

# Gekrümmte Erdkugel – Flache Landkarte Geometrie und Kartenentwürfe

29. Fortbildungstagung für Geometrie

Bundesinstitut für Erwachsenenbildung, St. Wolfgang, 6. November 2008



TECHNISCHE  
UNIVERSITÄT  
WIEN

VIENNA  
UNIVERSITY OF  
TECHNOLOGY

DIFFERENTIALGEOMETRIE UND  
GEOMETRISCHE STRUKTUREN

HANS HAVLICEK

FORSCHUNGSGRUPPE

DIFFERENTIALGEOMETRIE UND  
GEOMETRISCHE STRUKTUREN

INSTITUT FÜR DISKRETE MATHEMATIK UND GEOMETRIE

TECHNISCHE UNIVERSITÄT WIEN

[havlicek@geometrie.tuwien.ac.at](mailto:havlicek@geometrie.tuwien.ac.at)

# Die Erde als Kugel

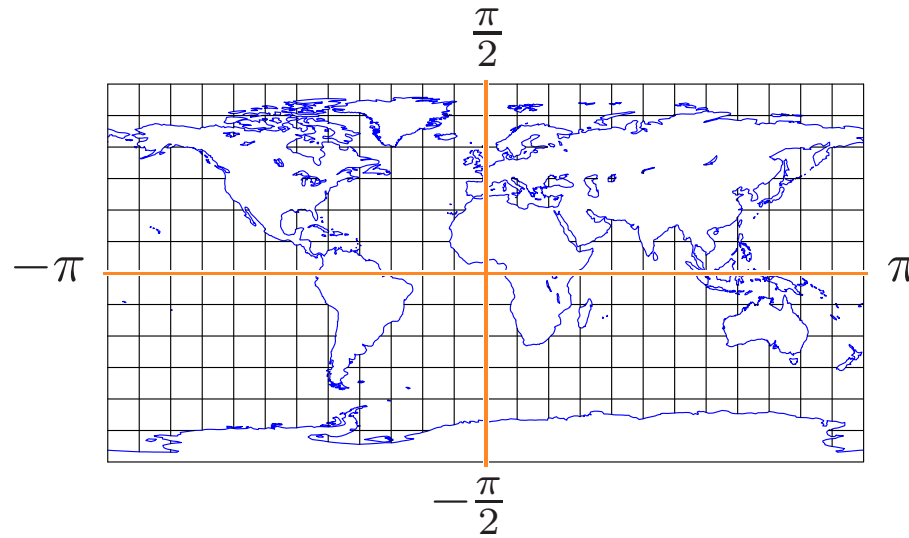
Eine gute Annäherung für die Gestalt der Erde ist ein **abgeplattetes Drehellipsoid**, etwa das nach Friedrich Wilhelm Bessel (1784–1846) benannte Ellipsoid mit den folgenden Abmessungen:

- Äquatorradius  $a = 6\,377\,397,15550$  m
- Abstand Erdmitte-Pol  $b = 6\,356\,078,96325$  m
- Abplattung  $(a - b) : a \approx 1 : 299,15 \approx 0,00334$

Es findet in der **Geodäsie** und **amtlichen Kartenwerken** Verwendung.

Für **geographische Karten** kann die Abplattung aber vernachlässigt werden. Wir gehen daher im Folgenden davon aus, dass die Erde **Kugelgestalt** besitzt.

