

Abbildungen in der Geometrie

Hans Havlicek

Institut für Geometrie

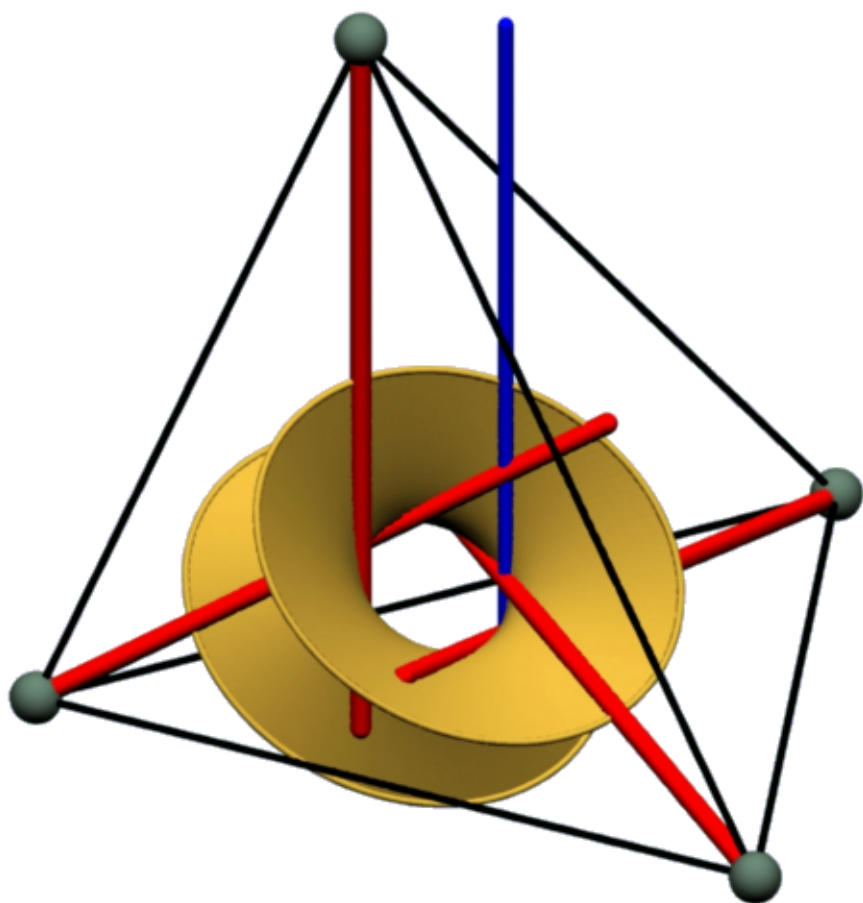


TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
WIEN

VIENNA
UNIVERSITY OF
TECHNOLOGY

Zur Theorie linearer [Abbildungen](#) I. Zur Theorie linearer [Abbildungen](#) II. [Einbettung](#) projektiver Desargues-Räume. [Normisomorphismen](#) und Normkurven endlichdimensionaler projektiver Desargues-Räume. Die linearen [Geradenabbildungen](#) aus dreidimensionalen projektiven Pappos-Räumen. Die automorphen [Kollineationen](#) nicht entarteter Normkurven. Erzeugnisse projektiver [Bündelisomorphismen](#). [Erzeugung](#) quadratischer Varietäten bei beliebiger Charakteristik. Über die [Abbildungsgleichungen](#) einer [Normalprojektion](#). Durch [Kollineationsgruppen](#) bestimmte projektive Räume. Von der [Darstellenden Geometrie](#) zu [Kartenentwürfen](#) am Personal Computer. Dual Spreads Generated by [Collineations](#). Die [Projektivitäten](#) und [Antiprojektivitäten](#) der Quaternionengeraden. Invariant Points of Circular [Transformations](#). A Generalization of Brauner's Theorem on Linear [Mappings](#). Der [Entwurf](#) von Winkel oder „Wieviel Geometrie steckt in einer [Schulwandkarte](#)?“. On Plücker [Transformations](#) of Generalized Elliptic Spaces. On [Isomorphisms](#) of Grassmann Spaces. Symplectic Plücker [Transformations](#). On the Matrices of Central Linear [Mappings](#). Quadratic [Embeddings](#). A Characteristic Property of Elliptic Plücker [Transformations](#). [Isomorphisms](#) of Affine Plücker Spaces. [Chow's Theorem](#) for Linear Spaces. Weak Linear [Mappings](#) – A Survey. On Linear [Morphisms](#) of Product Spaces. Projective [Representations](#) I. Projective [Representations](#) II. On [Automorphisms](#) of Flag Spaces. Jordan [Homomorphisms](#) and Harmonic [Mappings](#). On [Bijections](#) that Preserve Complementarity of Subspaces. Radical Parallelism on Projective Lines and Non-linear [Models](#) of Affine Spaces.

