MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

T a g u n g s b e r i c h t 15/1986

Algebraische Geometrie vom synthetischen Standpunkt

13.4. bis 19.4.1986

Die Tagung fand unter der Leitung von H. Karzel (München) und H. Wefelscheid (Duisburg) statt.

Die jetzige Arbeitstagung mit nur 13 Teilnehmern setzte die Intention der Tagung von 1981 fort.
Diese Tagung unterschied sich von den üblichen Tagungen dadurch, daß die Tagungsleitung bereits 1/2 Jahr vor Beginn Themen festgelegt hatte, auf die sich die Teilnehmer intensiv vorbereiten konnten.
Hierdurch wurde eine außerordentlich gründliche und fruchtbare Zusammenarbeit ermöglicht. Das bedeutete, daß jeder Vortragende im Schnitt zwei Stunden vortrug.

Gegenüber der ersten Tagung von 1981 konnten wir als Fortschritt verzeichnen, daß bei einer ganzen Reihe von grundlegenden Sätzen Beweislücken geschlossen werden konnten. Es handelte sich hierbei insbesondere um die Abklärung der genauen numerischen Bestimmung von Konstanten (z.B. char $K = p$, der Elementeanzahl $|K|$ des Grundkörpers, Dimension des Grundraumes, des Typs der zugrundegelegten Segre-Mannigfaltigkeit $S_{n_1,\dots n_r}$ u.a.m.) unter denen die fundamentalen Sätze gültig bzw. nicht mehr gültig sind.

Wir können jetzt konstatieren, daß diese von Burau und Timmermann gepflegten und weiterentwickelten synthetischen Methoden einer Behandlung der algebraischen Geometrie nunmehr eine Grundlegung erfahren haben. Ziel der weiteren Arbeit ist es, die im vorigen Jahrhundert erzielten mannigfachen Einzelergebnisse über Kurven und Flächen im P_3 jetzt systematisch in größeren Zusammenhängen zu ordnen und einer Behandlung in allen Dimensionen zugänglich zu machen.

Als ein Ergebnis der Tagung ergab sich, daß es möglich ist, viele der klassischen Flächen des P_3 (wie z.B. die Weddle-Fläche, die Dupin'sche Zykloide, die Kummer'sche Fläche, usw.) in kanonischer Weise als Hyperflächen in höherdimensionalen Räumen P_n für jedes n zu verallgemeinern und mit koordinatenfreien Methoden in ihrer inneren Struktur zu untersuchen.

Vortragsauszüge

H. HAVLICEK:
Rationale Normregelgebilde

Ist Y ein n-dimensionaler projektiver Pappos-Raum $(n \geq 1)$ und $S = \bigoplus_{i=1}^{r} S_i$ $(r \geq 1)$ ein weiterer projektiver Raum (der mit Y in einem Universalraum eingebettet liegt) derart, daß es Veronese Abbildungen

$$\pi_i : Y \to V^{(i)} \subset S_i$$

mit $\langle V^{(i)} \rangle = S^i$ gibt, so heißt nach W. Burau die Punktmenge

$$F = \bigcup_{x \in Y} (\pi_1(x) + \ldots + \pi_r(x))$$

ein rationales Normregelgebilde mit Leitveronesen $V^{(i)}$.
Die Segreschen Mannigfaltigkeiten $S_{n,r-1}$ ordnen sich hier unter.
Es wird auf das "Zerschneiden" und "Verkleben" von Normregelgebieten eingegangen. Ferner ist F in kanonischer Weise ein Normregelgebilde $\hat{F}$ des dualen projektiven Raumes $\hat{S}$ von S zugeordnet (Zusatzvoraussetzung über die Charakteristik von Y notwendig!) Insbesondere der Fall n = 1, s = 2 (Normregelflächen) wird ausführlicher behandelt.