# Das Gradnetz



**Geographische Länge:**  $-\pi \leq u \leq \pi$  bzw.  $180^\circ$  West bis  $180^\circ$  Ost.

**Geographische Breite:**  $-\frac{\pi}{2} \leq v \leq \frac{\pi}{2}$  bzw.  $90^\circ$  Süd bis  $90^\circ$  Nord.

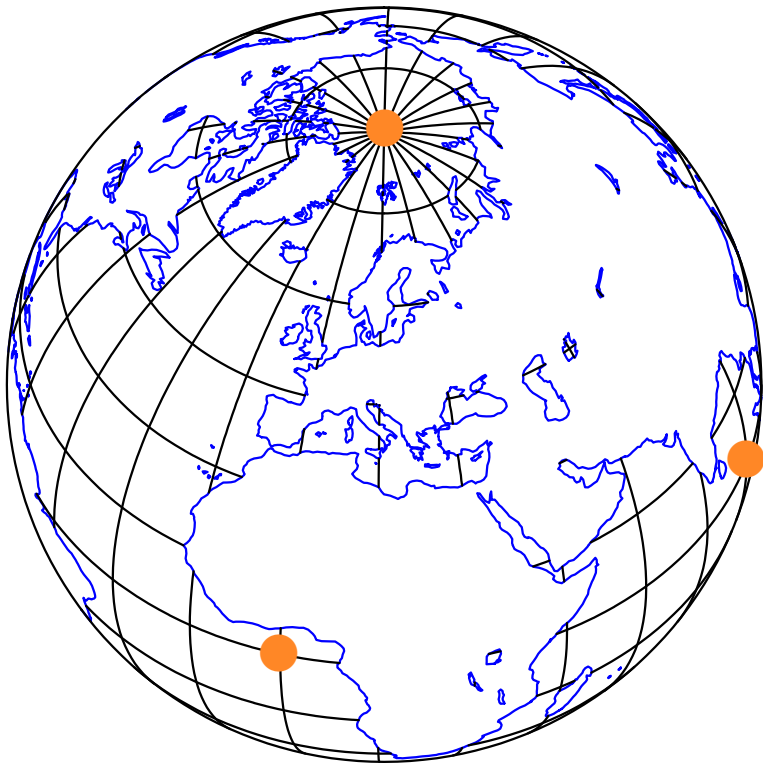
Zu jedem Paar  $(u, v)$  gehört genau ein Punkt der Erdkugel.

Nord- und Südpol haben keine eindeutige geographische Breite!

Die geographische Länge springt (in der Nähe der Datumsgrenze) von  $\pi$  auf  $-\pi$ .

# Die Erde im Raum

Wir wählen den Radius der Erde als Längeneinheit und legen ein kartesisches Koordinatensystem wie folgt fest:



- Ursprung in der Kugelmitte
- Einheitspunkt der  $x$ -Achse im Punkt mit den geographischen Koordinaten  $(0, 0)$
- Einheitspunkt der  $y$ -Achse im Punkt mit den geographischen Koordinaten  $(\frac{\pi}{2}, 0)$
- Einheitspunkt der  $z$ -Achse im Nordpol  $(0, \frac{\pi}{2})$

Umrechnen von geographischen Koordinaten  $(u, v)$  in Raumkoordinaten  $(x, y, z)$ :

$$x = \cos u \cos v$$

$$y = \sin u \cos v$$

$$z = \sin v$$

# Verzerrung

Den Abstand von zwei Punkten  $P$  und  $Q$  der Erdoberfläche können wir auf zwei Arten messen:

- Der **sphärische Abstand** wird auf der Kugeloberfläche entlang eines Großkreises gemessen. Bezeichnen wir die Mitte der Erde mit  $M$ , so stimmt dieser Abstand mit dem Winkel der beiden Vektoren  $\overrightarrow{MP}$ ,  $\overrightarrow{MQ}$  überein. Der maximale Abstand beträgt  $\pi =$  halber Umfang eines Großkreises.
- Der **räumliche Abstand** ist die Länge der Strecke von  $P$  nach  $Q$ . Der maximale Abstand beträgt  $2 =$  Durchmesser der Kugel.

# Problemstellung

---

Ein **Kartenentwurf** bildet die gesamte Erdoberfläche oder zumindest einen Teil davon „in vernünftiger Art und Weise“ in die Ebene ab.

---

Optimal wäre ein **unverzerrter** Kartenentwurf. Dieser müsste **isometrisch** sein, also alle sphärischen Abstände (abgesehen von einem Maßstabsfaktor) in richtiger Länge in der Ebene wiedergeben.