Darstellende Geometrie



Von K. POHLKE wurde im Jahre 1853 vermutet:

Satz. *Jede surjektive affine Abbildung $\mathbb{E}_3 \rightarrow \mathbb{E}_2$ lässt sich in eine Parallelprojektion und eine Ähnlichkeit zerlegen.*

Kurz: Jede solche Abbildung ist vom *Pohlke-Typ*.

Gilt nicht bei höherer Dimension.

Satz. *Eine surjektive lineare Abbildung $f : \mathbb{V}_n \rightarrow \mathbb{V}_m$ ist genau dann vom Pohlke-Typ, falls der kleinste Eigenwert von $f \circ f_{\text{ad}}$ mindestens die Vielfachheit $2m - n$ besitzt.*

K. VALA, V. HAVEL.

Es sei e_1, e_2, \dots, e_n eine ONB von \mathbb{V}_n .

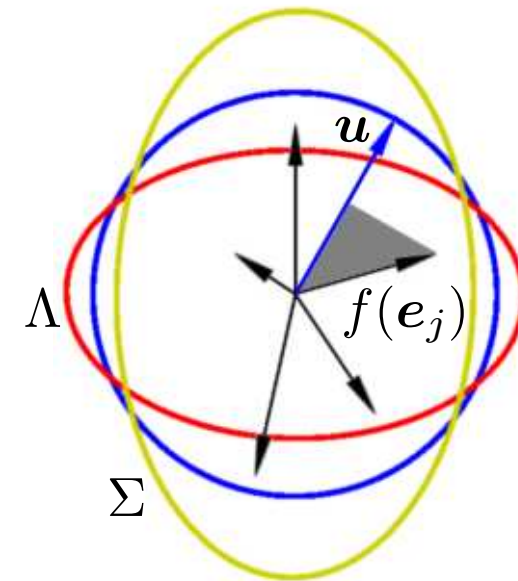
$$\Lambda := \{t(\mathbf{u})\mathbf{u} \mid \mathbf{u} \in S_m\}$$

mit

$$t(\mathbf{u}) := \left(\sum_{j=1}^n (f(\mathbf{e}_j) \cdot \mathbf{u})^2 \right)^{-1/2}.$$

Σ sei der Umriss der Einheitssphäre S_n .

H. NAUMANN, H. VOGLER, H. BRAUNER, H. STACHEL.



$m = 2$



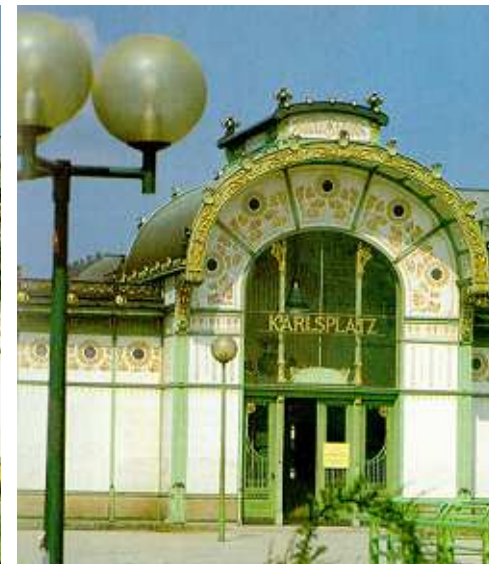
Zentralprojektion mal . . .



Kollineation



Affinität



Ähnlichkeit

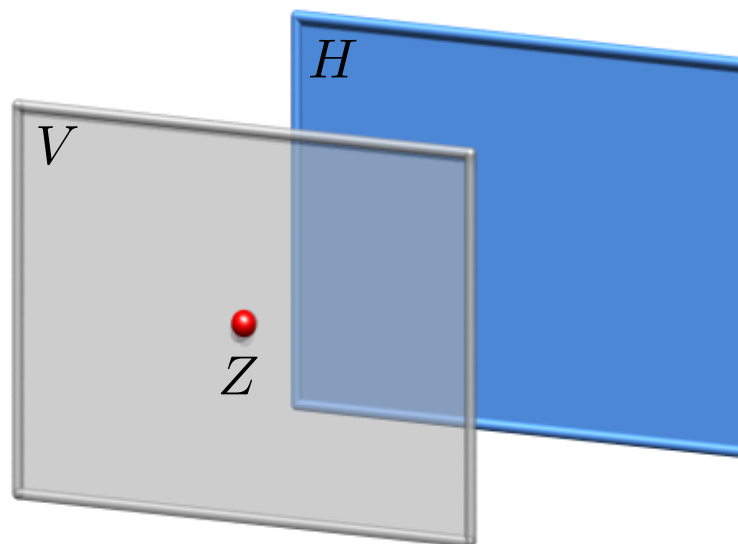
Der Satz von Pohlke gilt (sinngemäß) nicht; E. KRUPPA (1910); zahlreiche weitere Arbeiten, insbesondere zur *axonometrischen Angabe*.

