Stichworte zum Vortrag "Duale Faserungen"

1. Klassische Liniengeometrie

elliptische Netze

euklidische Erzeugung über Verbindungsgeraden zugeordneter Punkte einer verschraubten Ebene $\perp$ Schraubachse, Drehwinkel $\neq 0 \pmod{\pi}$

sogenanntes **Drehnetz**, vgl. elliptischer Raum: Clifford-Parallelismus.

Anwendungen in darstellender Geometrie: Netzprojektion. (Geraden $\to$ euklidische Kreise).

Verallgemeinerung auf projektiven Standpunkt für reelle Räume:

Erzeugung über *projektive Kollineation* $\kappa : \alpha \to \beta$ mit

(1) $s := \alpha \cap \beta$ fest

(2) $\kappa | s$ fixpunktfrei

Umkehrung: Zwei beliebige Ebenen durch eine Netzgerade. (alles uralt)

2. Faserungen

Begriff der **Faserung** und **dualen Faserung**

Elliptisches Netz ist Faserung und duale Faserung (nur 3-dimensional)

ANDRE, BRUCK, BOSE im Zusammenhamg mit Translationsebenen. Zum Drehnetz gehört die komplexe projektve Ebene (Liniengeometrie: E.A.WEISS).

Ist jede Faserung duale Faserung? Nein:

Aiden BRUEN, J.Chris FISHER: Spreads which are not Dual Spreads, *Can. J. Math.* **12**, 801-803 (1969).

Benützen 3-Raum mit abzählbar-unendlicher Punktmenge, daher auch abzählbare Geradenmenge, rekursive Konstruktion einer Faserung die keine duale Faserung ist.

3. Erzeugung dualer Faserungen durch Kollineationen

$\mathcal{P}$ beliebiger 3-dimensionaler projektiver Raum.

Erzeugung über *Kollineation* $\kappa : \alpha \to \beta$ mit

(1) $s := \alpha \cap \beta$ fest

(2) $\kappa | s$ fixpunktfrei

Setze $\mathcal{D}(\kappa) := \{XX^{\kappa} | X \in \alpha\}$. ... **durch** κ **erzeugte Geradenmenge**.

Satz 1. *$\mathcal{D}(\kappa)$ ist duale Faserung.*

Beweis - Skizze.

Duale Erzeugung über kollinear-äquivalente Bündel liefert eine Faserung.

Problem $\mathcal{D}(\kappa)$ auch Faserung?

Satz 2. *Es gibt in $\mathcal{P}$ genau dann eine duale Faserung $\mathcal{D}(\kappa)$, die keine Faserung ist, falls es in einer Ebene von $\mathcal{P}$ eine Kollineation σ mit einer Fixgeraden aber ohne jeden Fixpunkt gibt.*

Beweis. $\forall\ P \in \mathcal{P}\backslash(\alpha\cup\beta)$: $\omega_P : \beta \to \alpha$ ... Perspektivität mit Zentrum P.

(a) P inzidiert mit Gerade aus $\mathcal{D}(\kappa) \Leftrightarrow \kappa\omega_P : \alpha \to \alpha$ ohne Fixpunkt.

(b) $\sigma : \alpha \to \alpha$ fixpunktfrei, aber $s^\sigma = s \Rightarrow \kappa := \sigma\omega_P$ liefert $\mathcal{D}(\kappa)$, das keine Faserung ist.

4. Fixfiguren von Kollineationen projektiver Ebenen

Pappos + projektive Kollineation σ:

Fixfigur gestattet Korrelation! (Folklore)

endliche Ebene:

Reinhold BAER: Projectivities of finite projective Planes, *Am.J.Math.* **69**, 653-684 (1947).

\# Fixpunkte = # Fixgeraden

Insofern interessant, weil nicht projektive Kollineationen erfaßt.

Nicht-Pappos + projektive Kollineation σ:

Paul Moritz COHN: The Similarity Reduction of Matrices over a Skew Field, *Math. Z.* **132**, 151-163 (1973). Vgl. auch

Skew Field Constructions, Cambridge University Press, Cambridge, 1977.