# Nichtexistenz

**Satz.** *Es gibt keinen Kartenentwurf, der eine (noch so kleine) Kugelkalotte unverzerrt darstellt.*

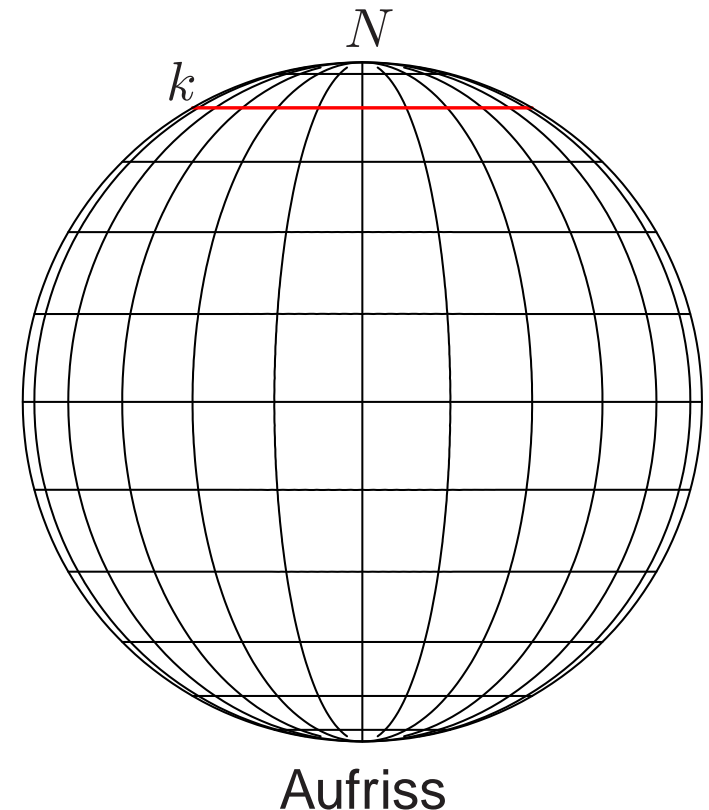
*Beweisskizze.* Wir betrachten in einer kleinen Kalotte um den Nordpol  $N$  den Kreis um  $N$  mit dem **sphärischen Radius**  $r > 0$ . Das ist der Kreis  $k$  zur geographischen Breite  $v = \frac{\pi}{2} - r$ .

Der **räumliche Radius** von  $k$  ist  $\cos v = \sin r$ .

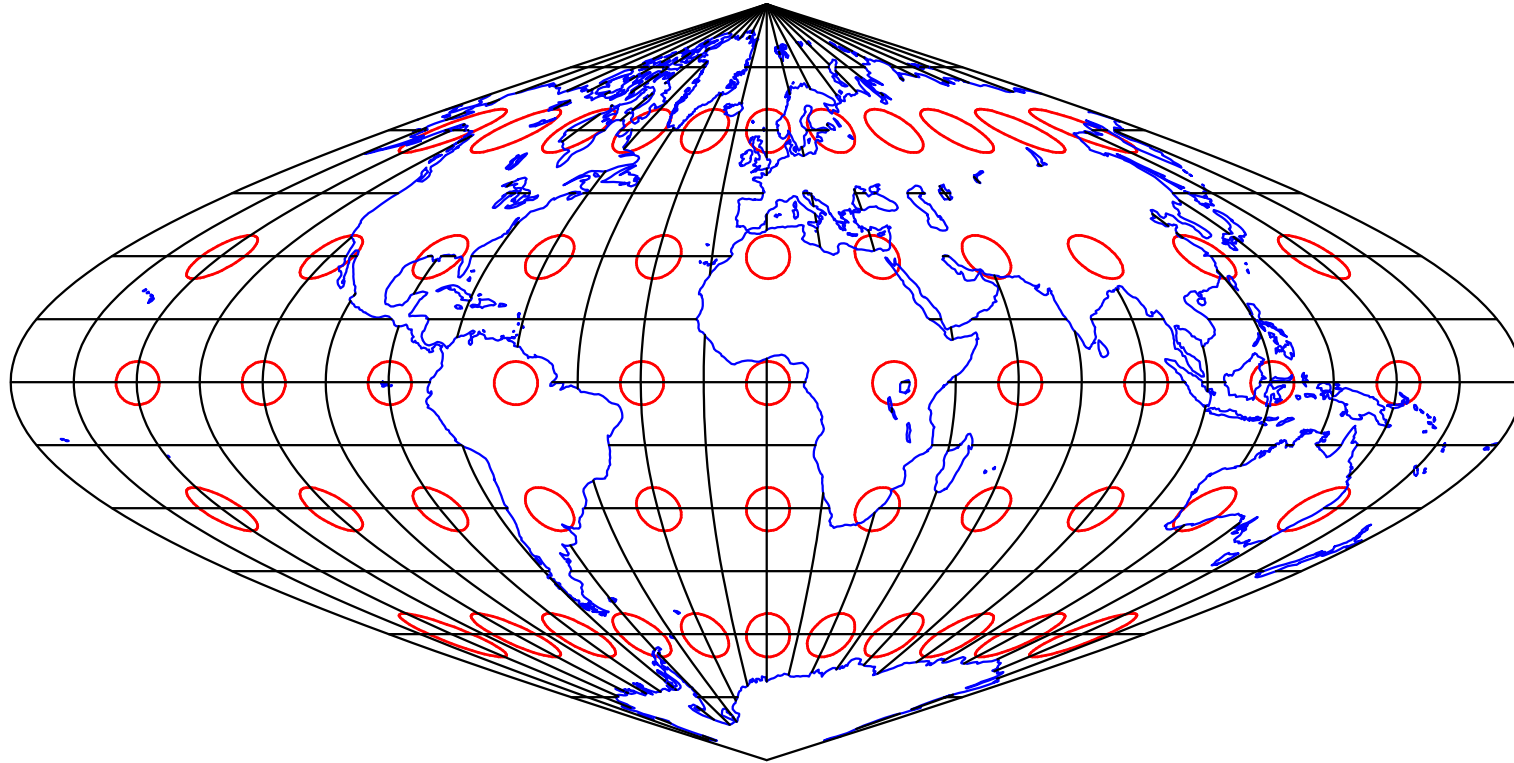
In einer unverzerrten Karte müsste  $k$  als daher einerseits als Kreis mit dem Radius  $r$  erscheinen, und dieser Kreis müsste andererseits den Umfang  $2\pi \sin r$  besitzen. Das ist wegen