A. HERZER:

Die Rang-k-Mannigfaltigkeit

Zu vorgegebener Segre $S_{m,n}$ wird definiert die Rang-k-Mannigfaligkeit $S_{m,n}^{(k)}$ durch

$$S_{m,n}^{(k)} = \cup <S_{m,k-1}> \quad 1 \leq k \leq \min \{m,n\},$$

wobei $S_{m,k}$ alle entsprechenden Untersegres der $S_{m,n}$ durchläuft. Es ist $S_{m,n}^{(o)} = S_{m,n}$, und $S_{n,n}^{(n)}$ ist die Determinantenmannigfaltigkeit. Definiert man

$$S_i = \{<S_{m,k-i-1} \cup S_{i-1,n}>\} \quad i = 0,\ldots,k,$$

alle $S_{a,b}$ Untersegres des $S_{m,n}$, $S_{m_1-1} = \emptyset = S_{-1,n}$,

so hat man k + 1 Scharen von proj. Unterräumen, für welche gilt:

(i) Jede der Scharen S_i überdeckt die ganze $S_{m,n}^{(k)}$.

(ii) Je zwei verschiedene Scharen sind disjunkt.

(iii) Jede Schar besteht aus maximalen proj. Unterräumen der $S_{n,n}^{(k)}$.

(iv) Jeder Punkt P aus $S_{m,n}^{(k)} \setminus S_{m,n}^{(k-1)}$ liegt auf genau einem Unterraum aus S_o bzw. S_k, und der Durchschnitt aller P enthaltenden Unterräume aus S_i ist genau P für $1 \leq i \leq k-1$.

(v) Jede Gerade von $S_{m,n}^{(k)}$ ist in einem Unterraum aus S_i für ein geeignetes i enthalten.

Der synthetische Beweis von (i) und (ii) ist einfach, von (iv) möglich, der von (iii) und (v) bisher noch Problem.

H. HOTJE:

Anwendung der Graßmann-Mannigfaltigkeiten

Sind P ein n-dimensionaler projektiver Raum und T ein Teilraum von T, so ist T selbst ein projektiver Raum und führt seinerseits zu einem projektiven Faktorraum P/T. Vom synthetischen Standpunkt her ist von besonderem Interesse, daß nach einem

Satz von Burau für jedes $k < n$ die Graßmann-Mannigfaltigkeiten von P/T und T sich so in die Graßmann $G_{n,k}$ einbetten lassen, daß sie der Schnitt von $G_{n,k}$ mit dem von ihren im Graßmann-Raum aufgespannten Teilraum sind. Es wird u.a. erläutert, wie sich aus diesem Satz die maximalen Teilräume von $G_{n,k}$ und ihre Lage zueinander herleiten lassen und wie sich die $G_{n,k}$ aus Teilräumen und Treffgeraden induktiv aufbauen läßt.

Günter Kist

"Synthetische Einführung der Veronese'schen Mannigfaltigkeiten"

