

# Stereographische Projektion von Quadriken

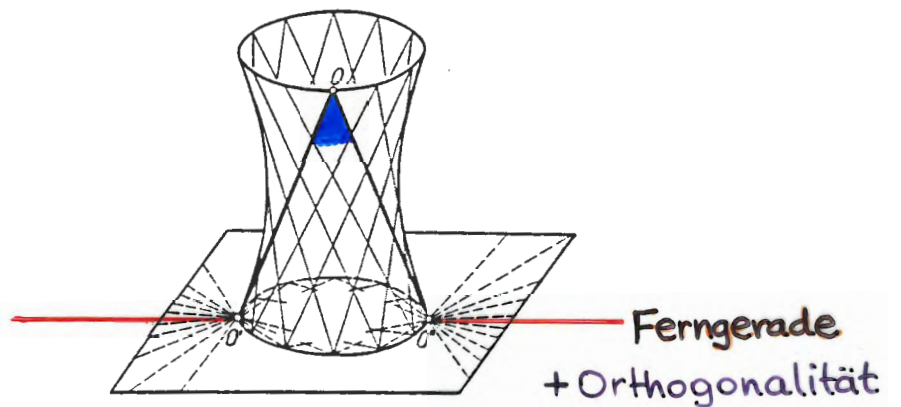


Abb. 67.

## stereographische Projektion

Hipparchos (150 v. Chr.)

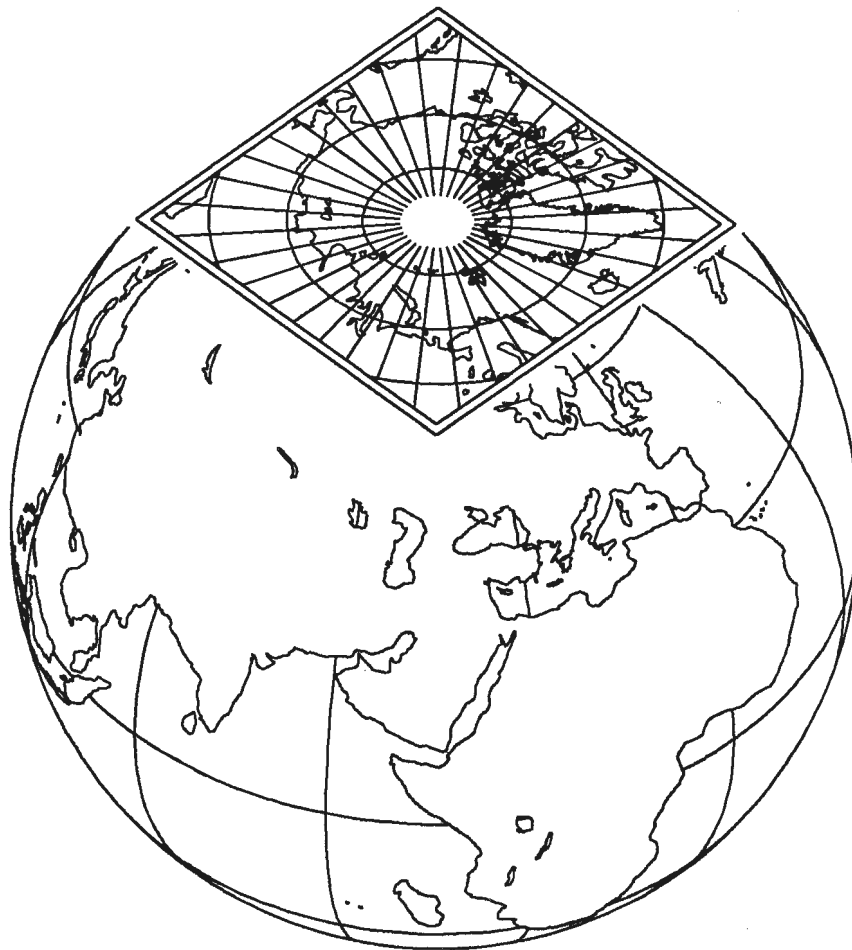
Ptolemäus (2. Jh.)

