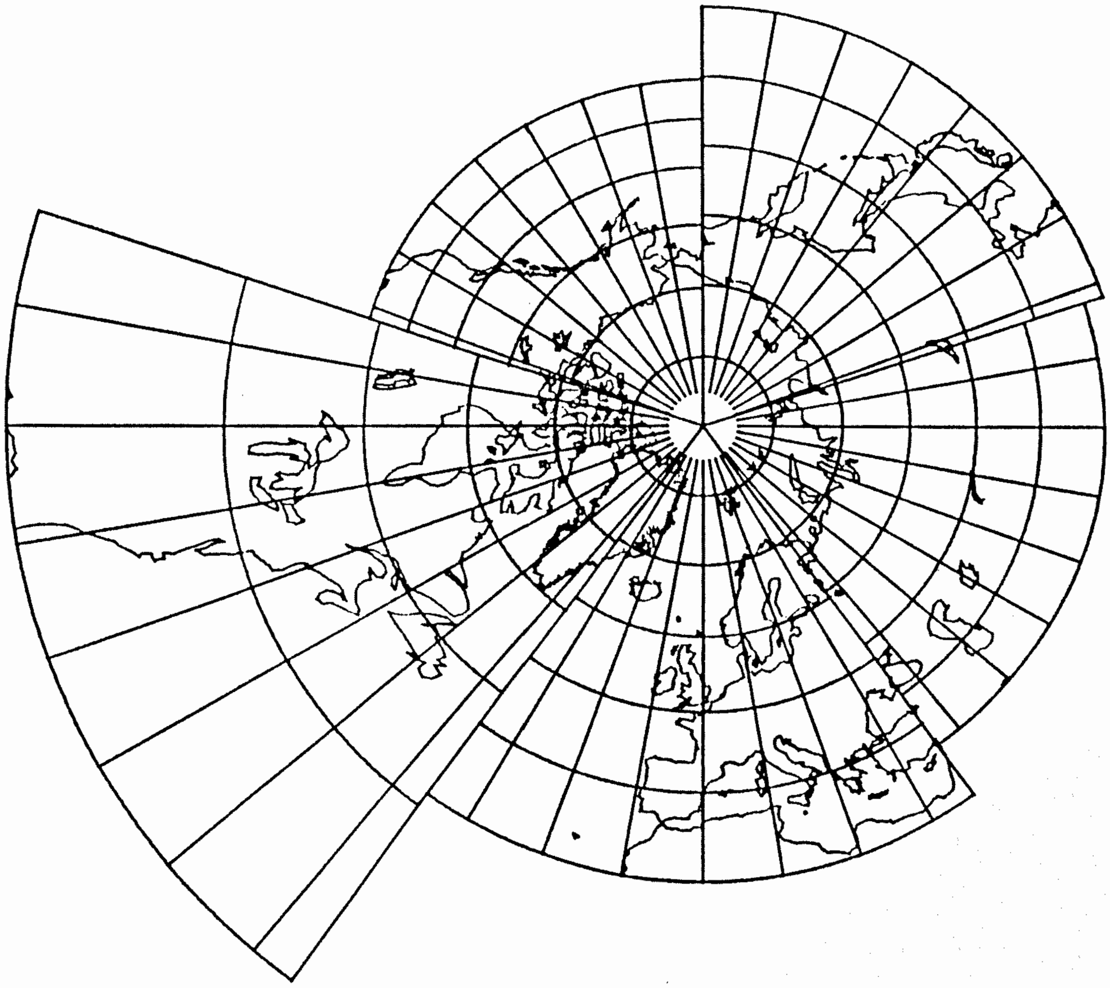
Kleiner Überblick zum Themenkreis Kartenentwürfe

Hans Havlicek
Institut für Geometrie
Technische Universität
Wiedner Hauptstraße 8-10/113
1040 Wien



1. Grundlagen

Wir verwenden im Raum

kartesische (x,y,z)-Koordinaten.

Als Modell der Erdkugel dient die Einheitskugel mit der Gleichung

$x^2+y^2+z^2 = 1$.

Die Lage eines Punktes auf der Einheitskugel wird durch

Kugelkoordinaten (λ,β),
$-180^\circ<\lambda\leq 180^\circ$ (*geographische Länge*),
$-90^\circ\leq\beta\leq 90^\circ$ (*geographische Breite*)

beschrieben. Als Koordinatensysteme in der Kartenebene dienen

kartesische $(\bar{x},\bar{y})$-Koordinaten

sowie

Polarkoordinaten (r,φ), $0\leq r$, $-180^\circ<\varphi\leq 180^\circ$.

Es gelten folgende Umrechnungsformeln:

Kugelkoordinaten $\longrightarrow$ Raumkoordinaten

$x = \cos\lambda\cdot\cos\beta$, $y = \sin\lambda\cdot\cos\beta$, $z = \sin\beta$.

Polarkoordinaten $\longrightarrow$ ebene kartesische Koordinaten:

$\bar{x} = r\cdot\cos\varphi$, $\bar{y} = r\cdot\sin\varphi$.

Die nächsten Formeln werden nur bei jenen Kartenentwürfen benötigt, die sich auf einen räumlichen Projektionsvorgang stützen. Wir identifizieren hier die Tangentialebene im Nordpol (0,0,1) mit der Kartenebene.

ebene kartesische Koordinaten $\longrightarrow$ räumliche kartesische Koordinaten

$x = \bar{x}$, $y = \bar{y}$, $z = 1$.

Alle im folgenden angegebenen Abbildungsgleichungen gelten nur für *normale Entwurfsachse.*

2. Azimutale Entwürfe

Azimutaler Entwurf, allgemein:

$$\boxed{r = \rho(\beta), \qquad \varphi = \lambda.}$$

mit einer Funktion $\rho: I \rightarrow \mathbb{R}^+\cup\{0\}$, $I \subset [-90^\circ,90^\circ]$, $\rho(90^\circ) = 0$. Die Funktion ρ gibt an, wie die Abbildung

$$\boxed{\text{Halbmeridiane durch den Nordpol} \longrightarrow \text{Halbgeraden durch } (0,0)}$$

erfolgt. Ein azimutaler Entwurf ist im Nordpol stets winkeltreu, die im folgenden genannten Abbildungen sind im Nordpol sogar *isometrisch.*

Orthographische Projektion:

$$\rho(\beta) = \cos\beta.$$

Eigenschaften: abweitungstreu.
Anwendungen: räumliche Ansichten der Erdkugel, Mondkarten.

Stereographische Projektion (aus dem Südpol):

$$\rho(\beta) = \frac{2\cdot\cos\beta}{1+\sin\beta}.$$

Eigenschaften: winkeltreu (konform), kreistreu.
Anwendungen: drehbare Sternkarten.

Gnomonische Projektion (aus der Kugelmitte):

$$\rho(\beta) = \cot\beta.$$

Formel gilt nur für Nordhalbkugel.
Eigenschaften: geodätische Kurven (Großkreise) $\longrightarrow$ geodätische Kurven (Geraden).

Perspektiver Entwurf mit Augpunkt $(0,0,c)$:

$$\rho(\beta) = \frac{|c-1|\cdot\cos\beta}{|c-\sin\beta|}.$$

Formel gilt nur in einer Umgebung des Nordpols.
Anwendungen: Satellitenphotos.

Abstandstreuer (äquidistanter) azimutaler Entwurf:

$$\rho(\beta) = \mathrm{arc}(90^\circ-\beta).$$

Eigenschaften: längentreu längs der Meridiane.
Anwendungen: Funkmeßkarten.

Flächentreuer (äquivalenter) azimutaler Entwurf (LAMBERT):

$$\rho(\beta) = \sqrt{2(1-\sin\beta)}.$$

Eigenschaften: sehr günstige Verzerrungswerte nahe dem Nordpol.
Anwendungen: Geographische Karten.

3. Zylinderentwürfe

3.1. Allgemeine Formeln

Zylinderentwurf, allgemein:

$$\bar{x} = m\lambda, \qquad \bar{y} = \eta(\beta),$$

mit einer Funktion $\eta: I \to \mathbb{R}$ mit $I \subset [-90^\circ, 90^\circ]$ und einer Konstanten $m \neq 0$. Die Funktion η gibt an, wie die Abbildung

Halbmeridiane durch den Nordpol $\longrightarrow$ Zylindererzeugende

erfolgt. Die Konstante m legt den Radius des Hilfsdrehzylinders fest. Dieser ist anschließend in die Ebene abzuwickeln.

Abstandstreuer Zylinderentwurf, allgemein:

$$\eta(\beta) = \pm \operatorname{arc}(\beta).$$

Flächentreuer Zylinderentwurf, allgemein:

$$\eta(\beta) = \pm\frac{\sin\beta}{m}.$$

Winkeltreuer Zylinderentwurf, allgemein:

$$\eta(\beta) = \pm m\cdot \ln(\tan(45^\circ+\frac{\beta}{2})).$$

3.2. Zylinderentwürfe mit längentreuem Äquator

Alle Abbildungen sind nicht bloß *längentreu* sondern sogar *isometrisch längs des Äquators* und bilden daher eine Zone entlang des Äquators recht gut ab. In jedem Fall ist beim ±-Zeichen das Plus zu wählen; dann berechnet sich die Konstante m zu

$$m = 1.$$

Abstandstreuer Zylinderentwurf:

$$\eta(\beta) = \operatorname{arc}(\beta).$$

Anwendungen: Weltkarten.

Flächentreuer Zylinderentwurf (LAMBERT):

$$\eta(\beta) = \sin\beta.$$

Winkeltreuer Zylinderentwurf (MERCATOR):

$$\eta(\beta) = \ln(\tan(45^\circ+\frac{\beta}{2})).$$

Eigenschaften: Kugelloxodromen erscheinen geradlinig.
Anwendungen: Seekarten.

3.3.Zylinderentwürfe mit zwei längentreuen Breitenkreisen

Die angegebenen Abbildungen sind längs *zwei Breitenkreisen* $\beta = \gamma$, $\beta = -\gamma$ mit $0^\circ<\gamma<90^\circ$ *längentreu* und sogar *isometrisch*. Sind die beiden Breitenkreise nicht allzu weit voneinander entfernt, so wird eine Zone, die beide Breitenkreise enthält, recht gut abgebildet. Die Konstante m berechnet sich stets zu

$$m = \cos\gamma.$$

WARNUNG: Der Hilfsdrehzylinder ist zwar im folgenden der Verbindungszylinder der beiden Breitenkreise, aber die Abbildung

Kugel $\longrightarrow$ Zylinder kann niemals so erfolgen, daß die beiden Schnittkreise fest bleiben.

