Strukturerhaltende Abbildungen in der Geometrie

Hans Havlicek

Linearer Raum $(\mathcal{P}, \mathcal{L})$:

Punktmenge $\mathcal{P}$, Geradenmenge $\mathcal{L}$

1. Je zwei verschiedene Punkte gehören gemeinsam genau einer Geraden an.
2. Jede Gerade enthält mindestens zwei verschiedene Punkte.

$\varphi : \mathcal{P} \to \mathcal{P}'$ Punktabbildung mit ...

V ... Rechtsvektorraum über einem Körper K

Projektiver Raum über V:

Punkte	...	1–dim. Unterräume von V
Geraden	...	2–dim. Unterräume von V
$\mathcal{P}(V)$	...	Punktmenge

Kollineation:

Abbildung $\varphi : \mathcal{P} \to \mathcal{P}'$ mit

1. φ ist bijektiv.
2. φ ist geradentreu (d.h. $g \in \mathcal{L} \Rightarrow g^{\varphi} \in \mathcal{L}'$)

2. Hauptsatz der Projektiven Geometrie: Eine Abbildung $\varphi : \mathcal{P}(V) \to \mathcal{P}(V')$ ist genau dann Kollineation, falls φ durch eine semilineare Bijektion $f : V \to V'$ induziert wird, d.h.

$$(aK)^{\varphi} = (a^{f})K' \text{ für alle } aK \in \mathcal{P}(V).$$

Dabei sei vorausgesetzt:

(Δ) im φ enthält ein Dreieck.

Spurraum eines linearen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{L})$:

1. $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}$ (beliebig).
2. $\mathcal{L}_{\mathcal{M}} := \{g \cap \mathcal{M} \mid g \in \mathcal{L},\ \#(g \cap \mathcal{M}) \geq 2\}$.

Dann ist $(\mathcal{M}, \mathcal{L}_{\mathcal{M}})$ ein linearer Raum.

Sonderfall *Unterraum* $\mathcal{M}$:

$$g \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}} \Rightarrow g \in \mathcal{L}.$$

Projektion in einem projektiven Raum:

Komplementäre Unterräume $\mathcal{O}, \mathcal{T} \subset \mathcal{P}$, d.h.

$$\mathcal{P} = \overline{\mathcal{O} \cup \mathcal{T}} = \mathcal{O} \vee \mathcal{T}, \quad \mathcal{O} \cap \mathcal{T} = \emptyset,$$

bestimmen die Abbildung

$$\varphi : \mathcal{P} \rightarrowtail \mathcal{T},\ A \mapsto A^{\varphi}$$

mit

$$\{A^{\varphi}\} = (\{A\} \vee \mathcal{O}) \cap \mathcal{T} \text{ (falls } \neq \emptyset).$$

dom$\varphi = \mathcal{P} \setminus \mathcal{O}$	...	*Definitionsmenge*,
$\mathcal{O}$	...	*Ausnahmeraum*,
$\mathcal{T}$	...	*Bildraum*.

Einbettung als Spurraum:

Abbildung $\varphi : \mathcal{P} \to \mathcal{P}'$ mit

1. φ ist injektiv.
2. Kollineare Lage ist invariant unter φ.
3. Nicht kollineare Lage ist invariant unter φ.

Es kann φ als Kollineation von $\mathcal{P}$ auf den Spurraum $\mathcal{P}^\varphi$ von $\mathcal{P}'$ aufgefaßt werden.

Sonderfall *Einbettung als Unterraum*:

Abbildung $\varphi : \mathcal{P} \to \mathcal{P}'$ mit

1. φ ist injektiv.
2. φ ist geradentreu.