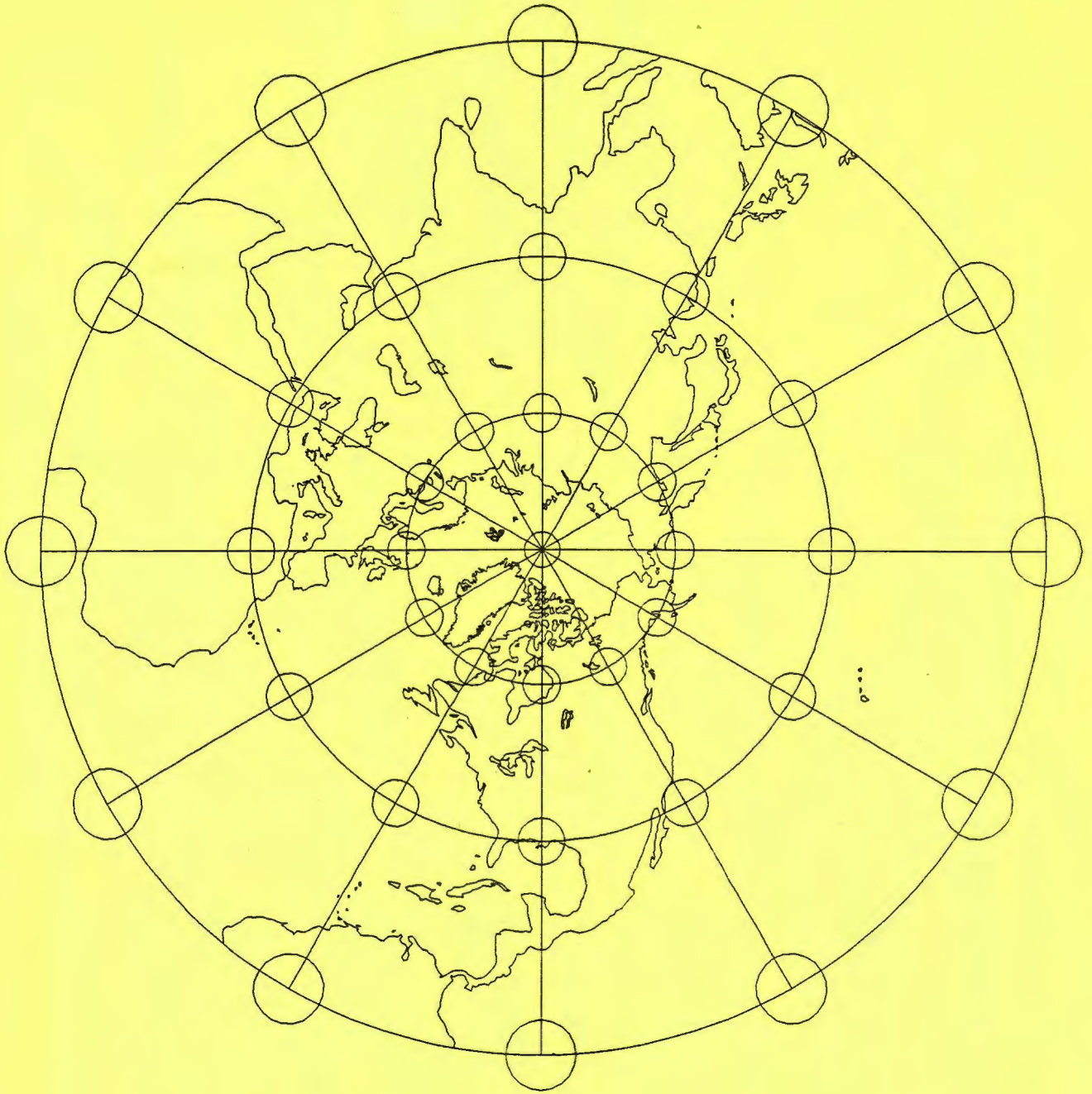
Nemorarius (13. Jh.) ... Kreistreu

Mercator (1587) ... winkeltreu

(Gerhard Kremer)