Abstandstreuer Zylinderentwurf:

$$\eta(\beta) = \operatorname{arc}(\beta).$$

Flächentreuer Zylinderentwurf:

$$\eta(\beta) = \frac{\sin\beta}{\cos\gamma}.$$

Winkeltreuer Zylinderentwurf:

$$\eta(\beta) = \cos\gamma \cdot \ln(\tan(45^\circ + \tfrac{\beta}{2})).$$

4. Kegelentwürfe

4.1. Allgemeine Formeln

Kegelentwurf, allgemein:

$$r = \rho(\beta), \qquad \varphi = n\lambda,$$

mit einer Funktion $\rho : I \to \mathbb{R}^{+} \cup \{0\}$, $I \subset [-90^\circ, 90^\circ]$, und einer Konstanten n mit $0<n<1$ (Winkelstauchfaktor). Dieser Faktor n legt den Öffnungswinkel des Hilfsdrehkegels fest, die Funktion ρ gibt an, wie die Abbildung

Halbmeridiane durch den Nordpol $\longrightarrow$ Kegelerzeugende

erfolgt. Der Hilfsdrehkegel ist anschließend in die Ebene abzuwickeln.

Abstandstreuer Kegelentwurf, allgemein:

$$\rho(\beta) = R + \operatorname{arc}(\pm\beta),$$

mit einer Konstanten R.
Eigenschaften: Je nach Wahl der Konstanten R kann eventuell nur ein Teil der Kugel abgebildet werden.

Flächentreuer Kegelentwurf, allgemein:

$$\rho(\beta) = \sqrt{\pm\frac{2}{n}\sin\beta + C},$$

mit einer Konstanten C.
Eigenschaften: Je nach Wahl der Konstanten C kann eventuell nur ein Teil der Kugel abgebildet werden.

Winkeltreuer Kegelentwurf, allgemein:

$$\rho(\beta) = K \cdot \tan^{\pm n}(45^\circ - \tfrac{\beta}{2}),$$

mit einer Konstanten $K > 0$.
Eigenschaften: Nordpol $\longmapsto$ Kegelspitze. Die Abbildung ist im

Nordpol *nicht winkeltreu.*

4.2. Kegelentwürfe mit einem längentreuen Breitenkreis

Die angegebenen Abbildungen sind nicht bloß *längentreu* sondern sogar *isometrisch längs des Kreises mit der geographischen Breite* γ ($0^\circ<\gamma<90^\circ$) und bilden daher eine Zone entlang dieses Breitenkreises (*Berührparallel*) recht gut ab. In jedem Fall berechnet sich der Winkelstauchfaktor zu

$$\boxed{n = \sin\gamma.}$$

und beim $\pm$-Zeichen ist das Minus zu wählen, damit die geographische Breite zur Kegelspitze hin *zunimmt.*

Abstandstreuer Kegelentwurf:

$$R = \cot\gamma+\operatorname{arc}(\gamma),\ \text{daher}$$

$$\rho(\beta) = \cot\gamma+\operatorname{arc}(\gamma)-\operatorname{arc}(\beta).$$

Flächentreuer Kegelentwurf:

$$C = 2+\cot^2\gamma\ ,\ \text{daher (nach kleinerer Umformung)}$$

$$\rho(\beta) = \frac{\sqrt{1+\sin^2\gamma-2\sin\gamma\cdot\sin\beta}}{\sin\gamma}.$$

Winkeltreuer Kegelentwurf:

$$K = \cot\gamma\cdot\tan^n(45^\circ+\tfrac{\gamma}{2}),\ \text{daher}$$

$$\rho(\beta) = \cot\gamma\cdot\tan^{\sin\gamma}(45^\circ+\tfrac{\gamma}{2})\cdot\cot^{\sin\gamma}(45^\circ+\tfrac{\beta}{2}).$$

4.3. Kegelentwürfe mit zwei längentreuen Breitenkreisen

Die angegebenen Abbildungen sind längs *zwei Breitenkreisen* $\beta = \gamma$, $\beta = \delta$ *längentreu* und sogar *isometrisch.* In jeden Fall wird eine Zone, die beide Breitenkreise enthält, recht gut abgebildet. Die folgenden Formeln gelten nur unter den Voraussetzungen

$-90^\circ<\gamma<\delta<90^\circ$ und $\cos\gamma>\cos\delta$;

der erste Kreis ($\beta = \gamma$) liegt also südlicher als der zweite Kreis ($\beta = \delta$) und hat den größeren Radius.

WARNUNG: Der Hilfsdrehkegel ist im folgenden nicht der Verbindungskegel der beiden Breitenkreise. Sein Öffnungswinkel ist vielmehr (über den Winkelstauchfaktor n) durch die geometrischen Forderungen an den jeweiligen Entwurf bestimmt.

Da die Abbildungsgleichungen zum Teil recht komplizierte Form aufweisen,geben wir nur jene Konstanten an, die in den Formeln aus Abschnitt 4.1 auftreten.

Abstandstreuer Kegelentwurf (DE L'ISLE):

$$R = \operatorname{arc}(\delta) + \frac{\operatorname{arc}(\delta-\gamma)\cdot\cos\delta}{\cos\gamma-\cos\delta}, \qquad n = \frac{\cos\gamma-\cos\delta}{\operatorname{arc}(\delta-\gamma)}.$$

Flächentreuer Kegelentwurf (ALBERS):

$$C = \left(\frac{\cos\gamma}{n}\right)^2 + \frac{2}{n}\cdot\sin\gamma, \qquad n = \frac{\sin\gamma+\sin\delta}{2}.$$

Winkeltreuer Kegelentwurf:

$$K = \frac{\cos\delta}{n}\cdot\tan^n(45^\circ+\tfrac{\delta}{2}), \qquad n = \frac{\ln(\cos\delta)-\ln(\cos\gamma)}{\ln(\tan(45^\circ+\frac{\gamma}{2}))-\ln(\tan(45^\circ+\frac{\delta}{2}))}.$$

5. Zwei Beispiele unechter Zylinderentwürfe

Entwurf von SANSON:

$$\bar{x} = \operatorname{arc}(\lambda)\cdot\cos\beta \qquad \bar{y} = \operatorname{arc}(\beta)$$

Eigenschaften: isometrisch längs des Äquators und des Nullmeridians, abweitungstreu, flächentreu.
Anwendungen: Weltkarten.

Entwurf 5 von ECKERT:

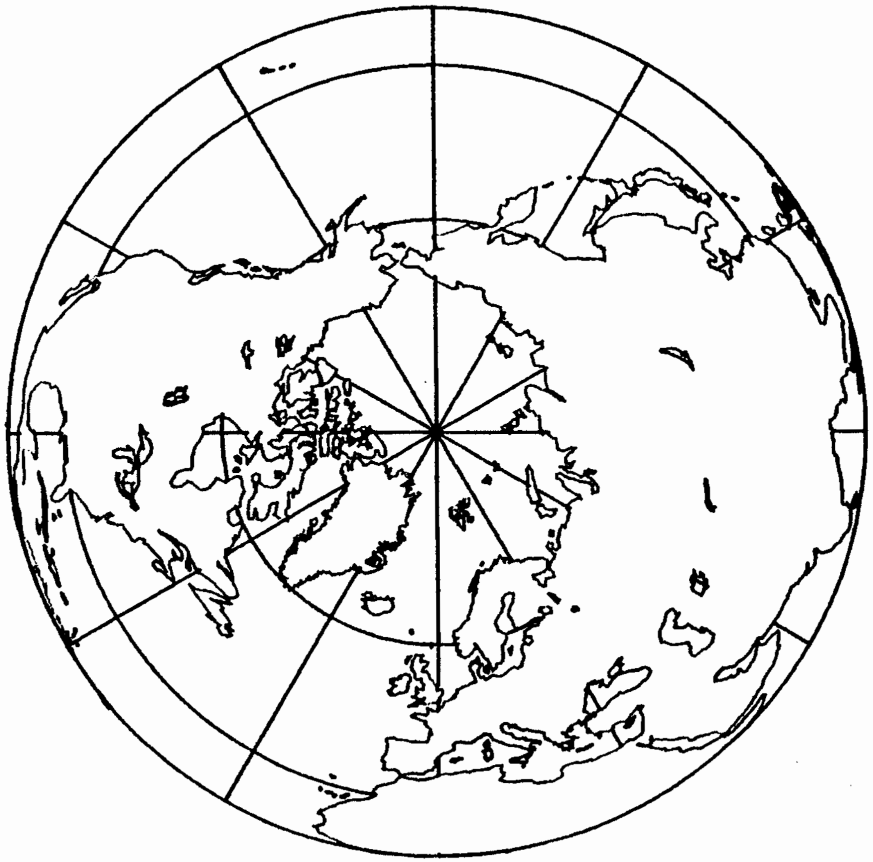
$$\bar{x} = C\cdot\frac{\operatorname{arc}(\lambda)(1+\cos\beta)}{2}, \qquad \bar{y} = C\cdot\operatorname{arc}(\beta).$$

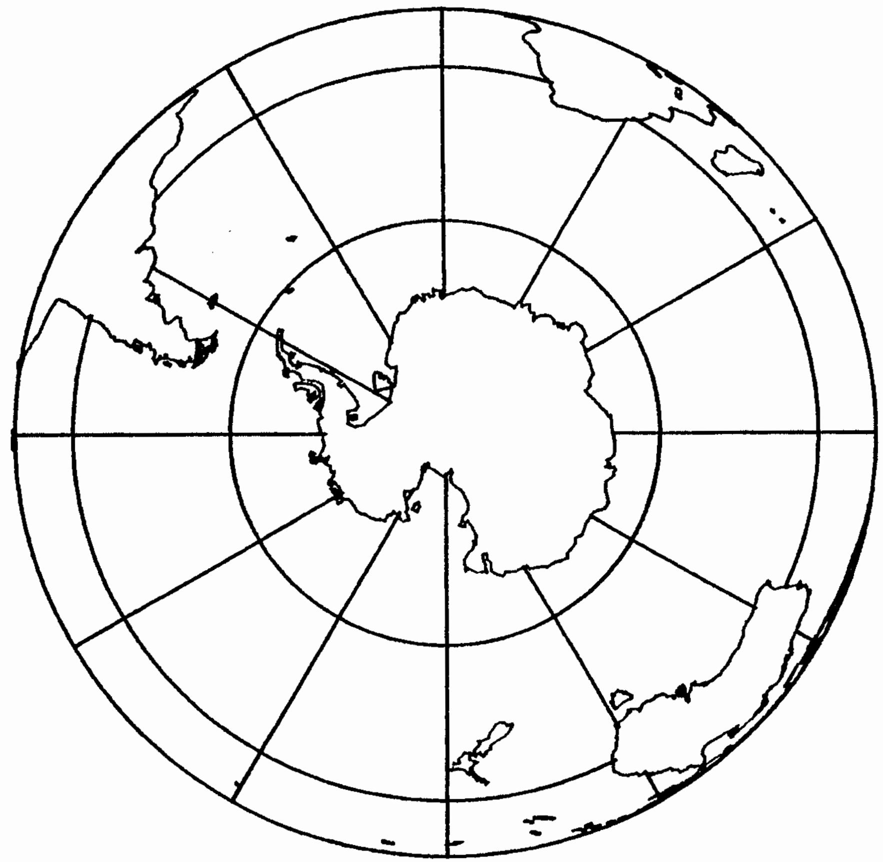
mit einer Maßstabskonstanten $C > 0$. Für $C = 1$ ist dieser Entwurf das *arithmetische Mittel* des abstandstreuen Zylinderentwurfs und des Entwurfs von SANSON. Setzen wir

$$C = \frac{2}{\sqrt{\pi+2}},$$

so hat das Kugelbild - ebenso wie die Kugel - den Flächeninhalt 4π.
Eigenschaften: weder flächen- noch winkeltreu.
Anwendungen: Weltkarten.