Beispiele für Einbettungen projektiver Räume $(K \subset K')$:

- $K^{n+1} \subset K'^{n+1}$

$$\begin{array}{rcl} \varphi : \mathcal{P}(K^{n+1}) & \to & \mathcal{P}(K'^{n+1}), \\ (a_0, \ldots, a_n)K & \mapsto & (a_0, \ldots, a_n)K' \end{array}$$

- V über K, $V' := V \otimes_K K'$

$$\varphi : \mathcal{P}(V) \to \mathcal{P}(V'),\ aK \mapsto (a \otimes 1)K'$$

"kanonische" Einbettung

- Seien $1, y_0, y_1, y_2 \in K'$ linear unabhängig im Linksvektorraum K' über K:

$$\varphi : \mathcal{P}(K^4) \to \mathcal{P}(K'^3),\ aK \mapsto (a^f)K'$$

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \overset{f}{\mapsto} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -y_0 \\ 0 & 1 & 0 & -y_1 \\ 0 & 0 & 1 & -y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

Gemeinsame Eigenschaften dieser Abbildungen projektiver Räume:

Für alle Unterräume $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \subset \mathcal{P}$ gilt:

$$\begin{aligned}
\overline{(\mathcal{X} \vee \mathcal{Y})^{\varphi}} &= \overline{\mathcal{X}^{\varphi}} \vee \overline{\mathcal{Y}^{\varphi}} \\
\dim \overline{\mathcal{X}^{\varphi}} &\leq \dim \mathcal{X} \\
(\mathcal{X} \vee \mathcal{Y})^{\varphi} &= \mathcal{X}^{\varphi} \vee \mathcal{Y}^{\varphi} \left\{ \begin{array}{l} \text{Kollineation} \\ \text{Projektion} \\ \text{UR-Einbettung} \end{array} \right.
\end{aligned}$$

Schwach lineare Abbildung projektiver Räume:

Abbildung $\varphi : \mathcal{P} \rightarrowtail \mathcal{P}'$ mit

1. $\overline{(\{X\} \vee \{Y\})^{\varphi}} = \{X\}^{\varphi} \vee \{Y\}^{\varphi}$
   für alle $X, Y \in \mathcal{P}$.

Schwach semilineare Abbildung:

Abbildung $f : V \to V'$ mit

1. $(a+b)^f = a^f + b^f$ für alle $a, b \in V$.
2. $(ax)^f = a^f x^\zeta$ für alle $a \in V$, $x \in K$; dabei ist $\zeta : K \to K'$ ein Körpermonomorphismus.

Satz (Faure Frölicher 1994, H. 1994): Die Abbildung

$$\varphi : \mathcal{P}(V) \rightarrowtail \mathcal{P}(V')$$

erfülle (Δ). Es ist φ genau dann schwach linear, falls φ durch eine schwach semilineare Abbildung $f : V \to V'$ induziert werden kann. Dann ist φ darstellbar als Produkt einer natürlichen Einbettung, einer Projektion und einer Unterraumeinbettung.

Sonderfälle schwach linearer Abbildungen:

Lineare Abbildung (konstruktive Geometrie):

Abbildung $\varphi : \mathcal{P} \rightarrowtail \mathcal{P}'$ mit

1. $(\{X\} \vee \{Y\})^\varphi = \{X\}^\varphi \vee \{Y\}^\varphi$ für alle $X, Y \in \mathcal{P}$.

Rehbock 1926, **Brauner 1973, 1976**, **Timmermann 1973**, **Sörensen 1985**, **Faure Frölicher 1993**.
Lenz 1957, **Frank 1992** $\rightarrow$ lokale Kennzeichnungen.
Sörensen 1985 $\rightarrow$ Lineare Räume.
Rehbock 1926, **H. 1981**, **Wells 1983**, **Zanella 1995** $\rightarrow$ Graßmann-Räume
Zanella 1996 $\rightarrow$ Segre-Räume.
Pfeiffer Schmidt 1995 $\rightarrow$ Projektive Verbandsgeometrie.

Spurraumeinbettung:

Carter Vogt 1980, **Limbos 1980, 1981, 1982**, **Brezuleanu Radulescu 1984**, **Benz 1993**.
Brown 1988, **H. 1988** $\rightarrow$ Beispiele.
Aczél 1966, Aczél Benz 1969, Brezuleanu Radulescu 1985 $\rightarrow$ lokale Kennzeichnung.