Satz. *Es sei $\pi : \mathbb{P}_n \setminus Z \rightarrow \mathbb{P}_m$ eine surjektive zentral-projektive Abbildung und $V \supset Z$ die **Verschwindungshyperebene**. Die Abbildung π ist genau dann vom Pohlke-Typ, falls die Einschränkung von π auf eine Hyperebene H mit $V \neq H \parallel V$, eine affine Abbildung vom Pohlke-Typ ist.*

Bedingung: Kleinsten Eigenwert hat mindestens die Vielfachheit

$$2m - (n - 1) = 2m - n + 1.$$

V. HAVEL; andere Beweise von H. BRAUNER.



Wir beschreiben π in homogenen kartesischen Koordinaten durch eine Matrix

$$A = \left(\begin{array}{c|ccc} a_{00} & a_{01} & \dots & a_{0n} \\ \hline a_{10} & a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m0} & a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{array} \right) =: \left(\begin{array}{c|c} a_{00} & \mathbf{a}_0 \\ \hline a_{10} & \mathbf{a}_1 \\ \vdots & \vdots \\ a_{m0} & \mathbf{a}_m \end{array} \right) \in \mathbb{R}^{(m+1) \times (n+1)}.$$

Verschwindungshyperebene: $a_{00}x_0 + a_{01}x_1 + \dots + a_{0n}x_n = 0 \Rightarrow \mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{a}_0 \neq 0$.

Neue Matrix:

$$B := \left(\begin{array}{c} \mathbf{a}_1 - \frac{\mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{a}_1}{\mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{a}_0} \mathbf{a}_0 \\ \mathbf{a}_2 - \frac{\mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{a}_2}{\mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{a}_0} \mathbf{a}_0 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m - \frac{\mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{a}_m}{\mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{a}_0} \mathbf{a}_0 \end{array} \right) \in \mathbb{R}^{m \times n}.$$

Satz. Die Abbildung π ist vom Pohlke-Typ genau dann, falls der kleinste Eigenwert von BB^T mindestens die Vielfachheit

$$2m - n + 1$$

besitzt.

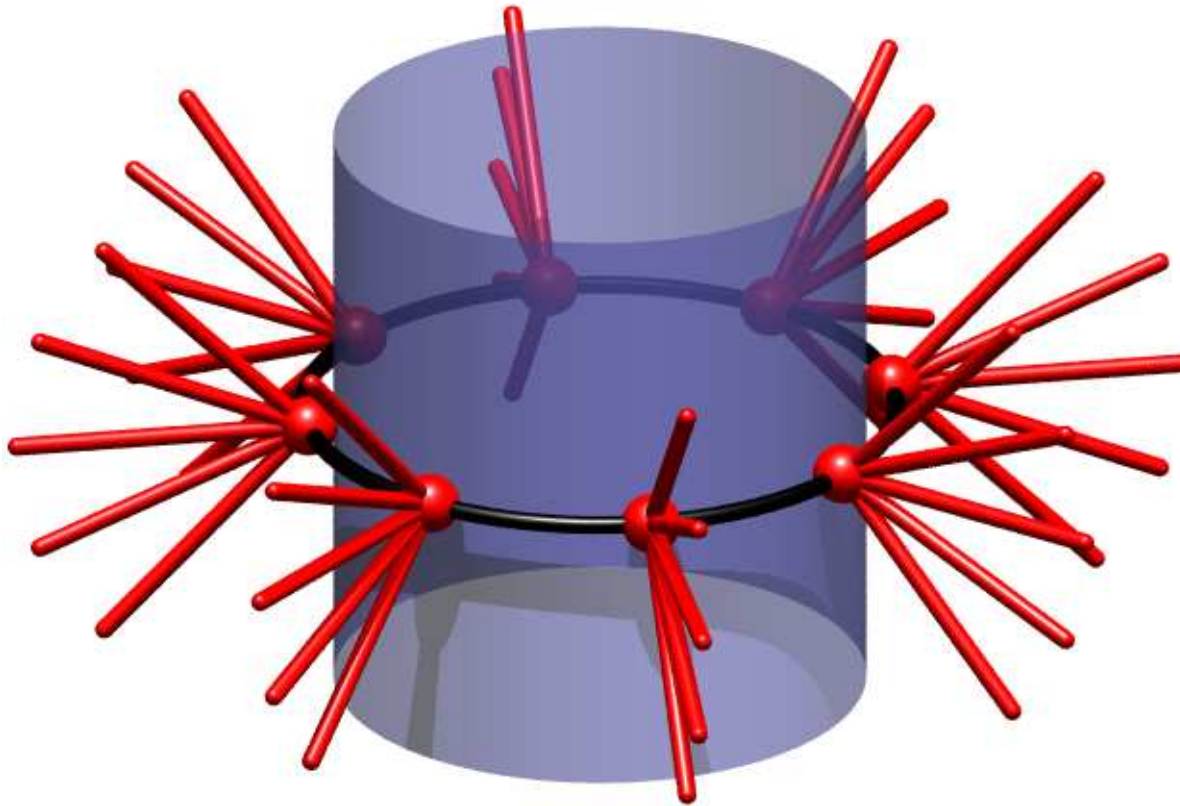
Es ist π genau dann als Produkt einer *orthogonalen Zentralprojektion* und einer *Ähnlichkeit* darstellbar, falls alle Eigenwerte BB^T gleich sind.