Orthographische Projektion



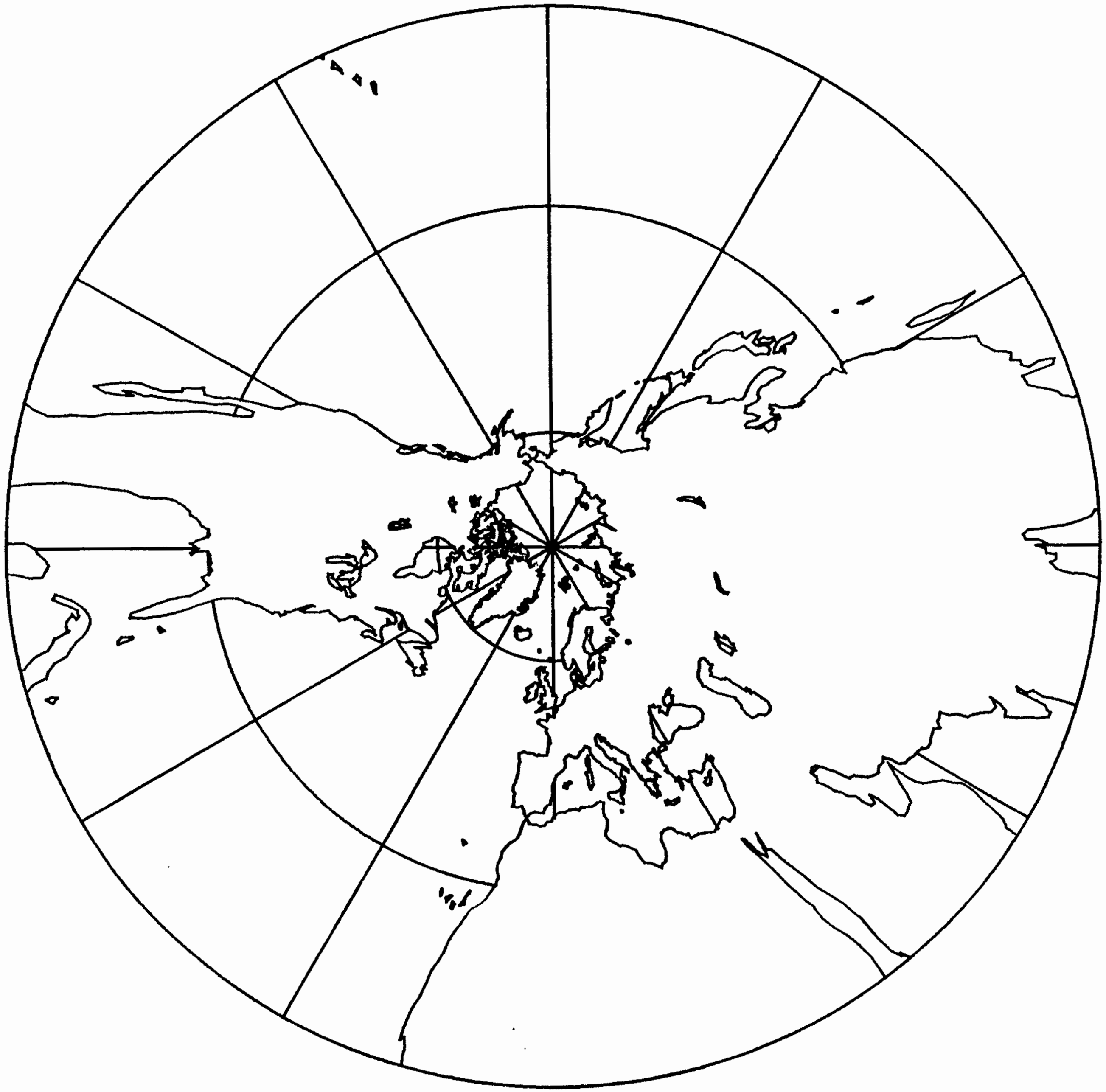


Normale Entwurfsachse (0, 90, 0)

Orthographische Projektion

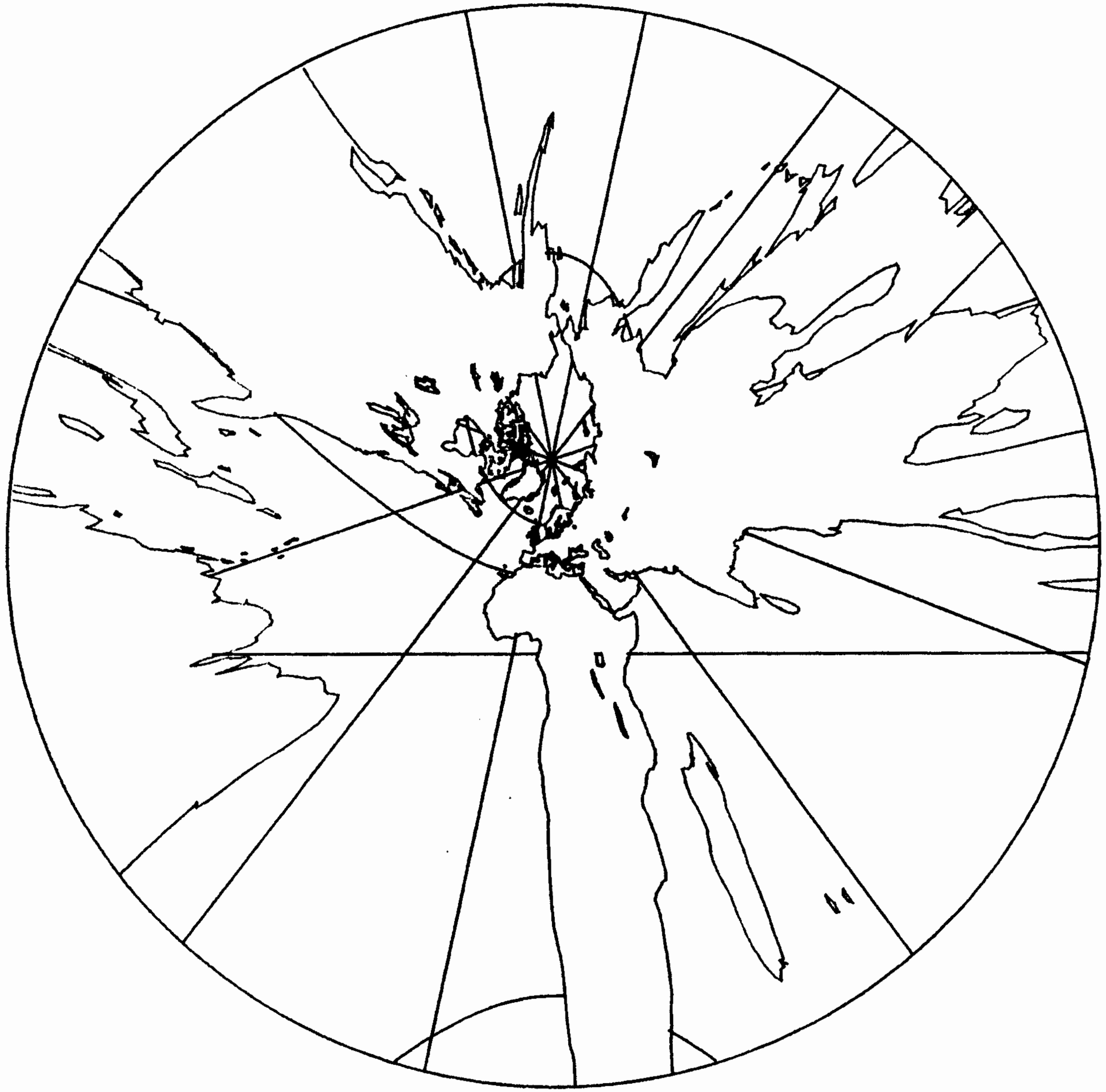
Schiefe Entwurfsachse (16, 48, 0)

Gnomonische Projektion



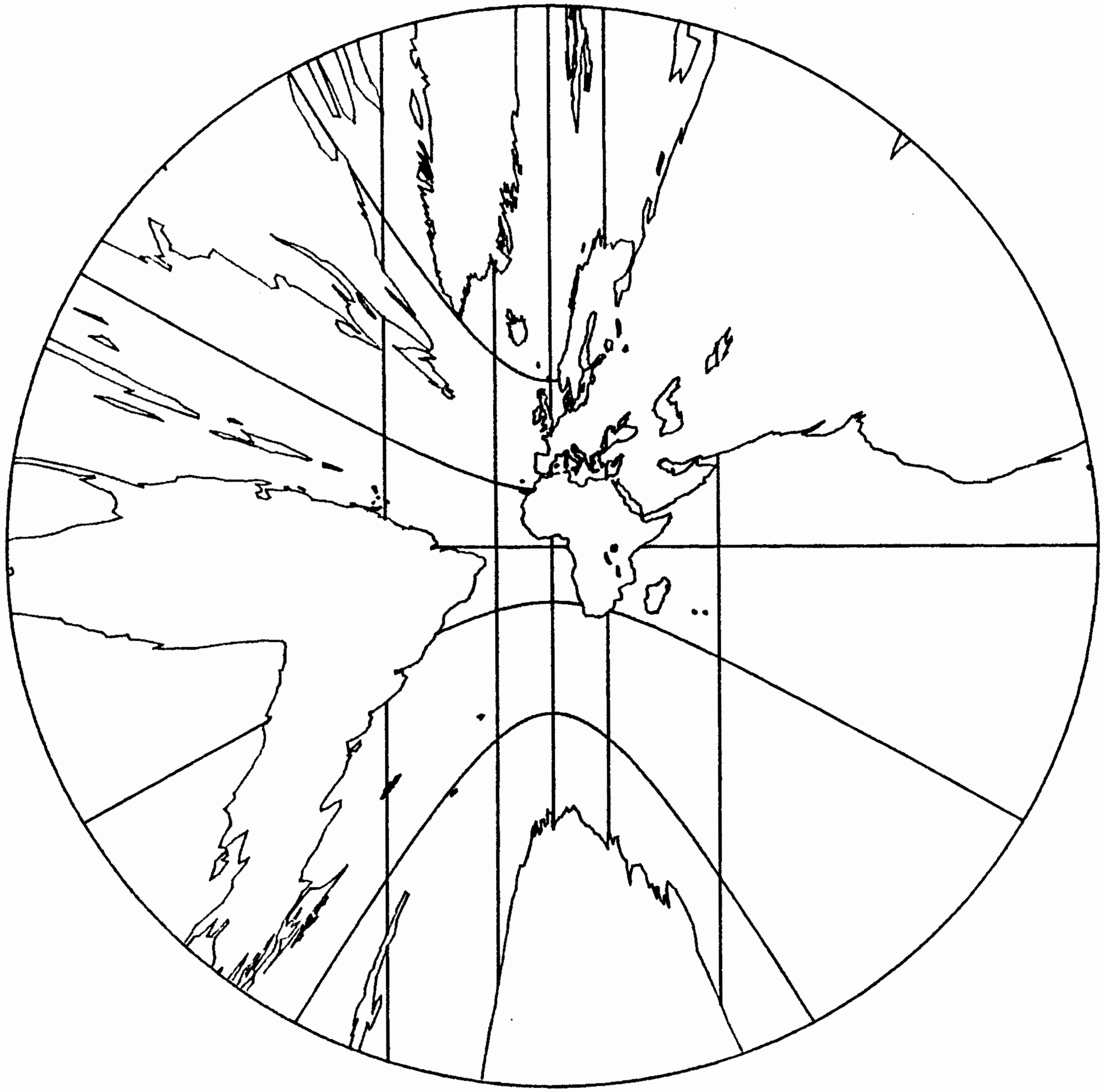
Normale Entwurfsachse (0, 90, 0)