Die inzidenzgeometrischen Eigenschaften der Scharen der maximalen ganz auf einer Segre-Mannigfaltigkeit liegenden projektiven Unterräume gestatten die folgende synthetische Definition einer Segre $S = X_1 \cdot \ldots \cdot X_s$ (induktiv):
Es seien $X_1, \ldots, X_s$ projektive Räume endlicher Dimension über demselben kommutativen Koordinatenkörper K. Für $s = 1$ setzen wir $S := X_1$ und $\langle S \rangle := X_1$. Für $s-1 \geq 1$ seien die Segre $S = X_1 \cdot \ldots \cdot X_{s-1}$ sowie der von ihr aufgespannte projektive Raum $\langle S \rangle$ bereits erklärt, und es gelte $\dim \langle S \rangle = m$, $\dim X_s = n$. Wir wählen einen Oberraum P von $\langle S \rangle$ der Dimension $(m+1)(n+1)-1$ und in P ein System $\mathfrak{B}$ von $n+2$ Unterräumen $B_o, B_1, \ldots, B_{n+1}$, die zu je $n+1$ unabhängig liegen, mit $\langle B_o \rangle = S$. Die Vereinigungsmenge $\bigcup_{b \in S} \text{Treff}\,(b, \mathfrak{B})$ über alle Treffräume des Bezugsystems $\mathfrak{B}$ durch S bezeichnen wir dann als Segre $X_1 \cdot \ldots \cdot X_s$.
Jede solche Segre läßt sich als Teilstruktur der speziellen Segre $X^s := X \cdot \ldots \cdot X$ auffassen, wenn X ein projektiver Raum über K mit $\dim X \geq \max\{\dim X_i \mid i \in \{1, \ldots, s\}\}$ ist. Die Veronese'schen Mannigfaltigkeiten erhält man als Unterstrukturen
$V^{\pi_1 \ldots \pi_s} := \{\pi_1(x) \cdot \pi_2(x) \cdot \ldots \cdot \pi_s(x) \mid x \in X\}$, $\pi_i \in PGL(X)$.
Die Schmiegräume der Segre's und ihrer Veronesen werden mittels des durch $d(x,y) := |\{i \in \{1, \ldots, s\} \mid x_i \neq y_i\}|$ für $x = x_1 \cdot \ldots \cdot x_s$, $y = y_1 \cdot \ldots \cdot y_s$ auf X^s definierten Knickabstandes eingeführt. Außerdem werden die Automorphismengruppen sowie die dualen Strukturen dieser Grundmannigfaltigkeiten beschrieben.

A. KREUZER:

Verlagerungen und Projektionen

Sei X ein n-dimensionaler pappuscher, projektiver Raum und $V^s := \{\underbrace{x\cdot\ldots\cdot x}_{s\text{-mal}} : x \in X\}$ eine Veronese. Zu einer direkten Zerlegung $X = A \oplus B$ wird in Abhängigkeit von $t \in \{o,1,\ldots,s-1\}$ eine direkte Zerlegung des von V^s aufgespannten Raumes $\langle V^s\rangle = E_t \oplus \bar{E}_t$ gesucht. Seien $V_a^s := \{a\cdot\ldots\cdot a : a \in A\}$ und $V_b^s := \{b\cdot\ldots\cdot b : b \in B\}$ die von A bzw. B bestimmten Unterveronesen von V^s und $T(V^s,t,V_a^s)$ und $T(V^s,s-t-1,V_b^s)$ die entsprechenden Schmiegräume, so gilt für $E_t := T(V^s,t,V_a^s)$ und $\bar{E}_t := T(V^s,s-t-1,V_b^s)$ die Behauptung $\langle V^s\rangle = E_t \oplus \bar{E}_t$. Die Projektion

$$\pi : \begin{cases} \langle V^s\rangle \setminus E_t \to \overline{E_t} \\ \quad x \quad\quad \to (x+E_t) \cap \overline{E_t} \end{cases}$$ heißt dann

(s,t)-Verlagerung. Wir betrachten nun die Restriktion $\pi|V^s$. Dabei wird $V_a^s = \langle V^s\rangle \cap E_t$ kein Bild zugeordnet, während $I_{t+1} := T(V^s,t+1,V_a^s) \cap T(V^s,s-t-1,V_b^s)$ keine Urbilder in V^s besitzt. Durch die Dilation oder Aufblähung genannte Abbildung

$$\tilde{\pi} : \begin{cases} V_a^s \quad\quad \to pr\ (I_{t+1}) \\ (a\ldots a) \to \rho\ (\underbrace{a\cdot\ldots\cdot a}_{(s-t-1)\text{-mal}} \cdot \underbrace{b\cdot\ldots\cdot b}_{(t+1)\text{-mal}}) \end{cases}$$

wobei b ganz B durchläuft, wird die (s-t)-Verlagerung dann ergänzt.