Beweisidee: B beschreibt in geeigneten kartesischen Koordinaten das Produkt der Orthogonalprojektion auf H mit $\pi|_H$.

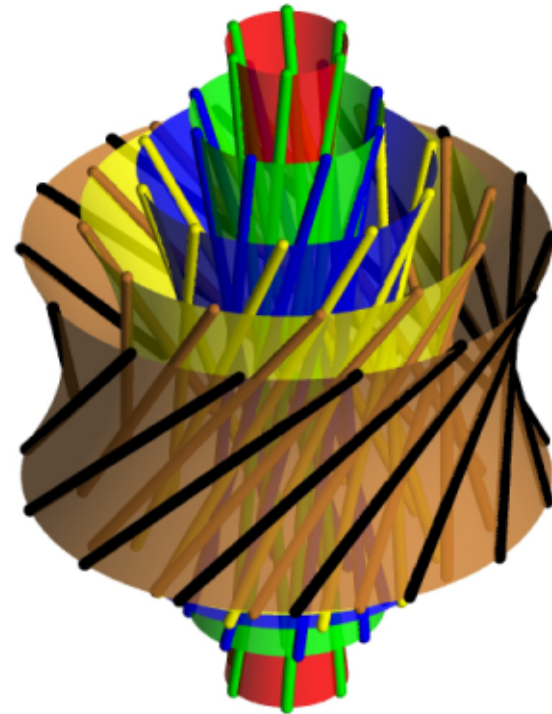
H. H.; anderer Beweis (auch für *isokline Zentralprojektionen*) von H. STACHEL.



Technisches Museum Prag. Foto: T. PAJDLA.

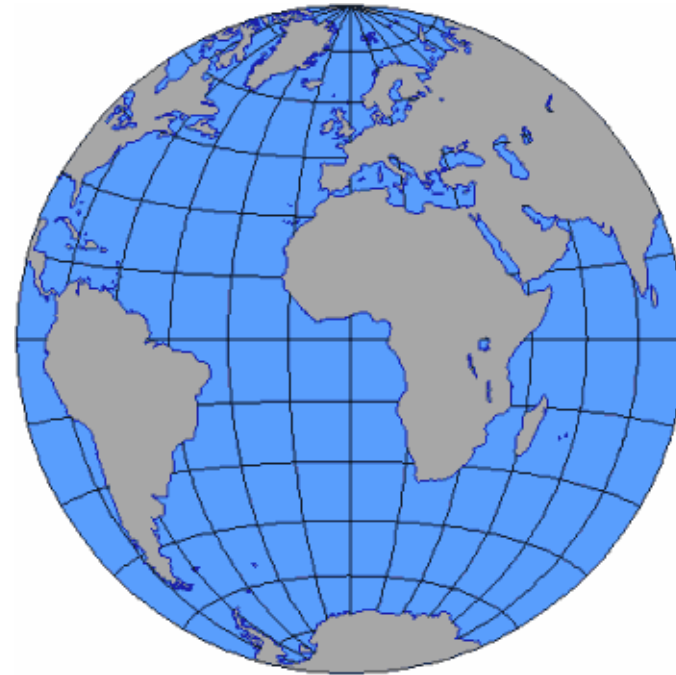
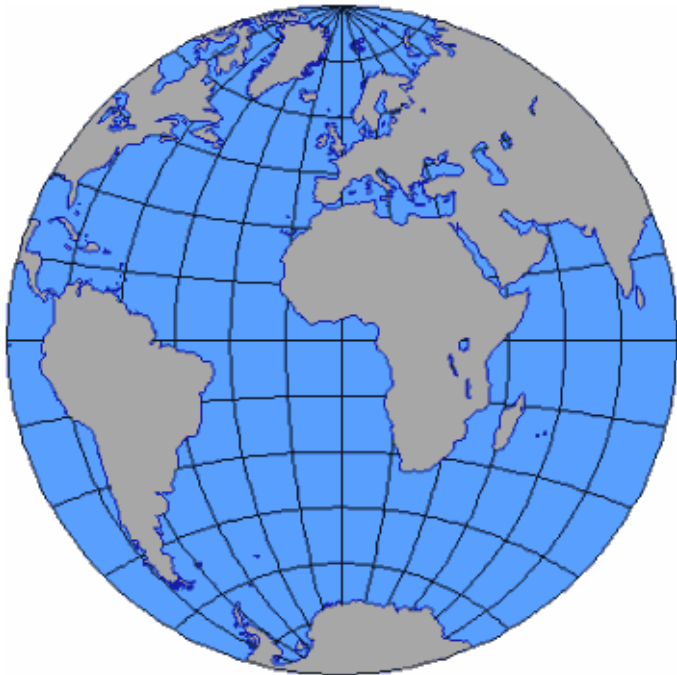