Semikollineation:

Abbildung $\varphi : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}'$ mit

1. φ ist bijektiv.
2. Kollineare Lage ist invariant unter φ.

Ceccherini 1967, **Mariosca 1970**, **Bernardi Torre 1984**
Kreuzer 1996 $\rightarrow$ lineare Räume
Gibt es Semikollineationen $\mathcal{P}(V) \rightarrow \mathcal{P}(V')$, die keine Kollineationen sind?

V ... Rechtsvektorraum über einem Körper K

Affiner Raum über V:

Punkte	...	Vektoren von V
Geraden	...	1−dim. Nebenklassen in V
$\parallel$	...	Parallelitätsrelation

Kollineation

Abbildung $\varphi : \mathcal{P} \to \mathcal{P}'$ mit

1. φ ist bijektiv.
2. φ ist geradentreu.

2. Hauptsatz der Affinen Geometrie:
Eine Abbildung $\varphi : V \to V'$ ist genau dann Kollineation, falls $\varphi - 0^{\varphi} : V \to V'$ semilineare Bijektion ist. Dabei sei vorausgesetzt:

(Δ) im φ enthält ein Dreieck.

$$K \neq \mathrm{GF}(2).$$

Abbildungen affiner Räume:

Parallelprojektion:

...

Einbettung als Spurraum:
Abbildung $\varphi : \mathcal{P} \to \mathcal{P}'$ mit

1. φ ist injektiv.
2. Kollineare Lage ist invariant unter φ.
3. Nicht kollineare Lage ist invariant unter φ.

φ kann als Kollineation auf den Spurraum $\mathcal{P}^{\varphi}$ von $\mathcal{P}'$ aufgefaßt werden.

Sonderfall *Einbettung als Unterraum*:

...

Für eine Einbettung $\varphi : V \to V'$ affiner Räume, welche der Bedingung (Δ) genügt, braucht $\varphi - 0^{\varphi}$ nicht schwach semilinear zu sein.

- V über GF(2).

- affine Ebene über GF(3) läßt sich etwa in die komplexe affine Ebene einbetten.

Viele Einzelergebnisse:

Einbettung affine Ebene $\to$ affine Ebene
Ostrom Sherk 1964, **Rigby 1964**, **Carter Vogt 1980**.
Schaeffer 1980 $\to$ lokale Kennzeichnung

Einbettung affiner Räume über V, V'
Limbos 1980, 1981, 1982, **Zick 1981, 1981** (Preprints), **Benz 1993**.
Thas 1970, **Benz 1993**.$\to$ Beispiele
...
$\varphi - 0^\varphi$ ist (im allgemeinen) eine *schwach semilinear gebrochene Abbildung* $V \to V'$.
...
Gibt es nur surjektive Monomorphismen $K \to K'$, so ist $\varphi - 0^\varphi$ (im allgemeinen) semilinear.
...
Ist φ *parallelentreu* auf den Geraden, so ist $\varphi - 0^\varphi$ schwach semilinear.

Beispiel eines *Epimorphismus*:

Sei p Primzahl.

$$\begin{array}{rcl} \varphi \ : \ \mathcal{P}(\mathbb{Q}^{n+1}) & \to & \mathcal{P}(\mathsf{GF}(p)^{n+1}) \\ A = (z_0, \ldots, z_n)\mathbb{Q} & \mapsto & (\overline{z_0}, \ldots, \overline{z_n})\mathsf{GF}(p) \end{array}$$

$z_i \in \mathbb{Z}$, relativ prim

$n = 1$: Identifiziere

$$(a_0, a_1)K \; (\in \mathcal{P}(K^2)) \text{ mit } \frac{a_1}{a_0} \; (\in K \cup \{\infty\})$$