Gnomonische Projektion



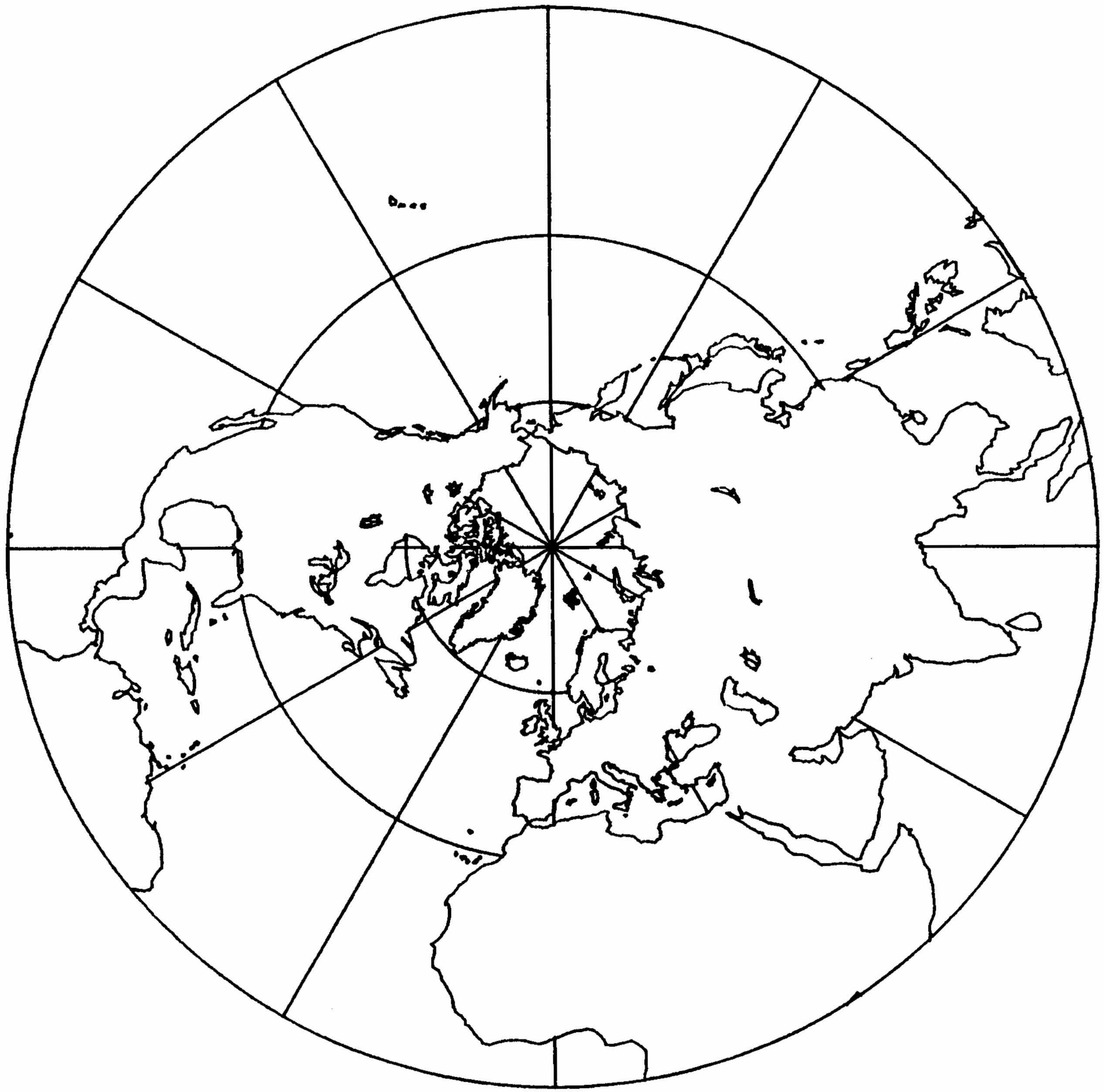
Schiefe Entwurfsachse (16, 48, 0)

Gnomonische Projektion



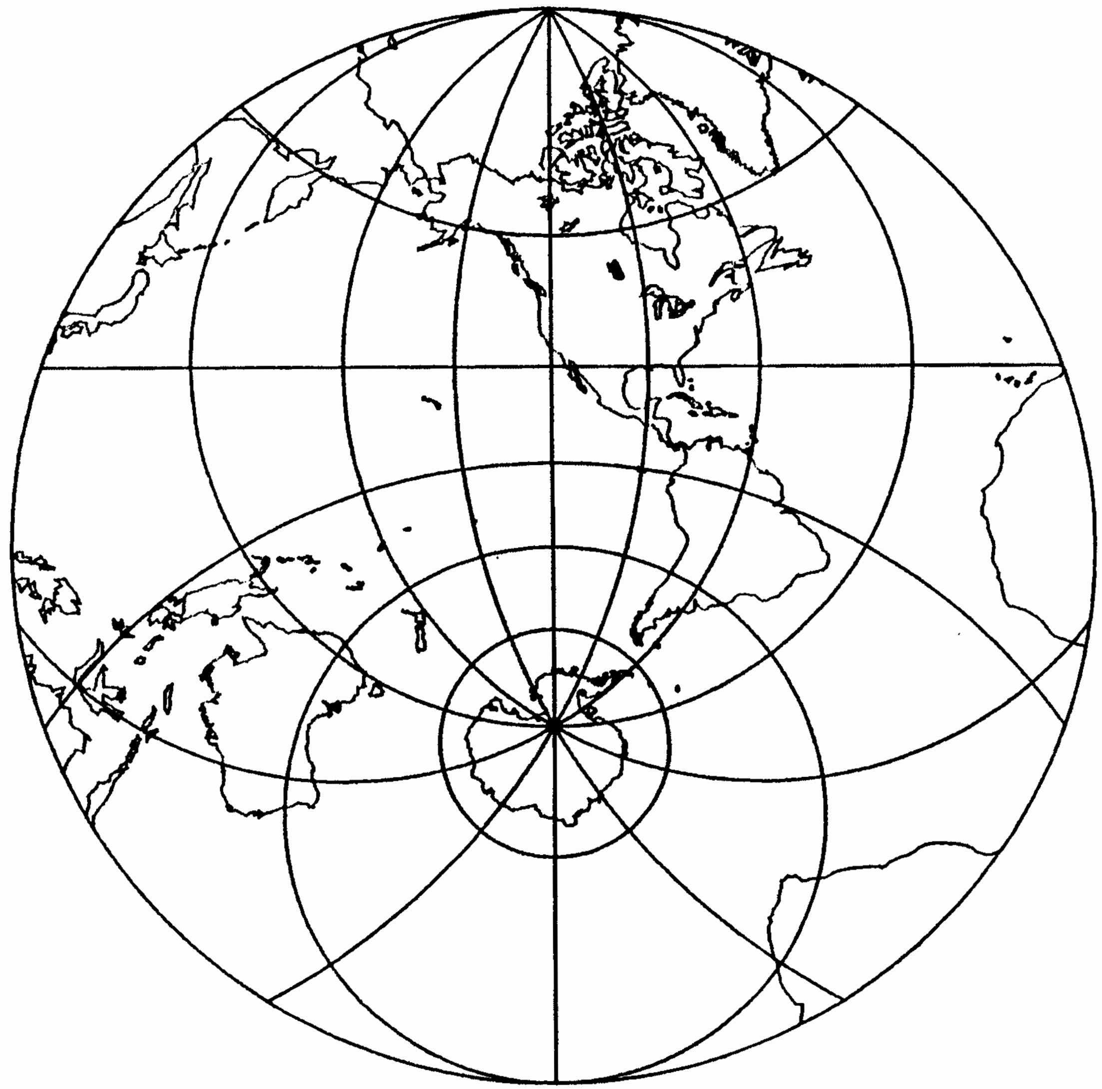
Transversale Entwurfsachse (0, 0, 0)

Stereographische Projektion



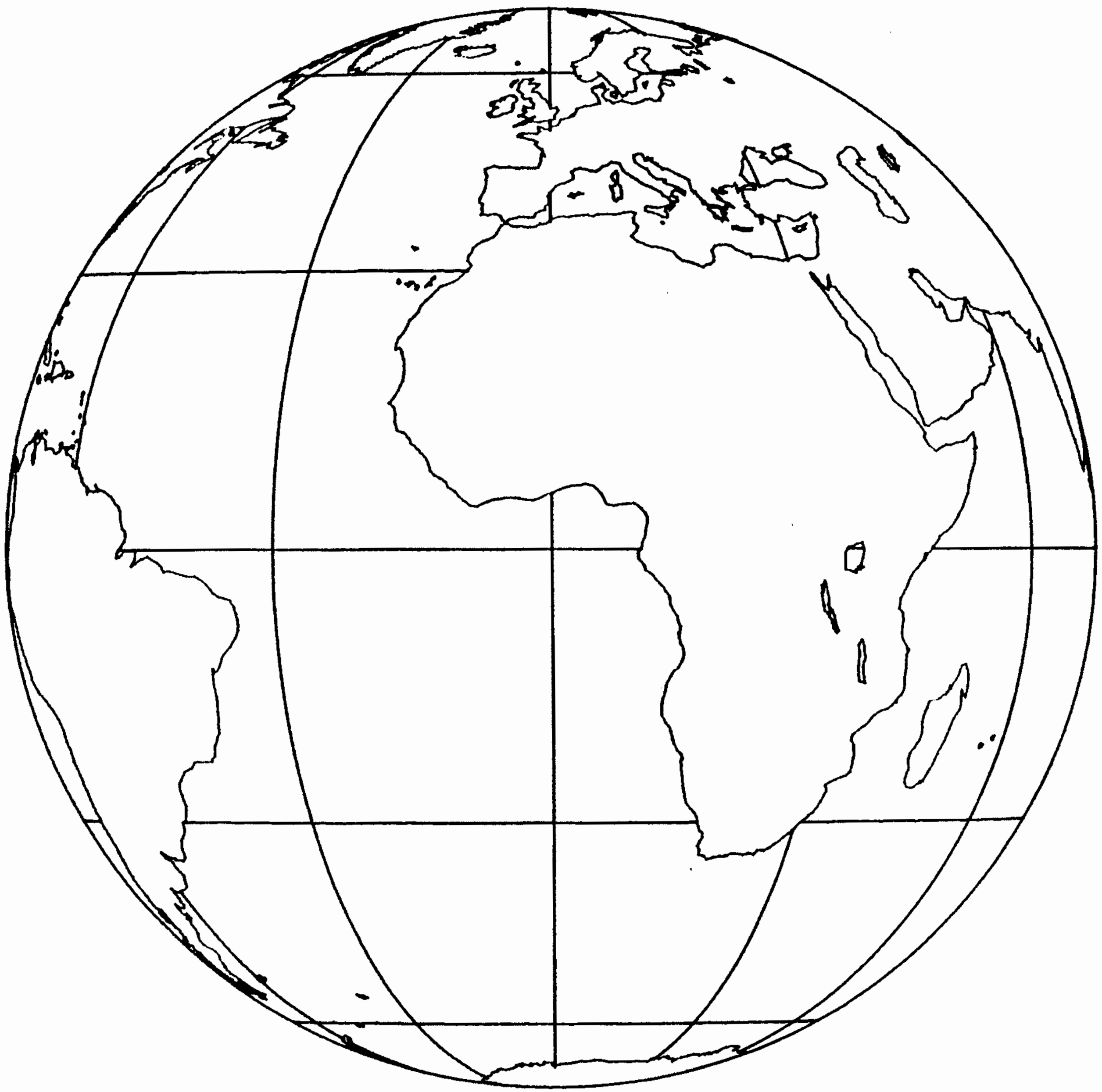
Normale Entwurfsachse (0, 90, 0)