Es gibt eine 3×3 Matrix A über einem echten Schiefkörper mit

-rechtes Spektrum leer

-linkes Spektrum nicht leer.

Daraus folgt:

▸ A regulär

▸ linkes Spektrum ist genau eine Konjugiertenklasse, nicht im Zentrum, denn jeder linke Eigenwert aus dem Zentrum ist auch rechter Eigenwert

(Sowas geht nicht bei 2×2).

liefert *projektive Kollineation*

- ohne Fixpunkt
- mit genau einer Fixgerade.

Satz 3. *Es gibt eine duale Faserung $\mathcal{D}(\kappa)$, welche keine Faserung ist.*

Fixfiguren allgemein untersucht von

Helmut MÄURER: Collineations of Projective Planes with Different Numbers of Fixed Points and Fixed Lines, *Euro. J. Comb.* 9, 375-378 (1988).

Kollineationen mit # Fixpunkte < # Fixgeraden (sonst dual!)

Es sind möglich

- keine Fixpunkte und genau eine Fixgerade
- genau ein Fixpunkt, alle Fixgeraden durch diesen
- mindestens zwei Fixpunkte, alle Fixpunkte sind kollinear, alle Fixgeraden kopunktal.

Für uns ist nur der erste Fall interessant. Beispiele hierzu:

$\mathcal{P}$ nicht papposch σ projektiv (Cohn s.oben, Mäurer)

$\mathcal{P}$ papposch σ nicht projektiv (Mäurer)

Vierteldrehung am Drehnetz, $\mathbb{R}$ einfach transzendent erweitern: $\mathbb{R}(T)$, $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ erweitern durch die Forderung $T \mapsto T+1$ zu einem Automorphismus von $\mathbb{R}(T)$. Erweitern nun auch die geometrische Struktur und κ zu einer nicht projektiven Kollineation. Dann geht durch wenigstens einen Fernpunkt keine Gerade der dualen Faserung.

Ansatz nach Mäurer:

σ als Affinität auffassen (Ferngerade s), dann eindeutige semlinineare Abbildung dazu, Rang = 2, also eindeutiger Körperautomorphismus mitbestimmt. Damit Sätze über Existenz von Fixpunkt, falls es Fixgerade gibt:

Satz 4. (Mäurer) *Gegeben ist n-dimensionaler projektiver Raum $\mathcal{P}$ ($n \geq 2$) und eine Kollineation σ mit Fixhyperebene $\mathcal{H}$. Falls der Begleitautomorphismus der Affinität $\sigma|(\mathcal{P}\setminus\mathcal{H})$ von endlicher Ordung ist, gibt es einen Fixpunkt von σ.*

Bei uns:

$\kappa\omega_P = \sigma$, $s = \mathcal{H}$, $\sigma|s$ fixpunktfrei, liefert also wie gewünscht Existenz eines Fixpunktes außerhalb s, also eine Gerade durch P.

Aber: Zu verschiedenen Punkten P gehören Kollineationen$\kappa\omega_P$, deren Begleitautomorphismen (affiner Ansatz) sich um einen inneren Automorphismus unterscheiden, daher nicht unmittelbar brauchbar! Die obigen Beispiele zeigen das.

Zusatzvoraussetzung: $\mathcal{P}$ ist Pappos-Raum. Dann ist sogar jeder Kollineation eindeutig ein Automorphismus von K zugeordnet und wir haben:

Satz 5. *Falls es ein $r \geq 1$ gibt mit $(\kappa|s)^r$ ist projektiv, dann liegt eine mit $\mathcal{D}(\kappa)$ eine Faserung vor.*

Schließt als Sonderfälle einige frühere Ergebnisse mit ein.

Einfaches Beispiel: Wie oben, aber $\mathbb{C}$ und Konjugation liefert duale Faserung, die auch Faserung ist.

5. Regularität

Betrachte vier verschiedene Geraden einer Faserung in $\mathcal{P}$. Die Faserung heißt **regulär**, falls die 4. Gerade von allen oder von keiner Transversalen der ersten drei getroffen wird. Aus der Existenz einer regulären Faserung folgt dann: $\mathcal{P}$ ist Pappos-Raum. Vgl. dazu

G. HESSENBERG, J. DILLER: *Grundlagen der Geometrie*, 2. Aufl., Berlin, de Gruyter, 1967.

Eine reguläre Faserung enthält mit je drei ihrer Geraden auch den durch diese bestimmten Regulus.