„Kongruenz von Halbgeraden“ . . . *non-central camera*.



Elliptisches Netz
(Reguläre Faserung)

Querverbindung zur Theorie der [Translationsebenen](#) ([Quasikörper](#)).



Die Veronese-Abbildung

Im folgenden sei K ein kommutativer Körper, $m, t \in \mathbb{N}^+$ und

$$n := \binom{m+t}{t} - 1.$$

In geeigneten homogenen Koordinaten ist die *Veronese-Abbildung* gegeben durch

$$\mathbb{P}_m(K) \rightarrow \mathbb{P}_n(K) : K(x_0, x_1, \dots, x_m) \mapsto K(\dots, x_0^{e_0} x_1^{e_1} \dots x_m^{e_m}, \dots)$$

mit $e_i \in \mathbb{N}$ und $e_0 + e_1 + \dots + e_m = t$. Ihr Bild ist eine *Veronese-Varietät* \mathcal{V}_m^t .

Koordinatenfreie bzw. **rein geometrische** Beschreibungen der Veronese-Abbildung:
W. BURAU, A. HERZER, C. ZANELLA – H. H. (nur für $t = 2$).

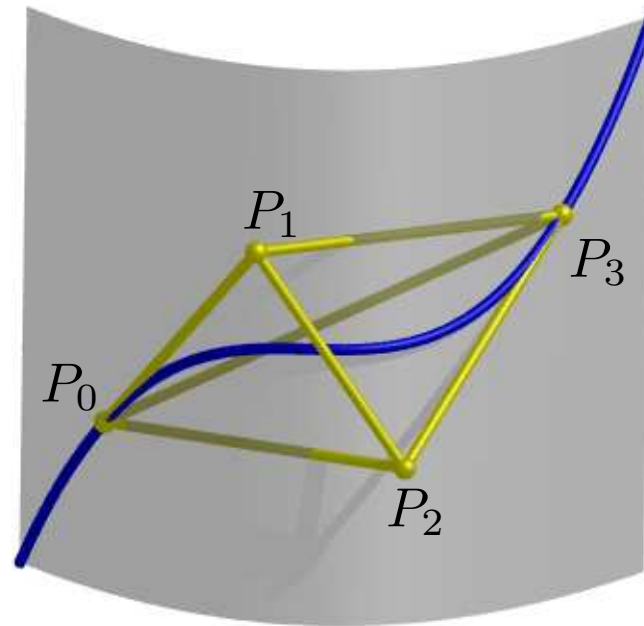
Eine \mathcal{V}_1^t wird auch als *rationale Normkurve* bezeichnet. (Beachte $t = n$.)

In anderer Schreibweise ist das die Punktmenge

$$\{K(1, x, \dots, x^n) \mid x \in K \cup \{\infty\}\}.$$

Beispiel $n = 2$: *Kegelschnitt* \mathcal{V}_1^2 .

Eine *windschiefe Kubik* \mathcal{V}_1^3 im reellen projektiven 3-Raum:



Die Sehnenkongruenz geht unter der Klein-Abbildung in eine *Veronese-Fläche* \mathcal{V}_2^2 über. Vgl. das *Bilinski-Giering-Modell* der hyperbolischen Ebene.

Die Beschreibung der *Schmiegunterräume* einer \mathcal{V}_1^n durch *formale Differentiation* in $K[X]$ ist bei positiver Charakteristik nicht stets möglich; R. RIESINGER.