Stereographische Projektion



Schiefe Entwurfsachse (-120, -30, 0)

Perspektiver Entwurf

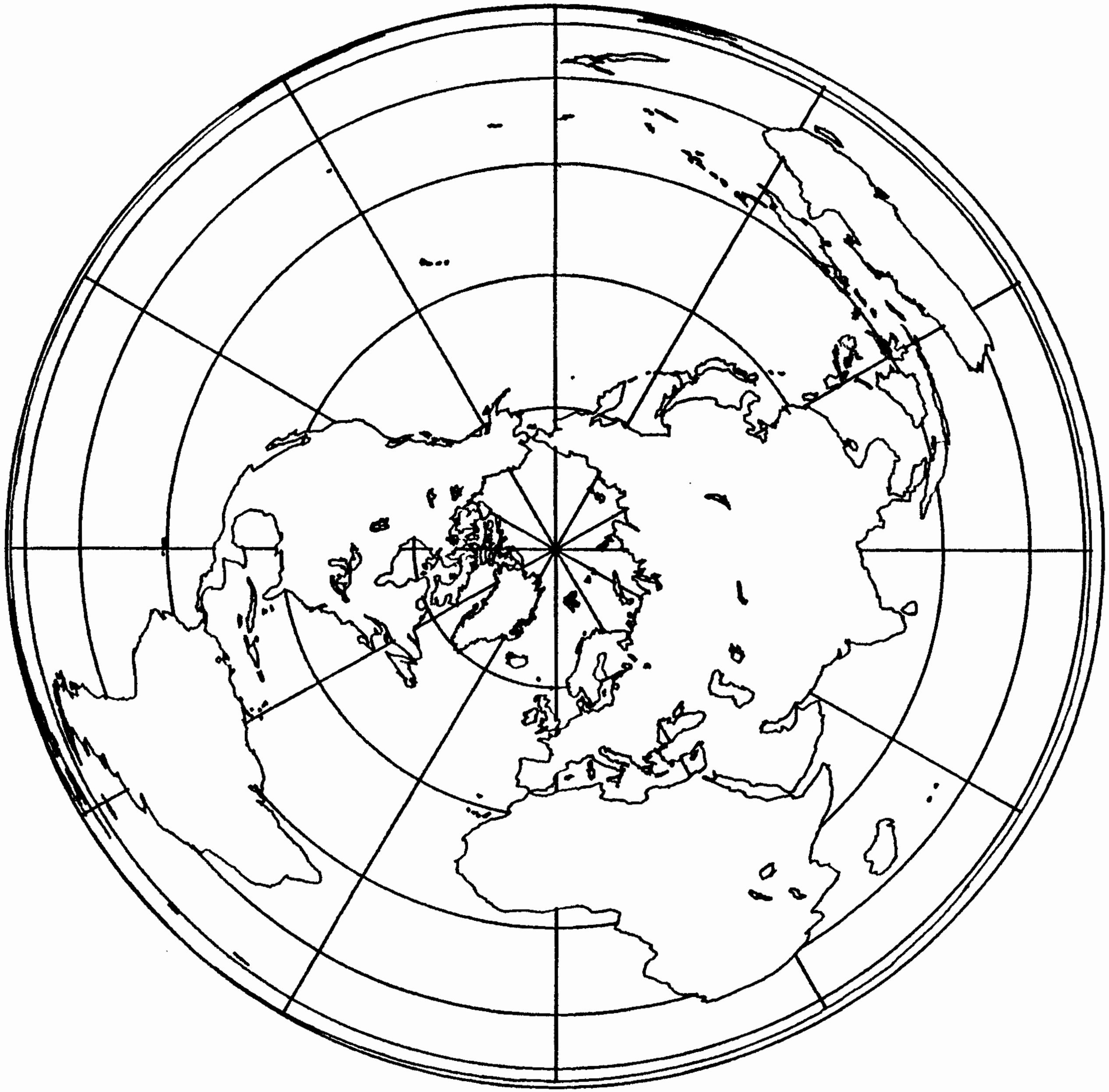


Transversale Entwurfsachse (0, 0, 0)

Abstandstreuer azimutaler Entwurf

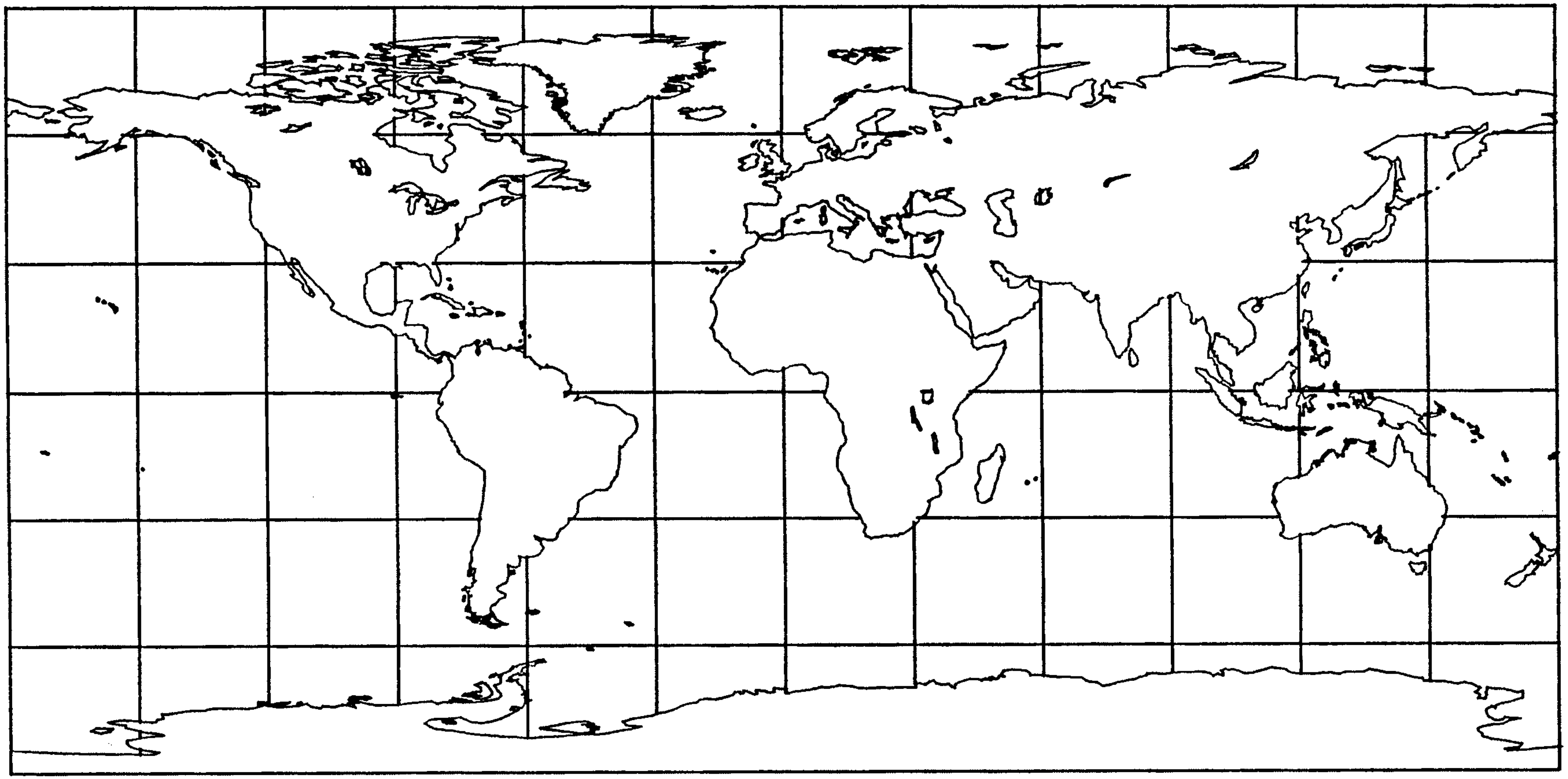
Normale Entwurfsachse (0, 90, 0)