Damit ist

$$\varphi : \mathbb{Q} \cup \{\infty\} \to \mathsf{GF}(p) \cup \{\infty\}$$

sowie

$$B := \{a \in \mathbb{Q} \mid a^\varphi \neq \infty\}$$

Unterring von $\mathbb{Q}$,

$$B_0 := \{a \in B \mid a^\varphi = 0\}$$

maximales Ideal von B,

$$(\mathbb{Q} \setminus B)^{-1} \cup \{0\} = B_0,$$

sowie

$$B/B_0 \cong \mathsf{GF}(p).$$

Bewertungsring:

Teilmenge B eines Körpers K mit

1. B ist Unterring von K.
2. $x \in K \setminus B \Rightarrow x^{-1} \in B$.

Dann ist

$$0, 1 \in B,$$

$$(K \setminus B)^{-1} \cup \{0\} =: B_0$$

maximales Ideal von B und

$$B/B_0$$

ein Körper.

Homomorphismus projektiver Räume:

Abbildung $\varphi : \mathcal{P} \to \mathcal{P}'$ mit

1. Kollineare Lage invariant unter φ.
2. Für alle $g \in \mathcal{L}$ ist $\# g^{\varphi} \geq 3$.

Verallgemeinerte semilineare Abbildung:

Abbildung $f : V \rightarrowtail V'$ mit

1. $\mathrm{dom} f =: W \subset V$ ist B-Rechtsmodul über einem Bewertungsring $B \subset K$.
2. Für alle $aK \in \mathcal{P}(V)$ ist $aK \cap W \neq \{0\}$.
3. $(a+b)^f = a^f + b^f$ für alle $a, b \in W$.
4. $(ax)^f = a^f x^\zeta$ für alle $a \in W$, $x \in B$; dabei ist $\zeta : B \to K'$ ein Ringhomomorphismus mit Kern B_0.

Satz (Machala 1975): Die Abbildung

$$\varphi : \mathcal{P}(V) \to \mathcal{P}(V')$$

erfülle (Δ). Es ist φ genau dann Homomorphismus, falls φ durch eine verallgemeinerte semilineare Abbildung $f : V \rightarrowtail V'$ induziert werden kann, die folgende Bedingungen erfüllt:

1. $(aK \cap W) \not\subset \ker f$ für alle $aK \in \mathcal{P}(V)$.
2. Für jede Gerade $g \subset \mathcal{P}(V)$ gibt es Vektoren $a, b \in W$ mit

$$g = \{aK\} \vee \{bK\} \text{ und } a^f, b^f \in V' \text{ l. u.}$$

Klingenberg 1956, 1959, **Dress 1964**, **Mathiak 1967, 1972, 1973, 1986**, **Bartolozzi 1968**, **Radó 1969**, **André 1970**, **Garner 1972**, **Carter Vogt 1980**, **Priess-Crampe 1983**, **Törner 1985**, **Brandstetter Hartmann 1988**, **Hartmann Priess-Crampe 1988**.
Radó 1970, **Brezuleanu Radulescu 1985** → lokale Kennzeichnung.
Fritsch Prestel 1982 → Beispiel.

Skornjakov 1957, Dembowski 1959, Salzmann 1959, Hughes 1960, ... → projektive Ebenen
Buekenhout 1965, Klotzek 1988 → projektive Geraden
... → Ring-Geometrie

Satz (Corbas 1965, Mariosca 1970): Jeder Epimorphismus eines n-dimensionalen affinen Raumes auf einen n-dimensionalen affinen Raum ($n \geq 2$) ist injektiv.
Bisztriczky Lorimer 1995 $\rightarrow$ andere Definition.
Bognár Kertész 1986 $\rightarrow$ reelle hyperbolische Räume.

Satz (Brezuleanu Radulescu 1984): Jeder volle Homomorphismus eines n-dimensionalen affinen Raumes V ($n \geq 2$) in einen projektiven Raum $\mathcal{P}(V')$ kann (im allgemeinen) zu einem Homomorphismus des projektiven Abschlusses von V erweitert werden.

Weitere Verallgemeinerung: Bilder von Geraden dürfen auch genau zwei Punkte haben.

Carter Vogt 1980, **Hales Straus 1982** $\rightarrow$ Färbung projektiver Ebenen.