Wir verwenden daher für $r \in \mathbb{N}$ die *Hasse-Ableitungen*

$$D_X^{(r)} \in \text{Hom}_K(K[X]) : X^j \mapsto \binom{j}{r} X^{j-r}.$$

Zusammenhang mit der formalen Differentiation in $K[X]$:

$$\frac{d^r}{dX^r} = r! D_X^{(r)}$$

Es gilt $D_X^{(r)} \circ D_X^{(s)} \neq D_X^{(r+s)}$, d.h. die Hasse-Ableitungen sind **nicht iterativ**.

Die Spaltenvektoren der Matrix

$$\begin{pmatrix} \binom{0}{0} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \binom{1}{0}x & \binom{1}{1} & 0 & \dots & 0 \\ \binom{2}{0}x^2 & \binom{2}{1}x & \binom{2}{2} & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ \binom{n}{0}x^n & \binom{n}{1}x^{n-1} & \binom{n}{2}x^{n-2} & \dots & \binom{n}{n} \end{pmatrix}$$

bestimmen für $x \in K$ die Kurven- bzw. *Ableitungspunkte* einer \mathcal{V}_1^n . Damit lassen sich die *Schmiegunterräume* wie in der projektiven Differentialgeometrie erklären.

Andere Ansätze: A. HERZER, H. TIMMERMANN, H. KARZEL.

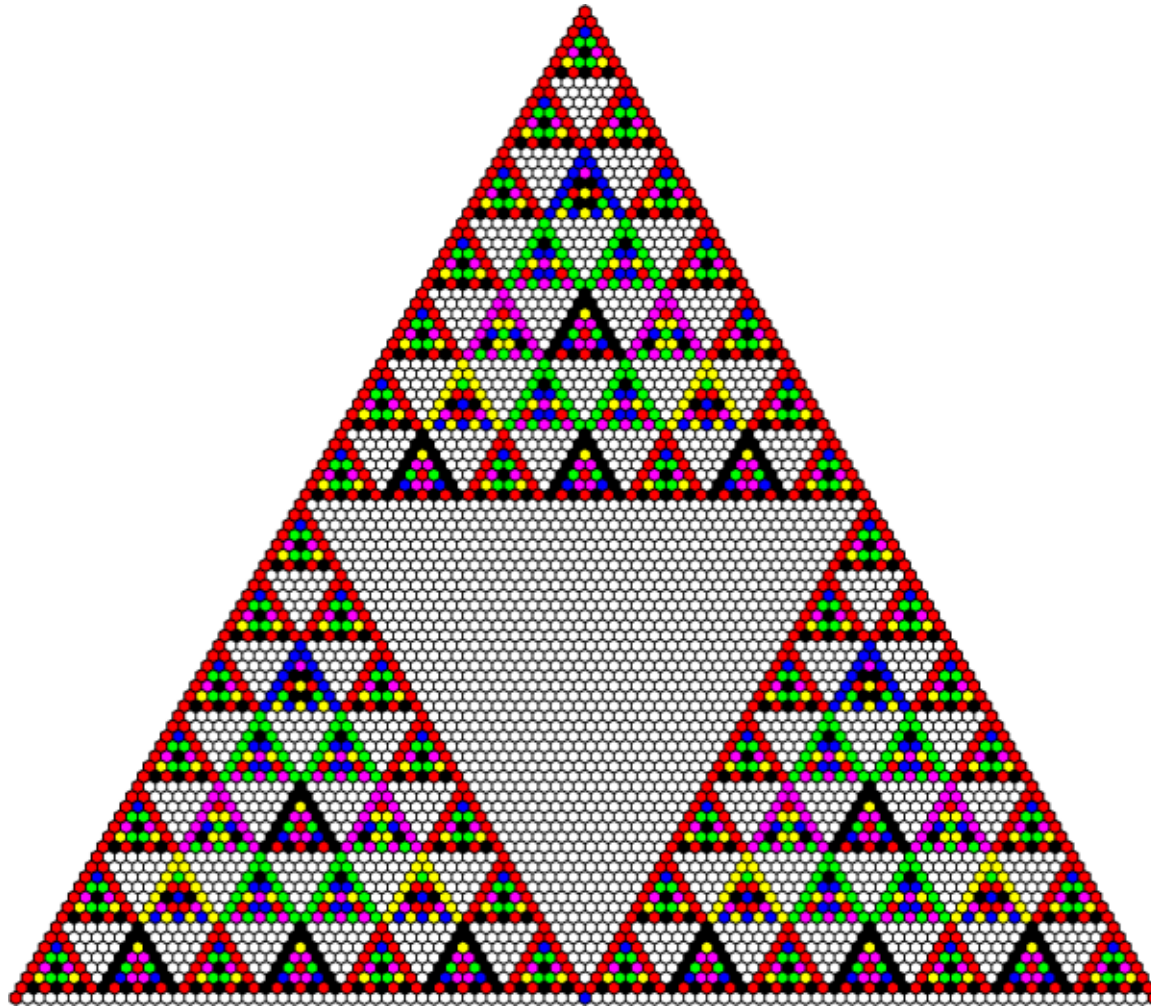
Definition: Der k -Knotenraum $N^k \mathcal{V}_1^n$ einer rationalen Normkurve \mathcal{V}_1^n ist als Durchschnitt ihrer k -Schmiegräume ($1 \leq k \leq n - 1$) erklärt.