H.J. KROLL:

Oskulanten

Es sei $S = X^s$ eine Segre-Mannigfalitgkeit, so daß für alle Veronese-Mannigfaltigkeiten $V^r \subset S$ der A-Raum A^r und der Raum $\langle V^r \rangle$ der Veronese V^r komplementär liegen. Es seien $V^{r_1}, V^{r_2} \subset S$ zwei Veronesen mit $r_1 < r_2$. Die Veronese V^{r_1} heißt mit V^{r_2} (im Punkt p) verbunden von der Stufe $r_2 - r_1$, wenn es eine innere Projektion φ der Stufe $r_2 - r_1$ gibt mit $\varphi(V^{r_2}) = V^{r_1}$ (und $V^{r_1} \cap V^{r_2} = p$).
Es sei jetzt $V^s \subset S$ eine Veronese und $p \in V^s$. Alle mit V^s in p verbundenen Veronesen V^{s-t} haben bei der Projektion ρ aus dem A-Raum A^s auf $\langle V^s \rangle$ das gleiche Bild $\varphi(V^{s-t})$. Das Bild $\rho(V^{s-t})$ ist eine Veronese und wird Oskulante von V^s im Punkt p genannt.
Es gilt:

1) $\langle \rho(V^{s-t}) \rangle$ ist der Schmiegraum $T(V^s, s-t, p)$ der Stufe s-t von V^s in p.

2) $\rho(V^{s-t}) = \{T(V^s, s-t, p) \cap T(V^s, t, x) \mid x \in V^s \setminus \{p\} \cup \{p\}$.

E.M. SCHRÖDER:

Graßmannsche Mannigfaltigkeiten

Ausgehend von der Tensoralgebra und der Graßmann-Algebra über einen Vektorraum (V,K) beliebiger Dimension und beliebiger Charakteristik wurden Segresche und Graßmannsche Mannigfaltigkeien mit den zugehörigen Verbindungen betrachtet. Es wurden einfache Beweise zur Gewinnung der für die Graßmannschen Mannigfaltigkeiten grundlegenden Büchelabbildung und ihrer wesentlichen Eigenschaften angegeben. Ferner wurde der Fall der $G_{n,1}$ genauer diskutiert und auf die Möglichkeit einer Projektion von der $S_{n,n}$ auf die $G_{n,1}$ bei beliebiger Charakteristik eingegangen.

H. TIMMERMANN:

Kegelspitzenmannigfaltigkeiten

Sei eine V_n^2 gegeben und ein projektiver Raum $P = P_{\binom{n+2}{2}-n-2} \subset \langle V_n^2 \rangle$.

Sei $v^2 : P_n \to V_n^2$ und $M \subset P_n$ die Menge aller Punkte $Q_o \in P_n$ mit $T(V_n^2, 1, v^2(Q_o)) \cap P \neq \emptyset$. Die Menge M heißt Kegelspitzenmannigfaltigkeit. Ist $M = P_m$, so gibt es ein $R_o \in P_n$ mit $T(V_n^2, 1, v^2(R_o)) \subset P$.

Schließt man diesen Trivialfall aus und ist $g \subset P_n$ eine Gerade und ferner $v^2(g) + g \cdot P_{n-2} \supset F$ die durch die Gerade g und ihre Schmiegräume bestimmte Regelmannigfaltigkeit, so ist $F \cap P \neq \emptyset$ (Bezout) und somit M eine Hyperfläche der Ordnung n + 1.

Im weiteren werde P durch Punkte aus V_n^2 aufgespannt. Ist n = 3, so heißt M Weddlefläche. Sind $P_o^j \in v^4(M)$ und ist $v^4(Q_o) \in \Sigma P_o^j$ so ist $Q_o \in M$

Es ist daher $v^4(M) = H \cap V_3^4$. M enthält 6 Doppelpunkte und 25 Geraden sowie eine V_1^3 durch die 6 Doppelpunkte. Projiziert man $v^2(M)$ aus dem v^2 Bild der 6 Doppelpunkte, so ergibt sich als Bild eine Kummerfläche. Die 15 Verbindungsgeraden der Doppelpunkte werden in 16 Doppelpunkte der Kummerfläche abgebildet, die V_1^3 in den 16-ten. Die Cremonainvolution $(x \to \frac{1}{x})$ mit Punkten der den Raum P aufspannenden Punkte als Fundamentalpunkte bildet die Weddlefläche in eine weitere ab. Die V_1^3 wird dabei in eine Gerade durch zwei Doppelpunkte abgebildet und die Gerade in die V_1^3 durch die Doppelpunkte. Kein Doppelpunkt der Kummerfläche ist somit ausgezeichnet.