Flächentreuer azimutaler Entwurf



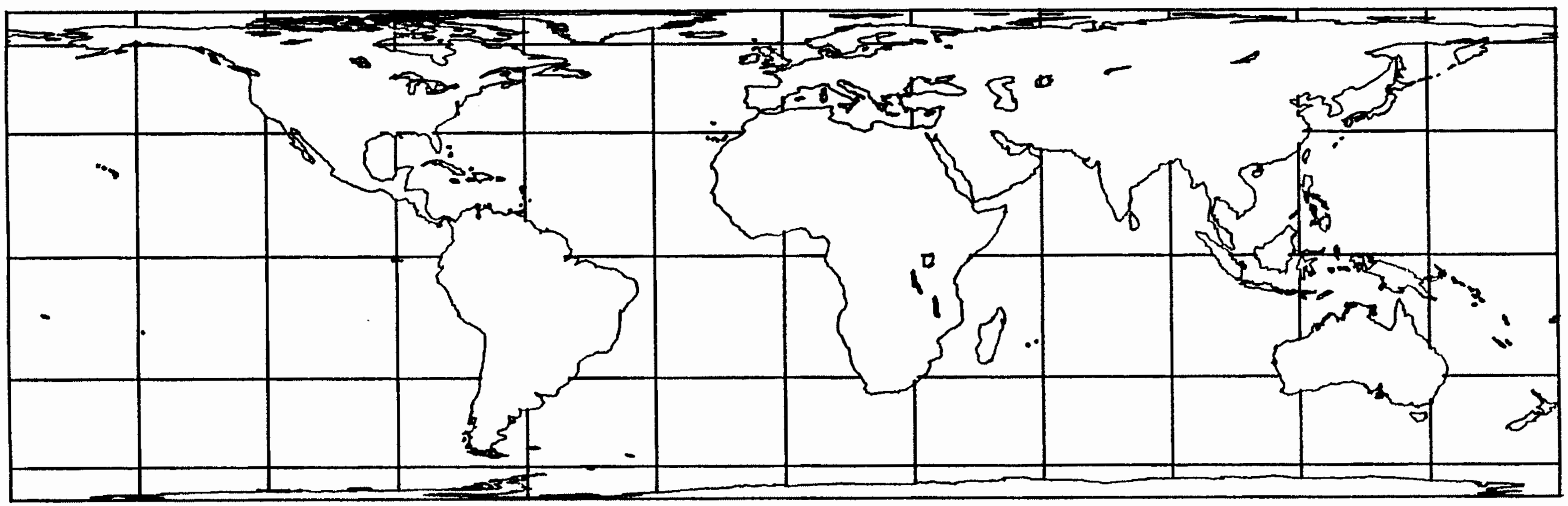
Normale Entwurfsachse (0, 90, 0)

Abstandstreuer Zylinderentwurf



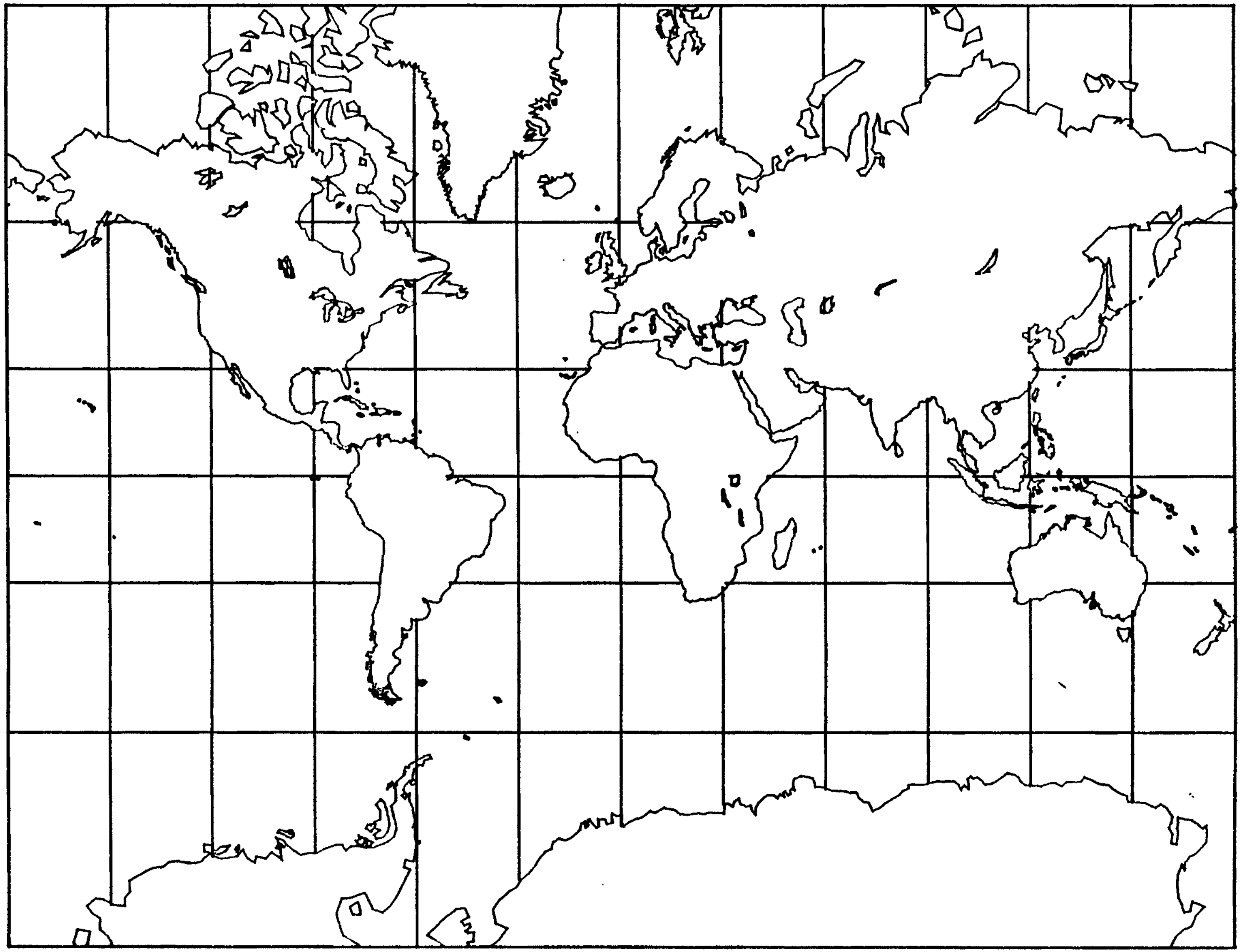
Normale Entwurfsachse (0, 90, 0)

Flächentreuer Zylinderentwurf



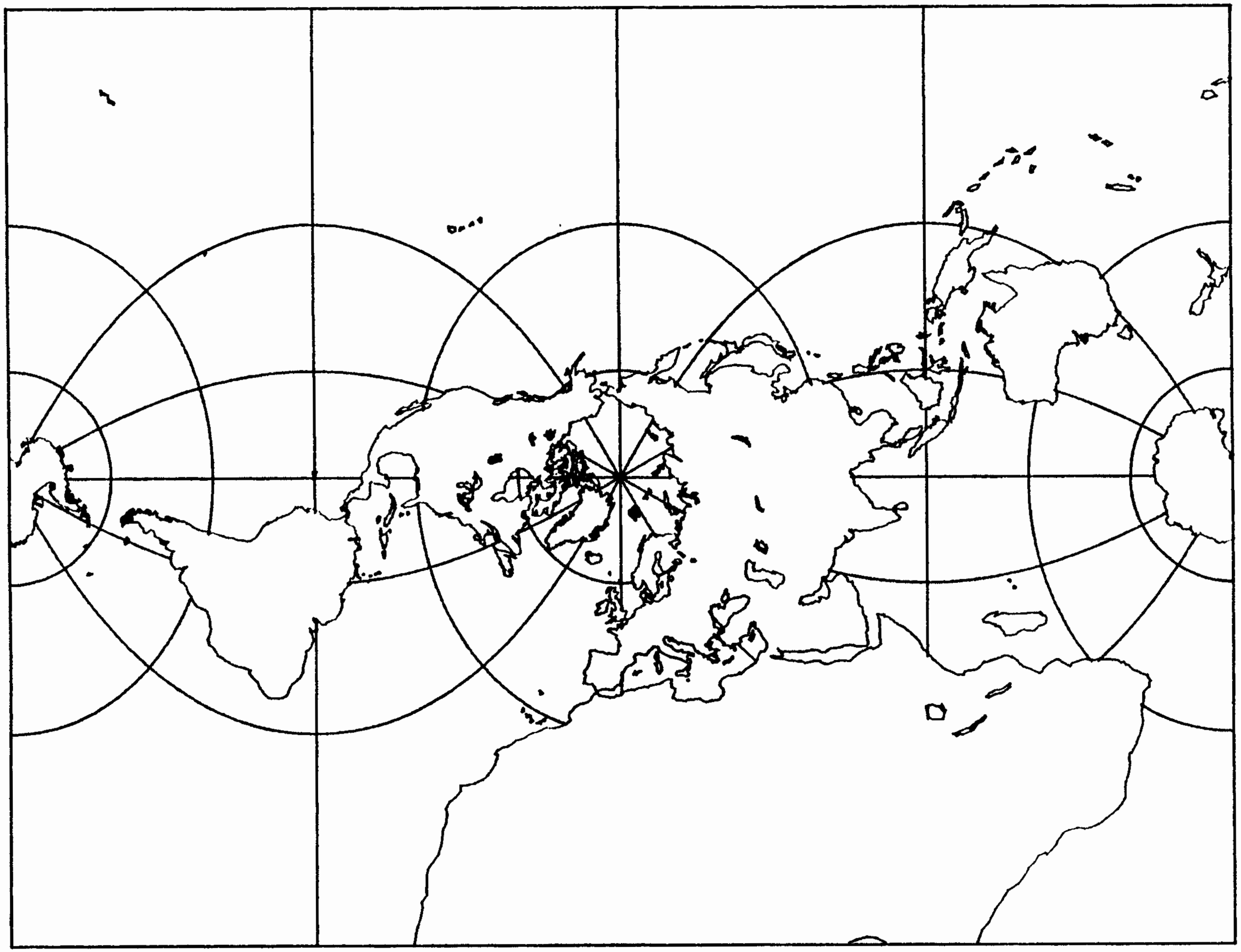
Normale Entwurfsachse (0, 90, 0)