Aguillonius (1613) ... „stereo-graphisch“





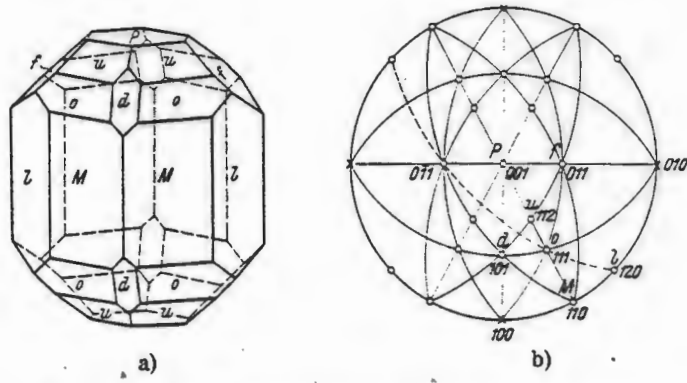


Abb. 63. Topas. a) Parallelperspektivisches Kristallbild; b) stereographische Projektion

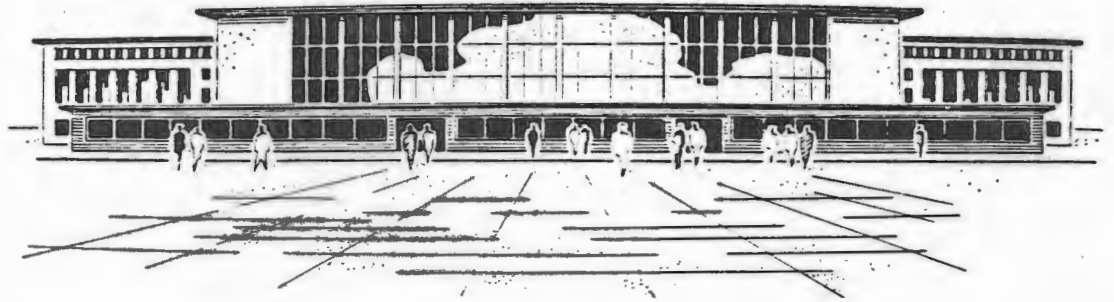


Abb. 205. Stereographische Perspektive (Westbahnhof Wien)

## Projektiver Raum

Kepler (1604)

... den anderen Brennpunkt der Parabel hat man sich entweder innerhalb oder außerhalb des Kegelschnitts vorzustellen (*fingendus*) auf der Achse in unendlichem Abstand vom ersten Brennpunkt (*infinito intervallo a priore remotus*).

*focus caecus*

Frank R.: Warum ist der euklidische Raum Teil eines projektiven Raumes?  
Mitt. Math. Ges. Hamburg 11 (1982-1989)  
557-563.

Quadratische Menge  $\mathcal{M}$  in einem projektiven Raum  $\mathcal{P}$ :

① Für jede Gerade  $g \subset \mathcal{P}$  gilt

- $g \subset \mathcal{M}$
- $\#(g \cap \mathcal{M}) = 1$  } Tangente
- $\#(g \cap \mathcal{M}) = 2$  Sekante
- $\#(g \cap \mathcal{M}) = 0$  Passante

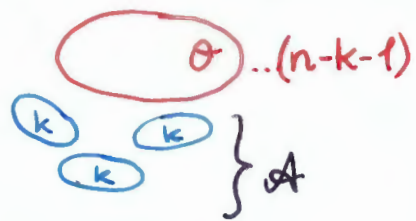
② Für jeden Punkt  $P \in \mathcal{M}$  ist die aus allen Tangenten durch  $P$  und  $\{P\}$  gebildete Vereinigungsmenge

- eine Hyperebene gewöhnlicher Punkt
- ganz  $\mathcal{P}$  Doppelpunkt

(F. BUEKENHOUT 1969)

$\mathbb{P}^n(K)$   $K$ .. kommutativ  $3 \leq n < \infty$ ,  $1 \leq k < n-1$

affiner Raum der verallgemeinerten Reguli



R. Metz (1981)

$$\dim A = (n-k)(k+1)$$

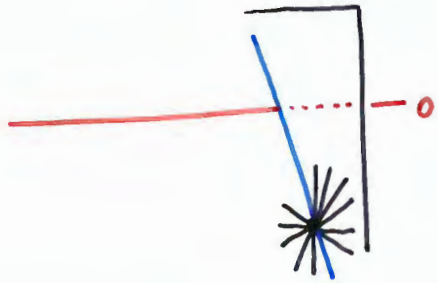
A. Herzer, G. Geise, H.H.