H. WEFELSCHEID:

Cremona Transformationen

Cremona Transformationen kann man mit Hilfe homaloider Netze $\{f^s_{n-1}\}$ in synthetischer Weise erklären als Zusammensetzung einer Veronese-Abbildung v^s mit einer Projektion

$$pr: \langle V_n{}^s \rangle \to P_n$$

wobei das Projektionszentrum $Z = Z_{n_s-n-1}$ von dem homaloiden Netz abhängt. Diese synthetische Definition gestattet es, in einfacher Weise Jonquière Transformationen für jedes n zu erklären. Wie Timmermann zeigen konnte, lassen sich die Jonquière Transformationen als Produkte von quadratischen Cremona Transformationen schreiben. Da man in der Ebene zeigen kann, daß die Jonquière Transformationen die Gruppe der ebenen Cremona Transformationen erzeugt, erhält man hier einen synthetischen Beweis des Satzes von Max Noether, daß die ebenen Cremona Transformationen von dem quadratischen erzeugt werden.

D. WINDELBERG:

Flächen 4. Ordnung

Mit Hilfe der Begriffsbildung und Theorie der synthetischen algebraischen Geometrie von W. BURAU ist es möglich, die "Klassischen" Flächen 4. Ordnung (wie DUPIN'scher Zyklade, STEINER'scher Römerfläche, KUMMER'scher - sowie WEDDLE-Fläche) synthetisch zu konstruieren, wobei sogar Verallgemeinerungen auf Flächen höherer Ordnung möglich sind. So entsteht z.B. eine Weddle-Fläche mit Hilfe von Kegelspitzenmannigfalten und daraus durch Projektion eine Kummersche Fläche

Berichterstatter: H. Karzel und H. Wefelscheid

Tagungsteilnehmer

Dr. A. Kreuzer
Lehrstuhl für Geometrie der TU
Postfach 2o242o
8ooo München 2

Prof. Dr. W. Burau
Brahmsallee 13
2000 Hamburg 13

Prof. Dr. H. J. Kroll
Techn. Universität München
Fakultät f. Mathematik/Informatik
Arcisstr. 21
8ooo München 2

Prof. Dr. Havlischek
Math. Institut der
Techn. Universität Wien
Wiedner Hauptstraße 6-1o
A-1o4o Wien/Österreich

Prof. Dr. E. Schröder
Mathematisches Seminar der
Universität Hamburg
Bundesstr. 55
2000 Hamburg 13

Prof. Dr. A. Herzer
Universität Mainz
Fachbereich Mathematik
Saarstr. 21
65oo Mainz

Prof. Dr. K. Sörensen
Lehrstuhl für Geometrie der TU
Postfach 2o242o
8ooo München 2

Prof. Dr. H. Hotje
Institut für Mathematik
Universität Hannover
Welfengarten 1
3000 Hannover 1

Dr. H. Timmermann
Spitzbergenweg 41
2ooo Hamburg 73

Prof. Dr. H. Karzel
Lehrstuhl für Geometrie der TU
Postfach 2o242o
8ooo München 2

Prof. Dr. H. Wefelscheid
Universität-GH-Duisburg
Postfach 1o1 629
41oo Duisburg 1

Prof. Dr. H. Kist
Lehrstuhl für Geometrie der TU
Postfach 2o242o
8ooo München 2

Dr. D. Windelberg
Institut für Mathematik
Universität Hannover
Welfengarten 1
3000 Hannover 1