DIE QUATERNIONENGERADE

$\mathcal{P}(\mathbb{H}^2)$	Projektivität Antiprojektivität
$\mathbb{H} \cup \{\infty\}$	$z \mapsto (az+b)(cz+d)^{-1}$ mit .... $z \mapsto (a\bar{z}+b)(c\bar{z}+d)^{-1}$ mit ....
4-dim. euklid. Raum + Konformer Abschluß	gls. Möbius-Transformation ggs. —"— —"—
$S^4 \subset \mathbb{E}^5 \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^6)$	gls. automorphe Koll. der S^4 ggs.

DER FIXPUNKTSATZ

Jede Projektivität hat mindestens einen Fixpunkt.

Beweise:

W. KRÜGER (1971): Jeder Kegelschnitt in $\mathcal{P}(\mathbb{H}^3)$ besitzt keine Passanten.

L. GYARMATHI (1974): Jede gls. automorphe Kollineation der S^4 hat wenigstens einen Fixpunkt.

J.B. WILKER (1981): Automorphe Kollineation $\varkappa$ der $S^{n-1} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^{n+1})$ ohne Fixpunkte auf S^{n-1} $\Leftrightarrow$
automorphe Kongruenz der $S^{n-1} \subset \mathbb{E}^n$ ohne Fixpunkte auf S^{n-1}

$f \in O^+(5,\mathbb{R}) \Rightarrow f$ hat Eigenwert 1

(ANTI-) PROJEKTIVITÄTEN MIT MINDESTENS ZWEI FIXPUNKTEN

$\mathbb{H} \cup \{\infty\}$, $0, \infty$ .. Fixpunkte

Projektivität

$GO^+(4,\mathbb{R})$

$$\lambda \left[\begin{array}{cc|c} \cos 2\varphi & -\sin 2\varphi & \Theta \\ \sin 2\varphi & \cos 2\varphi & \\ \hline \Theta & & 2\psi \end{array}\right]$$

$$z \mapsto \lambda e^{i(\varphi+\psi)} z \, e^{i(\varphi-\psi)}$$

$\lambda \in \mathbb{R}^+$, $\varphi, \psi \in \mathbb{R}$

Antiprojektivität

$GO^-(4,\mathbb{R})$

$$\lambda \left[\begin{array}{cc|c} 1 & & \Theta \\ & -1 & \\ \hline \Theta & & \pi+2\psi \end{array}\right]$$

$$z \mapsto \lambda e^{i\psi} \bar{z} \, e^{-i\psi}$$

$\lambda \in \mathbb{R}^+$, $\psi \in \mathbb{R}$

KLASSIFIKATION BIS AUF PROJEKTIVE ÄQUIVALENZ

(λ, φ, ψ)

$(\lambda, \pm\varphi, \pm\psi)$ $(\lambda, \pm\psi, \pm\varphi)$

$(\lambda^{-1}, \mp\varphi, \pm\psi)$ $(\lambda^{-1}, \pm\varphi, \mp\psi)$

mit φ, ψ nur modulo π

(λ, ψ)

$(\lambda, \pm\psi)$, $(\lambda^{-1}, \pm\psi)$

mit ψ nur modulo π

PARABOLISCHE (ANTI-) PROJEKTIVITÄTEN

$\mathbb{H} \cup \{\infty\}$, ∞ fix.

Parabolische Projektivität	Parabolische Antiprojektivität
fixpunktfreie gls. Ähnlichkeit von $\mathbb{H}$ $\Downarrow$ Kongruenz	fixpunktfreie ggs. Ähnlichkeit von $\mathbb{H}$ $\Downarrow$ Kongruenz

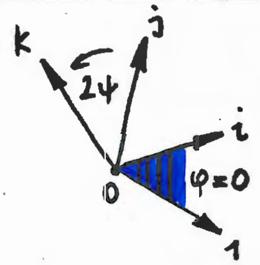
Ist Ω fixpunktfreie Kongruenz von E^n $\Rightarrow$ $\Omega = \Gamma\Sigma$

$$\left.\begin{array}{l}\Gamma \text{.. Kongruenz von } E^n \text{ mit } fix(\Gamma) \neq \emptyset \\ \Sigma \text{.. Schiebung von } E^n \text{ mit } fix(\Gamma)^\Sigma = fix(\Gamma)\end{array}\right\} \text{eindeutig}$$

Umkehrung: Γ mit $f \in fix(\Gamma)$

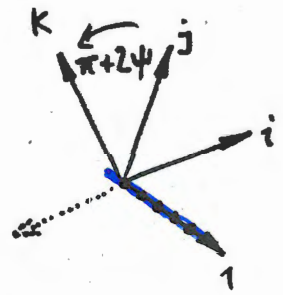
Σ mit $x \mapsto x+s$

$\Gamma\Sigma$ ist fixpunktfrei $\iff$ $s \notin (fix(\Gamma)-f)^\perp$



$s=1$

$z \mapsto e^{i\psi} z e^{-i\psi} + 1$



$s=1$

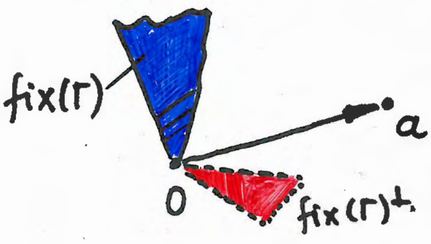
$z \mapsto e^{i\psi} \bar{z} e^{-i\psi} + 1$

KLASSIFIKATION BIS AUF PROJEKTIVE ÄQUIVALENZ

$\psi \ldots \pm\psi$ mit ψ nur modulo π

ANWENDUNG: Alle parabolischen (Anti-) Projektivitäten

mit $0 \mapsto a \in \mathbb{H}$, $a \neq 0$, $\infty \mapsto \infty$



$\Gamma \Sigma$ $\qquad a \notin \mathrm{fix}(\Gamma)^{\perp}$

Fall 1: $\mathrm{fix}(\Gamma) = \mathbb{H}$ $\}$ Projektivität $\Leftrightarrow$ $\dim \mathrm{fix}(\Gamma) = 2{,}4$

Fall 2: $\mathrm{fix}(\Gamma) \neq \mathbb{H}$ $\}$ Antiprojektivität $\Leftrightarrow$ $\dim \mathrm{fix}(\Gamma) = 1{,}3$

Die parabolischen Projektivitäten mit $\infty \mapsto \infty$ (+ Identität) bilden <u>keine</u> Gruppe!

Fall 1 (+ Projektivität) $\Leftrightarrow$ Ist zu Elation von $\mathcal{P}(\mathbb{H}^3)$ fortsetzbar. $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ Ist in $\mathcal{P}(\mathbb{H}^3)$ als Produkt von 2 Perspektivitäten darstellbar.