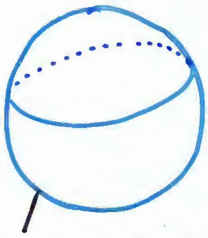
MÖBIUS – Geometrie

$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

$\mathbb{C} \subset \mathbb{H}$

Geometrisches Modell

in $\mathbb{E}^3$



$S^{(2)} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$

Ketten, Kreise, reeller Zug

in $\mathbb{E}^5$

$S^{(4)} = \mathbb{H} \cup \{\infty\}$

Ketten, 2-Sphären

Kettenverwandtschaften sind je genau die automorphen Kollineationen von $S^{(*)}$.

3 verschiedene Punkte ....

.... genau eine Kette

Modell über $\mathbb{R}$

.... mindestens eine Kette
(unendlich viele)

Modell über $\mathbb{R}$ (!)

$\exists$ Modell über $\mathbb{C}$?

vgl. Matizendarstellung

$$\mathbb{C} = \left\{ \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \right\}$$

$$\mathbb{H} = \left\{ \begin{bmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2} \right\}$$

Projektive Gerade, Kettengeometrie:

$K \subset L \quad , \quad |L:K|_r = 2$

$\mathcal{P}(K^2) \subset \mathcal{P}(L^2)$

$\downarrow$ alle Projektivitäten $(\cdot PGL(2,L))$

Ketten

Liniengeometrisches Modell:

$L^2 =: \mathbb{V}$ $\qquad$ $\mathbb{V}$ ist 4-dim. Rechtsvektorraum über K

$\mathcal{P}(\mathbb{V})$ ... dreidimensionaler projektiver Raum über K

Übertragung:

Punkte von $\mathcal{P}(L^2)$ $\quad \triangleq \quad$ Faserung von $\mathcal{P}(\mathbb{V})$

$\downarrow$

Menge von Geraden, durch jeden Punkt genau eine!

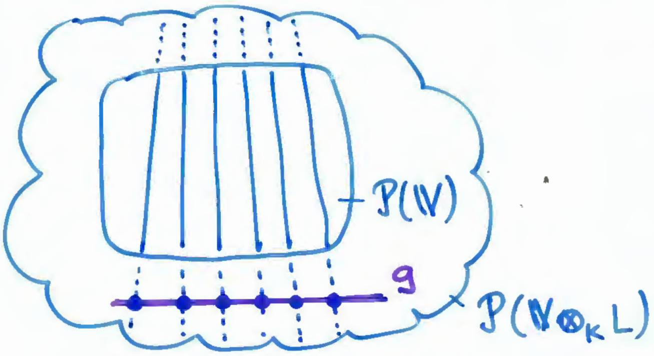
(spread)

Punkte einer Kette $\quad \triangleq$

alle Fasergeraden „entlang" einer Nicht-Fasergeraden

Beschreibung der Faserung im Liniengeometrischen Modell

Betten $\mathcal{P}(\mathbb{V})$ (über K) ein in $\mathcal{P}(\mathbb{V}\otimes_K L)$ (über L).



$\exists$ mindestens eine Gerade g ($g \cap \mathcal{P}(\mathbb{V}) = \emptyset$), die alle erweiterten Fasergeraden trifft.

↑

Bew. durch Rechnung (alg. Struktursätze)

$\exists$ weitere Leitgerade $\iff$ $\exists$ $\alpha \in \mathrm{Aut}(L)$, das K elementweise fix läßt; $\alpha \neq \mathrm{id}$.

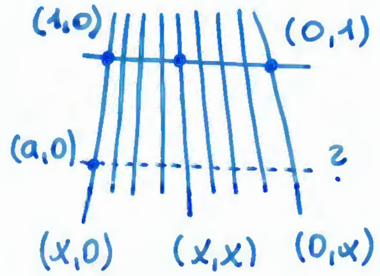
<u>K, L kommutativ</u> : lineare Geradenkongruenz

<u>$\mathbb{C}, \mathbb{H}$</u> : $\exists$ unendlich viele solche Leitgeraden im proj. 3-Raum über $\mathbb{H}$.
je zwei sind projektiv gekoppelt.

<u>allg. Fall</u> : Nicht durch jeden Punkt von g muß eine Fasergerade gehen. (linker $\neq$ rechter Grad).

Beschreibung der Ketten im liniengeometrischen Modell

in $\mathbb{P}(\mathbb{V})$ (über K) $\quad \mathbb{V} = L^2$



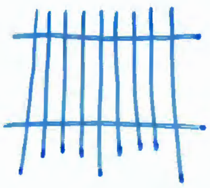
$\exists$ Leitgerade durch $(a,0) \in \mathbb{V}$
$(a \neq 0)$ $\iff$

$$a^{-1} K a = K$$

$\forall a \in L \setminus \{0\}$ existiert Leitgerade $\iff$ L ist kommutativ

(Kette und Leitgeradenmenge sind ergänzende Reguli.)

Bsp: $K = \mathbb{C}$, $L = \mathbb{H}$:



} genau 2 Leitgeraden

↑

autiprojektiv gekoppelt

Sphärisches Modell

$\mathcal{P}(W)$ über K, K kommutativ

$\mathcal{L}$ .. Geradenmenge von $\mathcal{P}(W)$

KLEINsche Abbildung. $\mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{P}(W \wedge W)$ ... 5-dim.

Faserung $\hat{=}$ $S \subset$ KLEIN-Quadrik.

L kommutativ $\Longleftrightarrow$ $\dim \operatorname{span}(S) = 3$

.... $S^{(2)}$!!!

L nicht kommutativ $\Longleftrightarrow$ $\dim \operatorname{span}(S) = 5$

alg. Struktursätze .... Z ... Zentrum von L

$\Rightarrow |K:Z| = 2$

$\Rightarrow |L:Z| = 4$

In $\mathcal{P}(W \wedge W)$ gibt es genau einen 5-dim. Z-Ausschnitt Π der S enthält. Bezüglich Π ist S eine ovale Quadrik ... $S^{(4)}$!!!

Ketten im sphärischen Modell

L kommutativ : Genau die Kreise auf $S^{(2)}$.

L nicht kommutativ: Genau jene Schnitte von $S^{(4)}$ mit 3-dim. Unterräumen von $\mathcal{P}(W \wedge W)$ für die gilt:

- Schnitt mit $S^{(4)}$ ist ovale Quadrik (über Z)
- Schnitt mit KLEIN-Quadrik enthält Gerade (über K).