$K$  kommutativ ... stereographische Projektion der zugehörigen Grassmann-Varietät

$K$  nicht kommutativ ... geht auch, aber ...



$\mathcal{L} \setminus \mathcal{L}_0 \dots$  vierdimensionaler pseudo-euklidischer Raum  $(+ + - -) \mathcal{A}$



isotrope Gerade  
von  $\mathcal{A}$

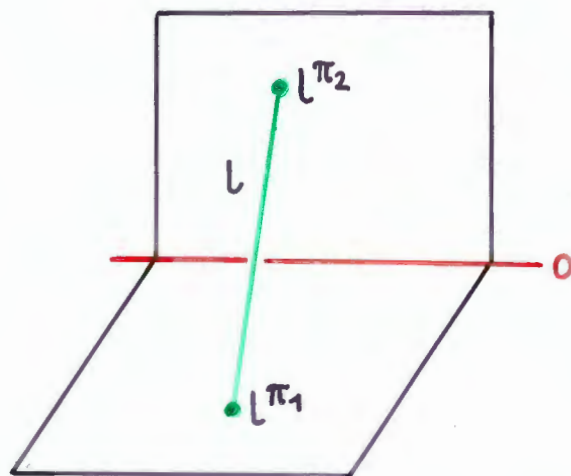


nicht isotrope Gerade  
von  $\mathcal{A}$

Ebenen von  $\mathcal{A}$  : gewisse lineare Kongruenzen

Hyperebenen von  $\mathcal{A}$  : gewisse lineare Komplexe

Rouxel (1991), H.H. (1983-...)



$\pi_i \hat{=} \text{Parallelprojektion in } \mathcal{A}$   
 $\times \text{ Affinität}$

$\mathcal{E}$ .. Ebene von  $\mathcal{A}$ ,  $\pi_1|_{\mathcal{E}}$  injektiv  $\Rightarrow$

$(\pi_1|_{\mathcal{E}})^{-1}\pi_2 \dots$  affine Abbildung

( $\Leftrightarrow$  projektive Erzeugung der Netze)

$\mathcal{H}$ ... Hyperebene von  $\mathcal{A}$ ,  $\pi_1|_{\mathcal{H}}$  surjektiv  $\Rightarrow$

"Ordnungsbedingung" für  $l^{\pi_1}, l^{\pi_2}$  ( $l \in \mathcal{H}$ )

( $\Leftrightarrow$  Sylvestersche Erzeugung der linearen Komplexe)

$A$  ... kommutative, assoziative  $k$ -Algebra,  $1 \in K \subset A$ .

$A^*$  ... Einheitsengruppe von  $A$ .

Projektive Gerade über  $A$ :  $(x,y)A^*$  mit  
 $(x,y) \in A \times A$ ,  $\langle x,y \rangle = A$ .

Kreise (Ketten, Zykel) ... Doppelverhältnis von  
je vier Punkten aus  $K \cup \{\infty\}$ .

Klassische Beispiele ( $K = \mathbb{R}$ )

$$A = \mathbb{C} \quad (i^2 = -1)$$

$$A = \mathbb{D} \quad (\varepsilon^2 = 0)$$

$$A = \mathbb{A} \quad (j^2 = +1)$$

---

Affiner Raum über  $A$ :  $\mathcal{A}(A,K)$

$$(x,y)A^* \mapsto \frac{y}{x} \in A \quad \text{falls } x \in A^*$$

affiner Ausschnitt bzgl.  $\infty = (0,1)A^*$

Ketten  $\rightsquigarrow$  Geraden, Normkurven (H.H., Herzer)

Problem: Beschreibe diesen Abschluß von  $\mathcal{A}(A,K)$   
rein geometrisch.