Bei Charakteristik $\text{Char } K = 0$ sind alle Knoten leer.

Bei Charakteristik $p > 0$ spiegeln sich die Eigenschaften der Knotenräume wider

- im modulo p reduzierten Pascal-Dreieck,
- in der Darstellung von n zur Basis p ,
- in der Darstellung von $b := n + 1$ zur Basis p ,

vorausgesetzt, dass K hinreichend viele Elemente besitzt; J. GMAINER – H. H.



E. LUCAS (1878): Sind $n = \sum_{\sigma=0}^{\infty} n_{\sigma} p^{\sigma} =: \langle n_{\sigma} \rangle_p$ und $\langle j_{\sigma} \rangle_p$ die Darstellungen von natürlichen Zahlen n and j zur Basis p , so gilt

$$\binom{n}{j} \equiv \prod_{\sigma=0}^{\infty} \binom{n_{\sigma}}{j_{\sigma}} \pmod{p}.$$

$$\Phi(i, n) := \left(p^i - 1 - \sum_{\mu=0}^{i-1} n_{\mu} p^{\mu} \right) \cdot n_i \cdot \prod_{\sigma=i+1}^{\infty} (n_{\sigma} + 1)$$

$$\Sigma(i, n) := \sum_{\eta=i}^{\infty} \Phi(\eta, n) = n + 1 - \left(1 + \sum_{\mu=0}^{i-1} n_{\mu} p^{\mu} \right) \prod_{\sigma=i}^{\infty} (n_{\sigma} + 1)$$

$$T(R, b) := \sum_{\sigma=R}^{\infty} b_{\sigma} p^{\sigma} \text{ mit } b = n + 1$$

Satz. Erfüllt die natürliche Zahl k die Ungleichung

$$T(R, b) \leq k + 1 < T(Q, b),$$

und ist $b_\lambda \neq 0$ für genau ein $\lambda \in \{Q, Q + 1, \dots, R - 1\}$, dann hat der k -Knoten von \mathcal{V}_1^n die Dimension

$$\Sigma(R, n) - 1 = n - \left(1 + \sum_{\mu=0}^{R-1} n_\mu p^\mu\right) \prod_{\lambda=R}^{\infty} (n_\lambda + 1)$$

Sonderfall $k = n - 1$: H. TIMMERMANN, N.J. FINE (1947).

Satz. *Die Anzahl der von Null verschiedenen Ziffern in der Darstellung*

$$b = \sum_{\sigma=0}^{\infty} b_{\sigma} p^{\sigma}$$

von $b = n + 1$ zur Basis p ist genau der Anzahl der verschiedenen Knoten einer rationalen Normkurve \mathcal{V}_1^n .

Es sei $p = 3$, $n = 584$. Daher gilt

$$n = \langle 2, 1, 0, 1, 2, 2 \rangle_3 \quad \text{sowie} \quad b = \langle 2, 1, 0, 2, 0, 0 \rangle_3.$$

Es folgt

$$\begin{array}{ll} T(6, b) = \langle 0, 0, 0, 0, 0, 0 \rangle_3 = 0 & \leq k + 1 < T(5, b) = \langle 2, 0, 0, 0, 0, 0 \rangle_3 = 486 \\ & \Rightarrow \dim N^k \mathcal{V}_1^{584} = -1 \\ T(5, b) = \langle 2, 0, 0, 0, 0, 0 \rangle_3 = 486 & \leq k + 1 < T(3, b) = \langle 2, 1, 0, 0, 0, 0 \rangle_3 = 567 \\ & \Rightarrow \dim N^k \mathcal{V}_1^{584} = 287 \\ T(3, b) = \langle 2, 1, 0, 0, 0, 0 \rangle_3 = 567 & \leq k + 1 < T(1, b) = \langle 2, 1, 0, 2, 0, 0 \rangle_3 = 585 \\ & \Rightarrow \dim N^k \mathcal{V}_1^{584} = 476 \end{array}$$

- Rationale Normkurven entsprechen für bei $K = \text{GF}(p^h)$ den (zweifach erweiterten) *Reed-Solomon Codes*; V.D. GOPPA.
- Genau für $n = 2p^i - 2$ gibt es *einpunktige Knoten*; Sonderfall $K = \text{GF}(2^h)$: J.A. THAS.
- Neben den Knotenräumen gibt es im Allgemeinen noch andere *invariante Unteräume* im Raum einer \mathcal{V}_1^n .
- Die Knotenräume der allgemeinen Veronese-Varietäten führen zum Pascal-Simplex der *Multinomialkoeffizienten modulo p* .

