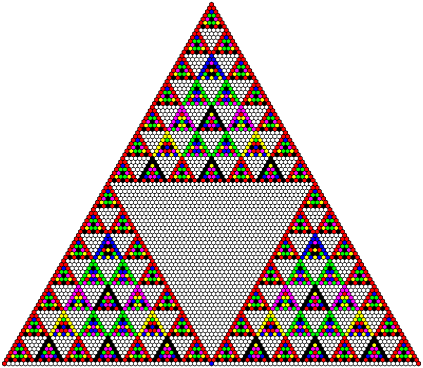
Pascal's triangle modulo 7, $0 \leq n \leq 49$



Residue classes are encoded by colours:

white = 0, red = 1, blue = 2, green = 3, magenta =4, yellow = 5, black = 6.

Pascal's triangle modulo 7, $0 \le n \le 98$



Residue classes are encoded by colours:

white = 0, red = 1, blue = 2, green = 3, magenta =4, yellow = 5, black = 6.

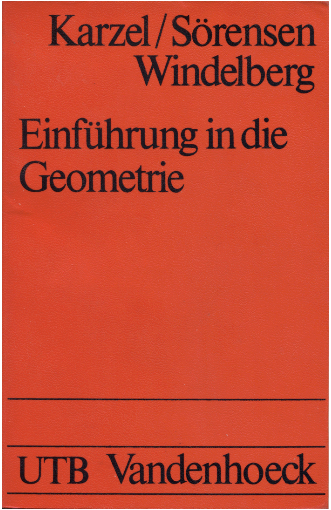
Teaching

An excellent textbook

During the 1990s, I repeatedly gave lectures on

Foundations of Geometry,

and I based them on this book:



References

[1] J. Gmainer. *Rationale Normkurven in Räumen mit positiver Charakteristik*. Dissertation, Technische Universität Wien, 1999.

[2] J. Gmainer, Pascal's triangle, normal rational curves, and their invariant subspaces. *Eur. J. Comb.* **22** (2001), 37–49.

[3] J. Gmainer, H. Havlicek, A dimension formula for the nucleus of a Veronese variety. *Linear Algebra Appl.* **305** (2000), 191–201.

[4] J. Gmainer, H. Havlicek, Nuclei of normal rational curves. *J. Geom.* **69** (2000), 117–130.

[5] M. Hall, Jr., Cyclic projective planes. *Duke Math. J.* **14** (1947), 1079–1090.

References (cont.)

[6] H. Havlicek. *Endliche projektive Ebenen*. Seminar paper, Institut für Geometrie, Technische Universität Wien, 1975.

[7] H. Havlicek, Eine affine Beschreibung von Ketten. *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* **53** (1983), 266–275.

[8] H. Havlicek, Durch Kollineationsgruppen bestimmte projektive Räume. *Beiträge Algebra Geom.* **27** (1988), 175–184.

[9] H. Havlicek, On Plücker transformations of generalized elliptic spaces. *Rend. Mat. Appl. (7)* **15** (1995), 39–56.

[10] H. Havlicek, A characteristic property of elliptic Plücker transformations. *J. Geom.* **58** (1997), 106–116.

References (cont.)

[11] H. Havlicek, Veronese varieties over fields with non-zero characteristic: a survey. *Discrete Math.* **267** (2003), 159–173.

[12] H. Havlicek, A note on Clifford parallelisms in characteristic two. *Publ. Math. Debrecen* **86** (2015), 119–134.

[13] H. Havlicek, Clifford parallelisms and external planes to the Klein quadric. *J. Geom.* **107** (2016), 287–303.

[14] H. Havlicek, S. Pasotti, S. Pianta. Clifford-like parallelisms. Preprint, 2018.

[15] H. Havlicek, R. Riesinger, Pencilled regular parallelisms. *Acta Math. Hungar.* **153** (2017), 249–264.

References (cont.)

[16] H. Havlicek, C. Zanella, Quadratic embeddings. *Beiträge Algebra Geom.* **38** (1997), 289–298.

[17] A. Herzer, Die Schmieghyperebenen an die Veronese-Mannigfaltigkeit bei beliebiger Charakteristik. *J. Geom.* **18** (1982), 140–154.

[18] D. R. Hughes, F. C. Piper, *Projective Planes*. Springer, New York 1973.

[19] H. Karzel, Projektive Räume mit einer kommutativen transitiven Kollineationsgruppe. *Math. Z.* **87** (1965), 74–77.

[20] H. Karzel, Über einen Fundamentalsatz der synthetischen algebraischen Geometrie von W. Burau und H. Timmermann. *J. Geom.* **28** (1987), 86–101.

References (cont.)

[21] H. Karzel, H.-J. Kroll, *Geschichte der Geometrie seit Hilbert*. Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt 1988.

[22] J. Otto. *Über projektiv eingebettete Inzidenzgruppen*. Dissertation, Fachbereich Mathematik und Informatik, Universität Hannover, 1999.

[23] J. Singer, A theorem in finite projective geometry and some applications to number theory. *Trans. Amer. Math. Soc.* **43** (1938), 377–385.

[24] H. Timmermann. *Ein geometrischer Zugang zu den Veronese- und Grassmannmannräumen*. Diplomarbeit, Universität Hamburg, 1970.

References (cont.)

[25] H. Timmermann, Descrizioni geometriche sintetiche di geometrie proiettive con caratteristica $p > 0$. *Ann. Mat. Pura Appl. IV. Ser.* **114** (1977), 121–139.

[26] H. Timmermann. *Zur Geometrie der Veronesemannigfaltigkeit bei endlicher Charakteristik*. Habilitationsschrift, Universität Hamburg, 1978.