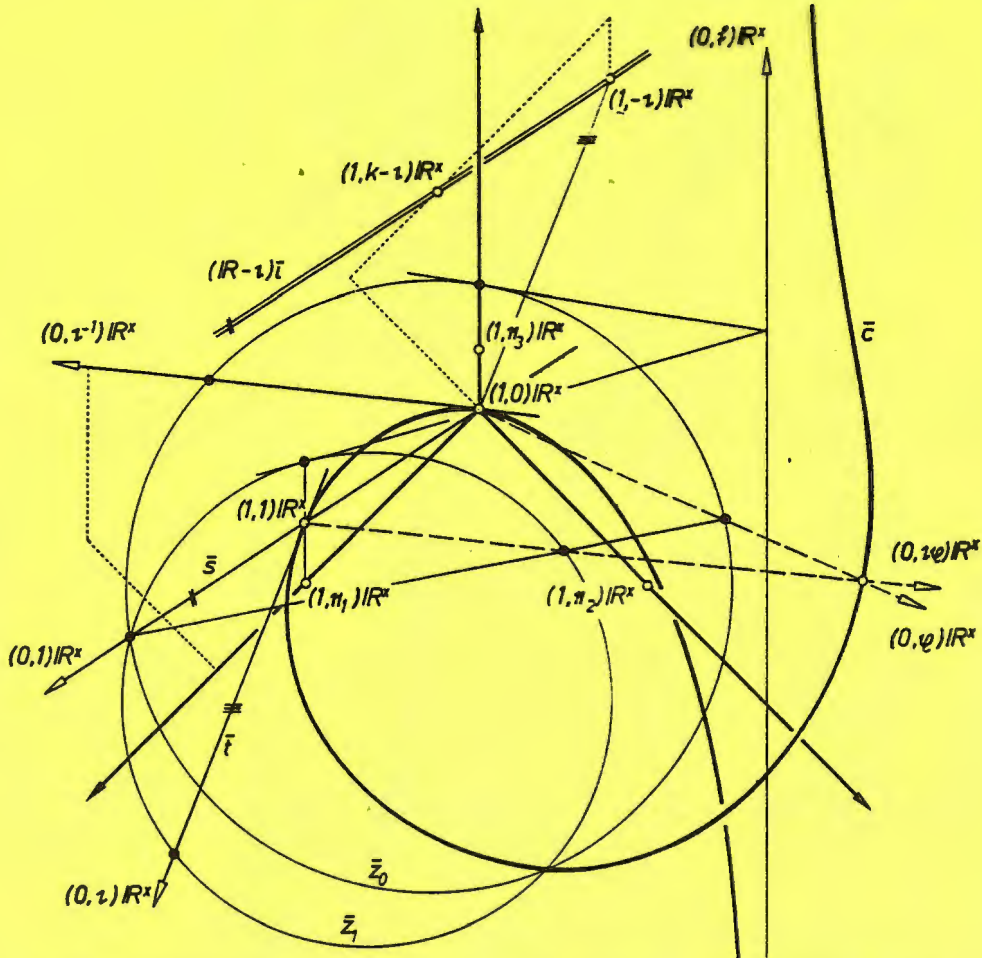
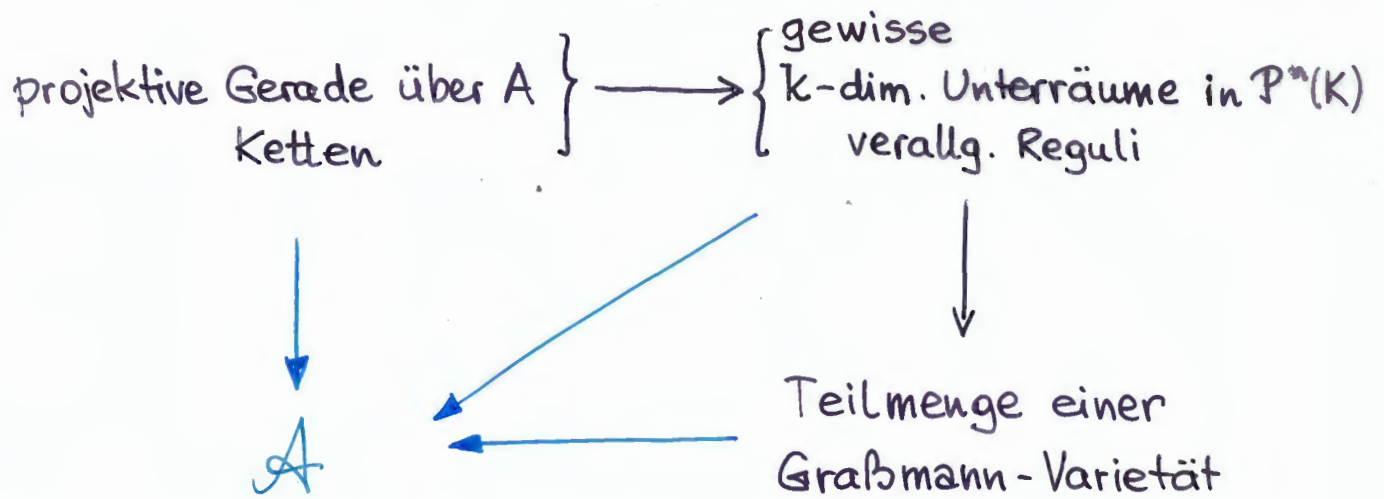