Transformationsgruppen

Es sei \mathbb{M} die *4-dimensionale Raumzeit* der speziellen Relativitätstheorie. Für Ereignisse x und y schreiben wir:

$$x \leq y \quad :\Leftrightarrow \quad y \text{ liegt im Zukunfts-Halbkegel von } x$$

Satz. *Jeder Kausalautomorphismus (eine Bijektion von \mathbb{M} , welche die Relation \leq in beiden Richtungen invariant lässt) ist Produkt einer Translation, einer Streckung zu einem positiven Streckfaktor sowie einer (orthochronen) Lorentztransformation.*

A.D. ALEXANDROV – V.V. OVCHINNIKOVA, E.C. ZEEMAN, W. BENZ.

Vgl. die Kennzeichnung der *Lie-Transformationen* von W. BLASCHKE (1929).

Es sei \mathbb{G} die Menge der Geraden eines n -dimensionalen

- euklidischen,
- elliptischen,
- hyperbolischen,
- symplektischen

Raumes. Wir setzen:

$$g \sim h \iff g \text{ und } h \text{ schneiden einander rechtwinkelig}$$

Ziel: Bestimmung aller Automorphismen von (\mathbb{G}, \sim) .

Satz. Für $n \geq 4$ sind die jeweiligen Ähnlichkeiten bzw. Kongruenzabbildungen genau die Automorphismen von (\mathbb{G}, \sim) .

W. BENZ – E.M. SCHRÖDER, K. LIST, H. H.

Das gilt nicht für $n = 3$:

- euklidischer Raum: **Derivationen** von \mathbb{R}
- hyperbolischer Raum: **Automorphismen** von \mathbb{C}
- elliptischer Raum: **wild**
- symplektischer Raum: **wild**

Abbildungen in der Geometrie

Hans Havlicek

Institut für Geometrie



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
WIEN

VIENNA
UNIVERSITY OF
TECHNOLOGY

Zur Theorie linearer [Abbildungen I](#). Zur Theorie linearer [Abbildungen II](#). [Einbettung](#) projektiver Desargues-Räume. [Normisomorphismen](#) und Normkurven endlichdimensionaler projektiver Desargues-Räume. Die linearen [Geradenabbildungen](#) aus dreidimensionalen projektiven Pappos-Räumen. Die automorphen [Kollineationen](#) nicht entarteter Normkurven. Erzeugnisse projektiver [Bündelisomorphismen](#). [Erzeugung](#) quadratischer Varietäten bei beliebiger Charakteristik. Über die [Abbildungsgleichungen](#) einer [Normalprojektion](#). Durch [Kollineationsgruppen](#) bestimmte projektive Räume. Von der [Darstellenden Geometrie](#) zu [Kartenentwürfen](#) am Personal Computer. Dual Spreads Generated by [Collineations](#). Die [Projektivitäten](#) und [Antiprojektivitäten](#) der Quaternionengeraden. Invariant Points of Circular [Transformations](#). A Generalization of Brauner's Theorem on Linear [Mappings](#). Der [Entwurf](#) von Winkel oder „Wieviel Geometrie steckt in einer Schulwandkarte?“. On Plücker [Transformations](#) of Generalized Elliptic Spaces. On [Isomorphisms](#) of Grassmann Spaces. Symplectic Plücker [Transformations](#). On the Matrices of Central Linear [Mappings](#). Quadratic [Embeddings](#). A Characteristic Property of Elliptic Plücker [Transformations](#). [Isomorphisms](#) of Affine Plücker Spaces. [Chow's Theorem](#) for Linear Spaces. Weak Linear [Mappings](#) – A Survey. On Linear [Morphisms](#) of Product Spaces. Projective [Representations](#) I. Projective [Representations](#) II. On [Automorphisms](#) of Flag Spaces. Jordan [Homomorphisms](#) and Harmonic [Mappings](#). On [Bijections](#) that Preserve Complementarity of Subspaces. Radical Parallelism on Projective Lines and Non-linear [Models](#) of Affine Spaces.