Konformer Zylinderentwurf



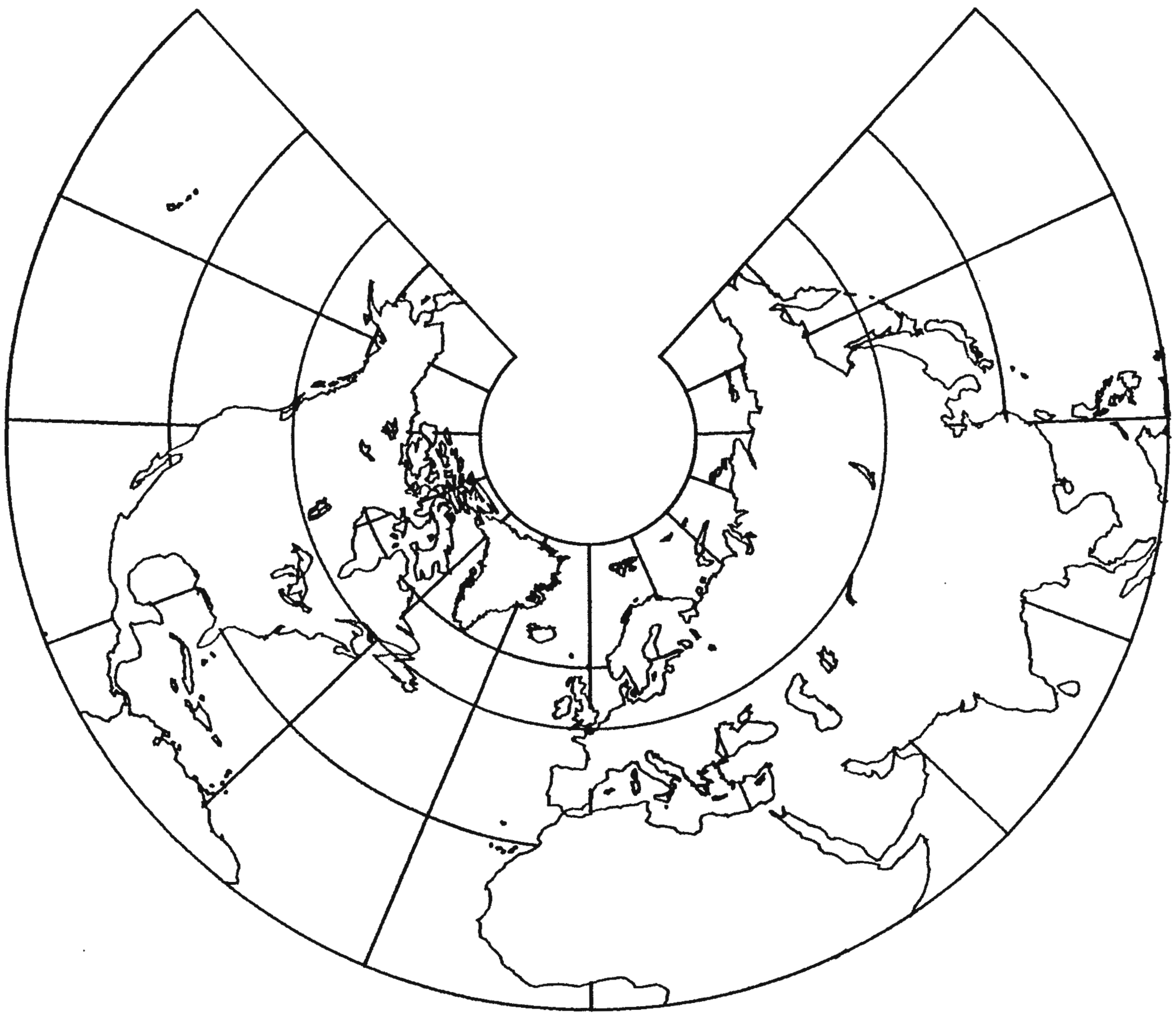
Normale Entwurfsachse (0, 90, 0)

Konformer Zylinderentwurf



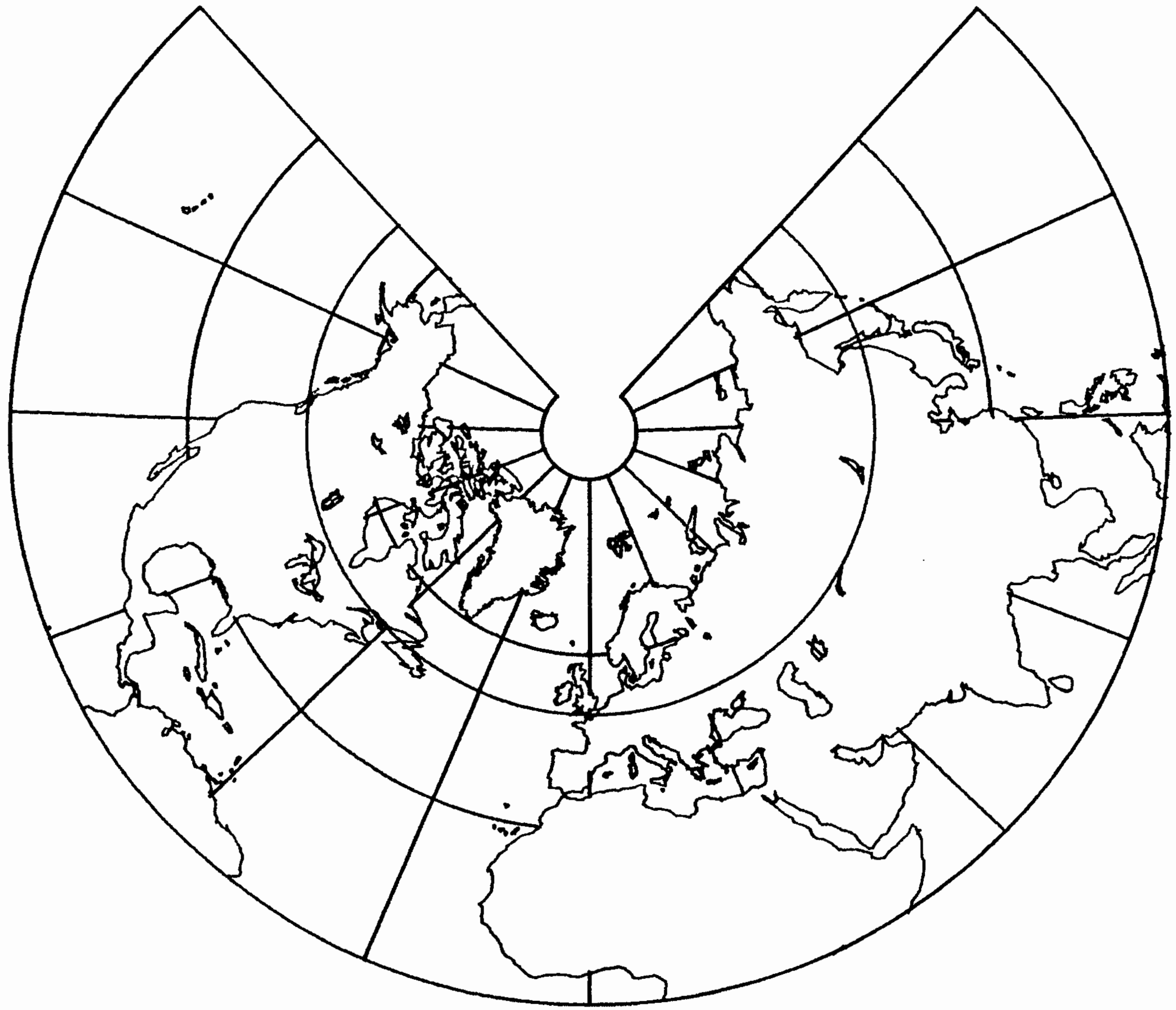
Transversale Entwurfsachse (180, 0, 180)

Flächentreuer Kegelentwurf



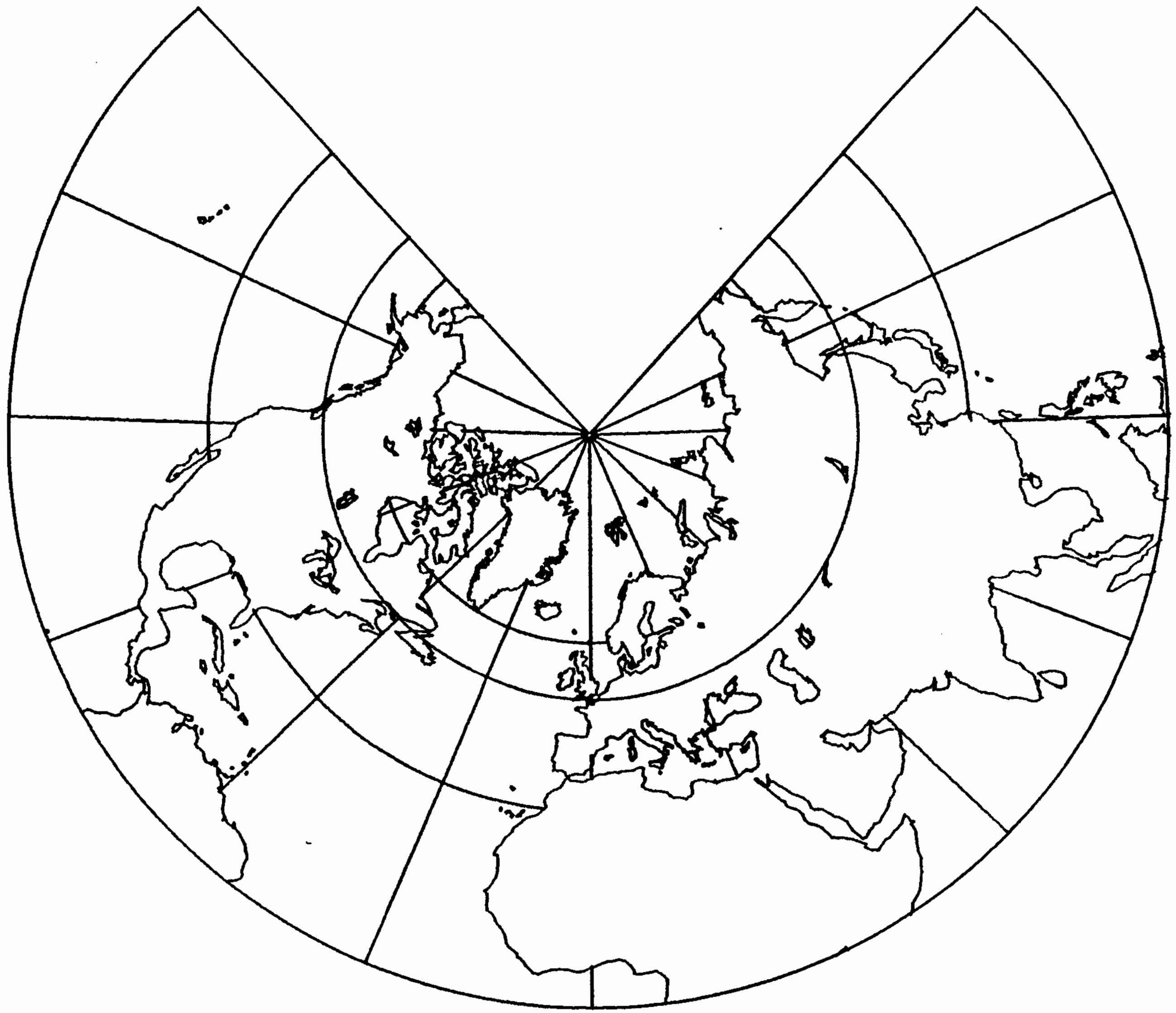
Normale Entwurfsachse (0, 90, 0)

