Kettengeometrien mit großem Durchmesser

Hans Havlicek

Technische Universität Wien

A. BLUNCK, H.H.: *The Connected Components of the Projective Line over a Ring*, Advances in Geometry.

Dresden DMV 2000

Die projektive Gerade über einem Ring

R ... assoziativer Ring mit 1.

Projektive Gerade über R:

$$\mathbb{P}(R) := R(1,0)^{\mathrm{GL}_2(R)}$$

$(a,b) \in R^2$ erste Zeile einer invertierbaren Matrix $\Rightarrow$ $R(a,b) \in \mathbb{P}(R)$.

Distanzrelation:

$$\vartriangle := (R(1,0), R(0,1))^{\mathrm{GL}_2(R)}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(R) \Rightarrow R(a,b) \vartriangle R(c,d)$$

Kettengeometrie $\Sigma(K,R)$:

$K \subset R$ Unterkörper mit $1 \in K$ $\Rightarrow$ *Ketten*.
Distant $\Leftrightarrow$ durch eine Kette verbunden.

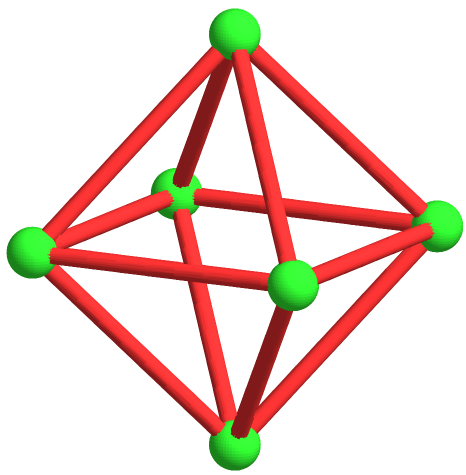
Der Distanzgraph

Ecken . . . Punkte von $\mathbb{P}(R)$.

Kanten . . . ungeordnete Paare distanter Punkte.

Beispiele:

- R Körper $\Rightarrow$ vollständiger Graph.
- $R = \mathbb{Z}_2[\varepsilon]$, duale Zahlen über $\mathbb{Z}_2$:



Grundbegriffe

Distanzgraph $\mathbb{P}(R)$:

- *Zusammenhangskomponenten*,
- *Abstand* (kürzester Kantenzug),
- *Durchmesser* D (max. Abstand oder ∞).

Vgl. auch den Vortrag von Andrea Blunck.

Kleiner Durchmesser: $D \leq 2$

Beispiele:

- $R = \{0\} \Leftrightarrow D = 0$.
- R Körper $\Leftrightarrow D = 1$.
- R hat stabilen Rang $2 \Rightarrow \mathbb{P}(R)$ zusammenhängend und $D \leq 2$ (A. Herzer).

$$R(1,0) \vartriangle R(t_1,1) \vartriangle R(t_2t_1+1,t_2) \ (t_1,t_2 \in R)$$

$\Rightarrow$ alle Punkte von $\mathbb{P}(R)$ (C. Bartolone).

Großer Durchmesser: $D \geq 3$

Beispiel:

U ... unendlichdimensionaler Vektorraum über K.

Betrachten den projektiven Raum über $V := U \times U$.

$\mathcal{G}$ ... alle Unterräume von V, die ein isomorphes Komplement besitzen.

Projektive Darstellung von $\mathbb{P}(R)$, $R = \mathrm{End}_K(U)$:

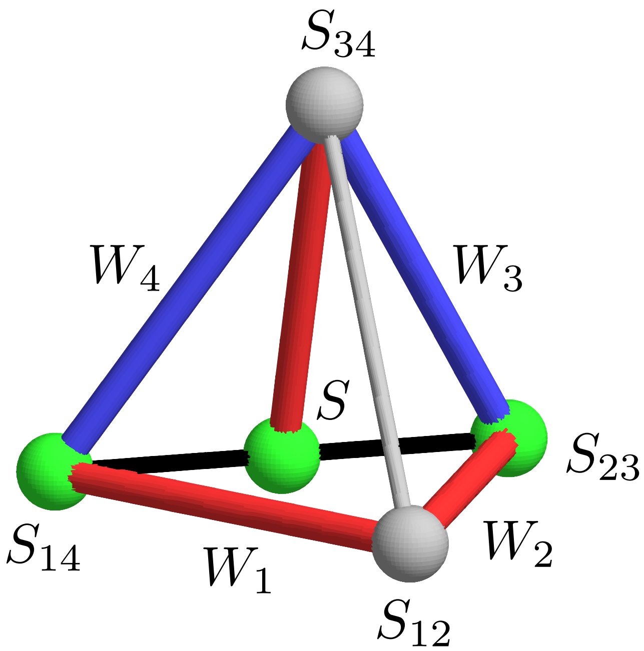
$$\Phi : \mathbb{P}(R) \to \mathcal{G} : R(\alpha, \beta) \mapsto \{(u^\alpha, u^\beta) \mid u \in U\}$$

Φ ist bijektiv, $\triangle \Leftrightarrow$ komplementäre Φ-Bilder.

Satz. *$\mathbb{P}(R)$ ist zusammenhängend und hat Durchmesser $D = 3$.*

Beweis: Abstand ≤ 2

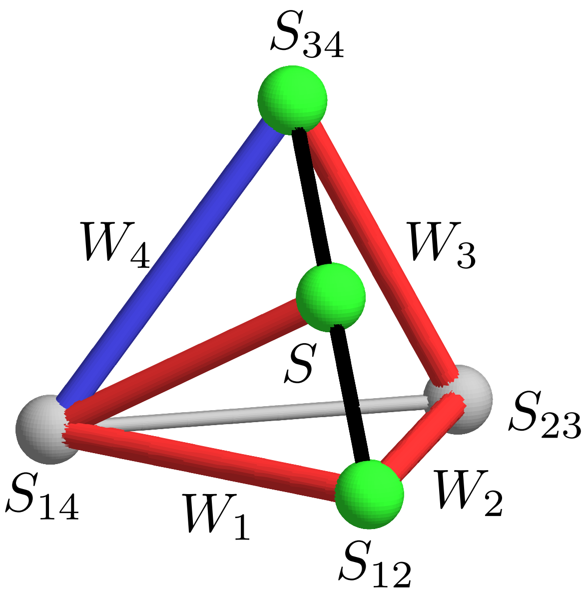
Voraussetzung: $W_1, W_2 \in \mathcal{G}$, $S_{23} \cong S_{14}$.



$$W_1 \bigtriangleup (S_{34} \oplus S) \bigtriangleup W_2$$

Beweis: Abstand ≤ 3

Voraussetzung: $W_1, W_2 \in \mathcal{G}$, $S_{23} \ncong S_{14}$.



Hier gilt $\dim S_{12} = \dim W_1$, weil sonst

$$\dim W_1 = \max\{\dim S_{12}, \dim S_{14}\} = \dim S_{14} =$$
$$\dim W_2 = \max\{\dim S_{12}, \dim S_{23}\} = \dim S_{23}.$$

Analog folgt $\dim S_{34} = \dim W_3$, also $S_{12} \cong S_{34}$ und

$$W_1 \triangle W_3 \triangle (S_{14} \oplus S) \triangle W_2.$$

Beweis: Abstand 3

Wegen $\dim U = \infty$ gibt es $W_1 \in \mathcal{G}$ und $W_2 \leq W$ mit

- $W_2 \leq W_1$,
- $\dim W_1/W_2 = 1$.

Dann gilt $W_2 \in \mathcal{G}$ und

$$\operatorname{dist}(W_1, W_2) = 3.$$

Bemerkung: *verschachtelte Punkte*.

Durchmesser $D > 3$

Beispiele:

- $D = 4, 5 \ldots$: ???

- $D = \infty$:

  $R = K[X]$, X zentrale Unbestimmte über einem Körper K.

Weitere Beispiele für $D = \infty$ ...