Fig. 4. Die Algebra  $(K, \Omega) = (\mathbb{R}, \mathbb{C} \oplus \mathbb{R})$  besitzt die Basis  $\{e_1 = (1 | 0), e_2 = (i | 0), e_3 = (0 | 1)\}$  und bestimmt einen reellen projektiven 3-Raum. Durch das Tripel  $(0,1, c\mathbb{R}^3)$  mit  $c = (1,5 + 0,75i | 1)$  wird ein  $\mathbb{U}/\mathbb{R}^3$ -Bündelisomorphismus  $\bar{\varphi}$  mit dreidimensionalem Grundunterraum festgelegt. Das Erzeugnis  $\bar{c}$  von  $\bar{\varphi}$  ist daher eine Kubik. In  $\mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{C} \oplus \mathbb{R})$  liefert der Schnitt der Geraden  $\mathbb{R} - c$  mit dem Singularitätskegel [1, S. 308] den Punkt  $k - c = (-0,5 - 0,75i | 0)$ , so daß  $f_c$  den Eigenwert  $k = 1 = (1 | 1) \in \mathbb{R} \subset (\mathbb{C} \oplus \mathbb{R})$  und  $\bar{c}$  genau einen Fernpunkt  $(0, \bar{f}) \mathbb{R}^3 = (0, e_3) \mathbb{R}^3$  besitzt. In  $\Sigma(\mathbb{R}, \mathbb{C} \oplus \mathbb{R})$  hat die Kette  $\bar{c}$  nach (1) den uneigentlichen Punkt  $(1, 1 - c) \mathbb{U}$ . Figur 4 zeigt einen Parallelriß der Kubik  $\bar{c}$ , welche gemäß [5, S. 198] im Durchschnitt der quadratischen Sehnenkegel mit Spitzen  $(1,0) \mathbb{R}^3$  und  $(1,1) \mathbb{R}^3$  enthalten ist. Die Parallelrisse der Spurkegelschnitte  $\bar{z}_0$  und  $\bar{z}_1$  dieser Sehnenkegel in der Ebene  $(0, e_1) \mathbb{R}^3 \vee (0, e_2) \mathbb{R}^3 \vee (1, e_3 \cdot 2) \mathbb{R}^3$  sind bei der gewählten Angabe Kreise der Zeichenebene.

# Kopplung zwischen Kreisgeometrie und Graßmann-Varietäten



M. Werner (1982) , H. Hotje (1985)