Abstandstreuer Kegelentwurf



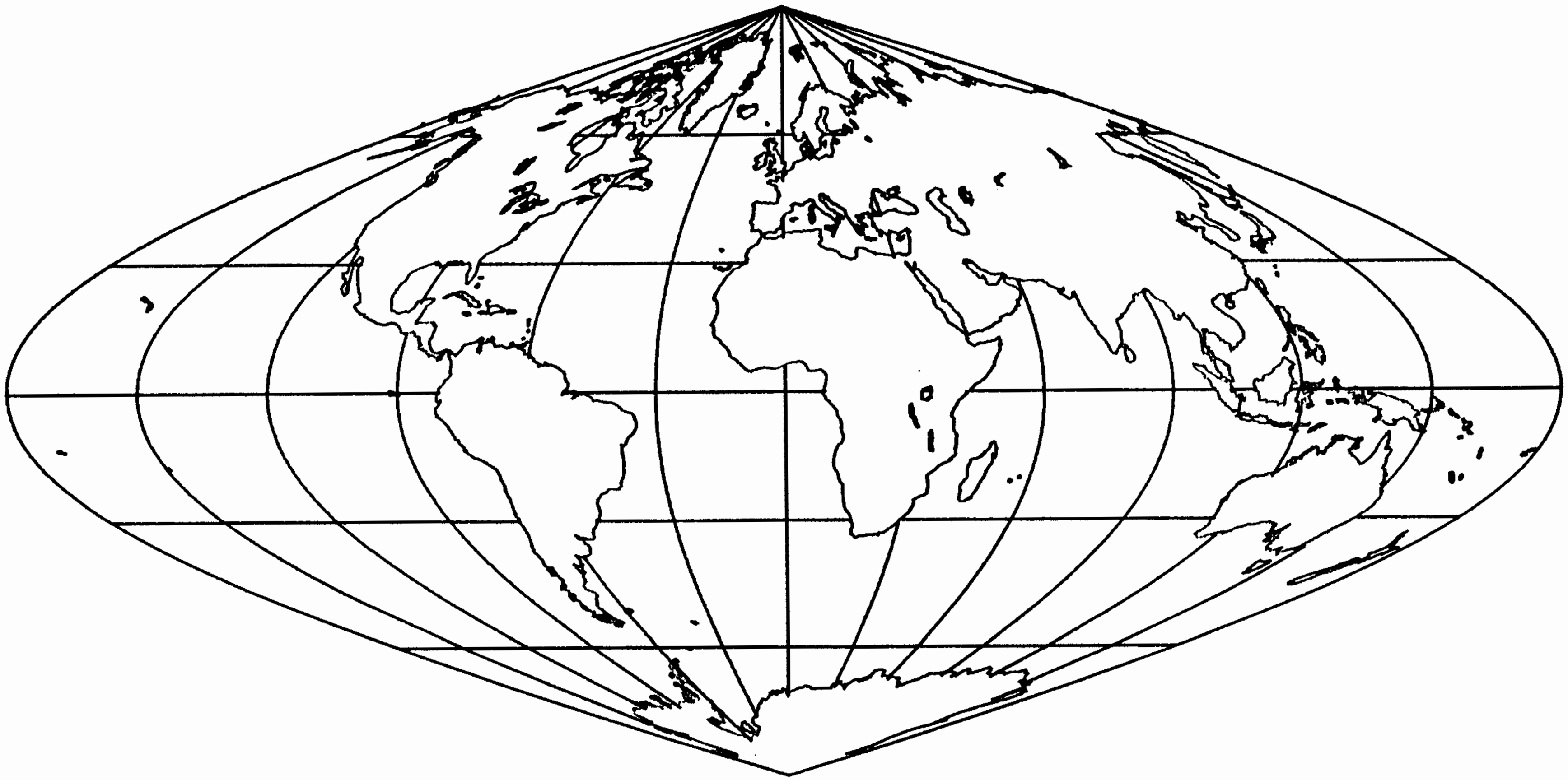
Normale Entwurfsachse (0, 90, 0)

Konformer Kegelentwurf



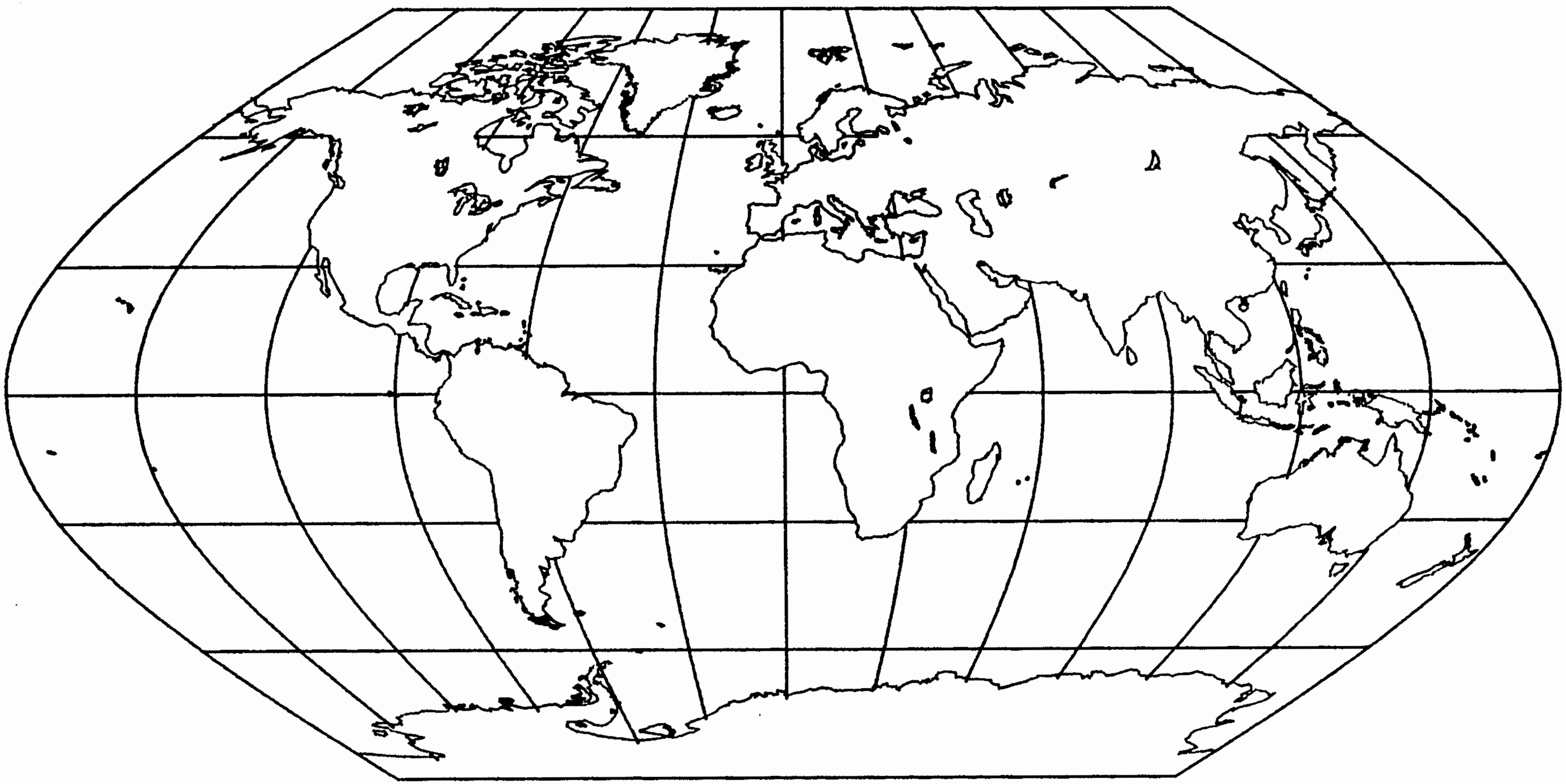
Normale Entwurfsachse (0, 90, 0)

Entwurf von SANSON



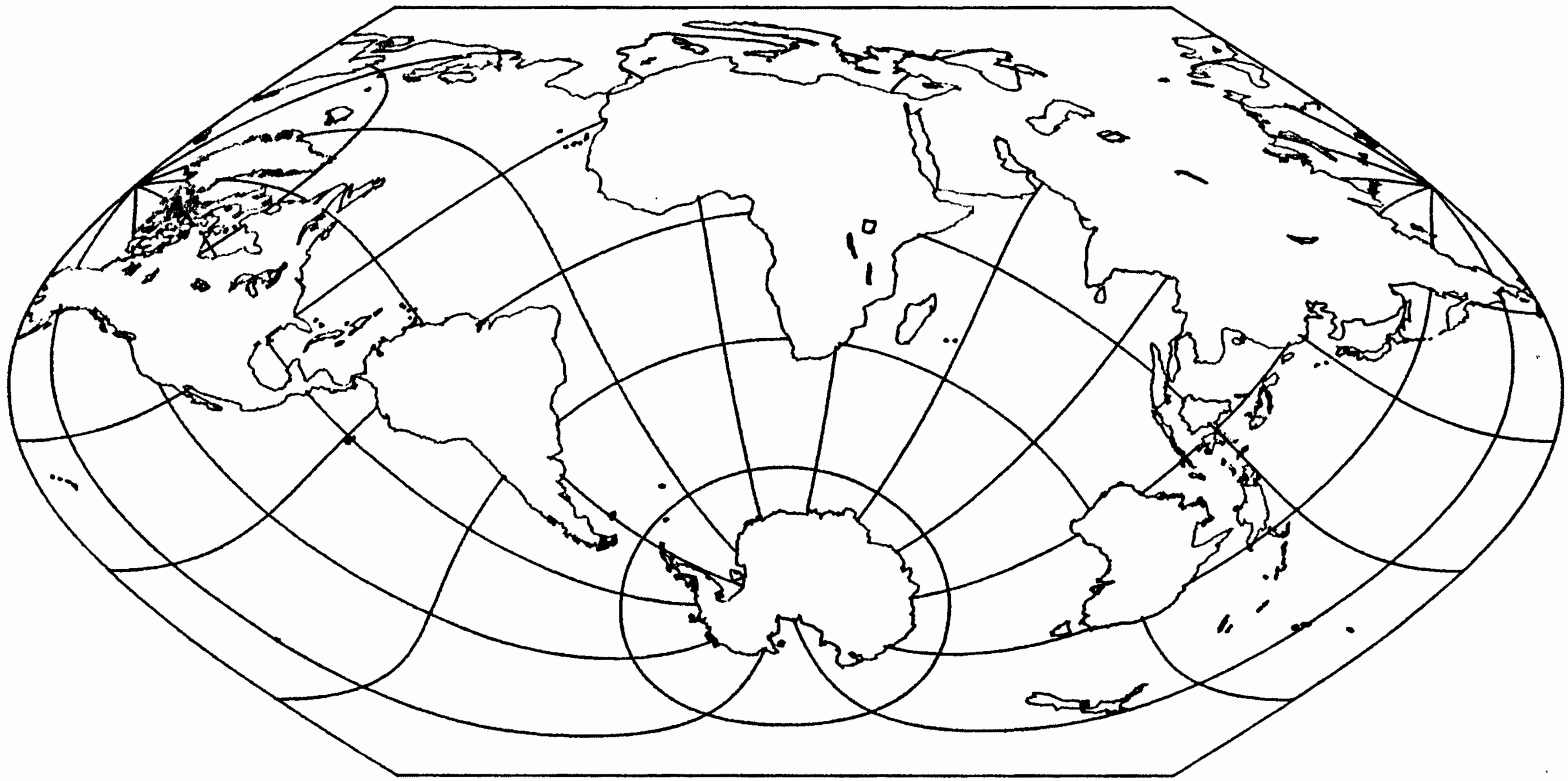
Normale Entwurfsachse (0, 90, 0)

Entwurf V von ECKERT



Normale Entwurfsachse (0, 90, 0)

Entwurf V von ECKERT



Schiefe Entwurfsachse (16, 48, 0)