Satz 5. *Sei $\mathcal{P}$ ein 3-dimensionaler Pappos-Raum.*

(a) Jede reguläre Faserung in $\mathcal{P}$ ist durch eine Kollineation erzeugbar.

(b) $\mathcal{D}(\kappa)$ reguläre Faserung $\Leftrightarrow$ κ projektiv $\Leftrightarrow$ $\mathcal{D}(\kappa)$ enthält einen Regulus.

Konstruktion von **aregulären Faserungen** (Faserung ohne jeden Regulus) möglich.
Für endliche Räume PG(3,q) mit κ nicht projektiv (q keine Primzahl)
R.H.F. DENNISTON: Spreads which are not Subregular, *Glas. Mat.* **8**, 3-5 (1973).
vgl. auch
J.W.P. HIRSCHFELD: *Finite Projective Spaces of Three Dimensions*, Oxford, Clarendon Press, 1985.

Bemerkung 1: $\mathcal{P}$ pappossch: Punktmodell: PLÜCKERsche Quadrik. Wie sieht $\mathcal{D}(\kappa)$ aus für κ nicht projektiv ???.
Bemerkung 2: $\mathcal{P}$ nicht pappossch:
Punktmodelle für den Graßmann-Raum der Geraden gibt es nicht, falls gefordert wird: Bijektion + Geradenbüschel $\to$ Geraden.
Ersatz: Affine Darstellungen (4-dimensionale Karten)
κ projektiv: $\mathcal{D}(\kappa)$ erscheint in einer Karte (nicht notwendig in jeder!!) als eine affine Ebene (lineare Geradenkongruenz).
κ nicht projektiv: ???
H. H.: On Sets of Lines Corresponding to Affine Spaces, in: *Proceedings of "Combinatorics '88" (Ravello, Italy)*, to appear.

5. Die zugehörige Translationsebenen

κ ansetzen mittels α-semilinearer Abbildung: Es gibt $\alpha \in \mathrm{Aut}(K)$, $a,b \in K$ mit

$$x^{\alpha}x + x^{\alpha}b - a^{\alpha} \neq 0 \text{ for all } x \in K.$$

Umkehrung...
Rechnung zeigt: $\mathcal{T}$ ist auch duale Translationsebene.
D Divisionsring, K im linken und im rechten Nukleus, D ist 2-dim. Linksvektorraum über K. Ordnet sich für endliches K unter:
D.E. KNUTH: Finite Semifields and Projective Planes, *J. Algebra* **2**, 182-217 (1965) vgl. auch
P. DEMBOWSKI: *Finite Geometries*, Berlin Heidelberg New York, Springer, 1968.
Hier darf K auch nicht kommutativ sein.

Notwendig und hinreichend für $\mathcal{T}$ desarguessch:

$$b = 0 \wedge a = a^{\alpha} \wedge x^{\alpha\alpha} = axa^{-1} \text{ for all } x \in K;$$
$$b \neq 0 \wedge a,\, b \in \mathrm{Z}(K) \wedge \alpha = \mathrm{id}_K.$$

Falls $\mathcal{D}(\kappa)$ Faserung ist, dann gehört dazu ein Divisionsring D', K im linken und mittleren Nukleus und die zu $\mathcal{T}$ transponierte Ebene $\mathcal{T}'$ (Knuth).

D.R. HUGHES, E. KLEINFELD: Seminuclear Extensions of Galois Fields, *Am. J. Math.* **82**, 389-392 (1960).

Die dazu gehörigen Divisionsringe finden sich zum Teil in

D.R. HUGHES, F.C. PIPER: *Projective Planes*, New York Heidelberg Berlin, Springer, 1973. (Seite 191, Theorem 9.7).

Bedinung analog zu oben mit K Schiefkörper, α

Antiautomorhismus

endlicher Ordnung. Alles Zusammen also gerade die Vs. aus Satz 5. Liefert alternativen Beweis zu Satz 5.