$$\sin r \neq r$$

nicht möglich.



# Verzerrungsellipsen



Die Verzerrung einer Kurve in einer Landkarte hängt in jedem Punkt nur von der Richtung der Kurventangente ab.

Zur Illustration der Verzerrungen in einem Punkt dient die **Verzerrungsellipse** (oder: **Tissot-Indikatrix**).

Maßstabsangaben in Landkarten gelten immer nur in gewissen Punkten mit kreisförmiger Indikatrix. In guten Atlanten wird darauf hingewiesen.



# Forderungen

Typische Forderungen an einen Kartenentwurf:

- Längen- und Breitenkreise sollen als ... erscheinen.
- Gewisse Kurven sollen längentreu abgebildet werden.
- Differentialgeometrische Eigenschaften:

	Indikatrix	punktal	längs Kurven	in einem Gebiet
winkeltreu	Kreis	ja	ja	ja
flächentreu	Fläche 1	ja	ja	ja
isometrisch	Einheitskreis	ja	ja	nein

- Ein gewisser Teil der Kugel soll nahezu isometrisch, etwa mit maximal 5% Fehler, abgebildet werden.

Diese Forderungen lassen sich selbstverständlich kombinieren.  
(winkeltreu + flächentreu = isometrisch!)

## Zylinder-, Kegel- und Azimutalentwürfe

Wir umschreiben der Erdkugel entlang des Äquators einen Drehzylinder und bilden die Kugel so auf diesen Zylinder ab, dass gilt:

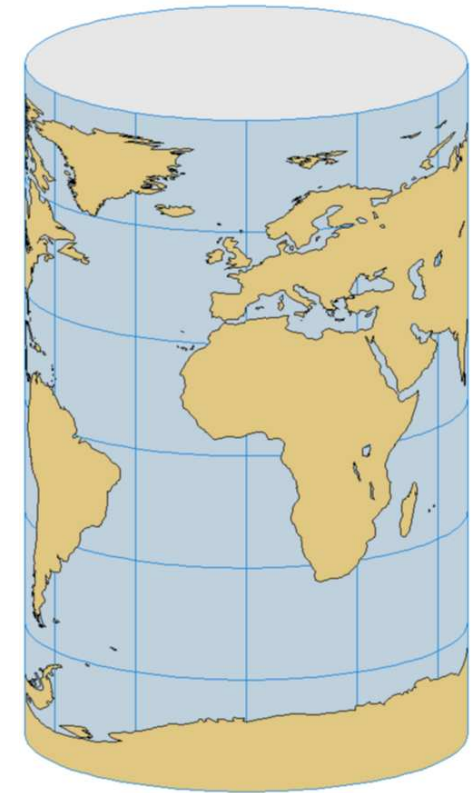
- Der Äquator ist sein eigenes Bild.
- Die Bilder der Meridianhalbkreise sind geradlinig.
- Die Bilder der Breitenkreise sind Kreise.

Wir können dabei die Abbildung

Meridianhalbkreis  $\rightarrow$  Erzeugende

(einmal) beliebig wählen.

Dann schneiden wir den Zylinder längs einer Erzeugenden auf und wickeln ihn in die Ebene ab.



Berührzylinder

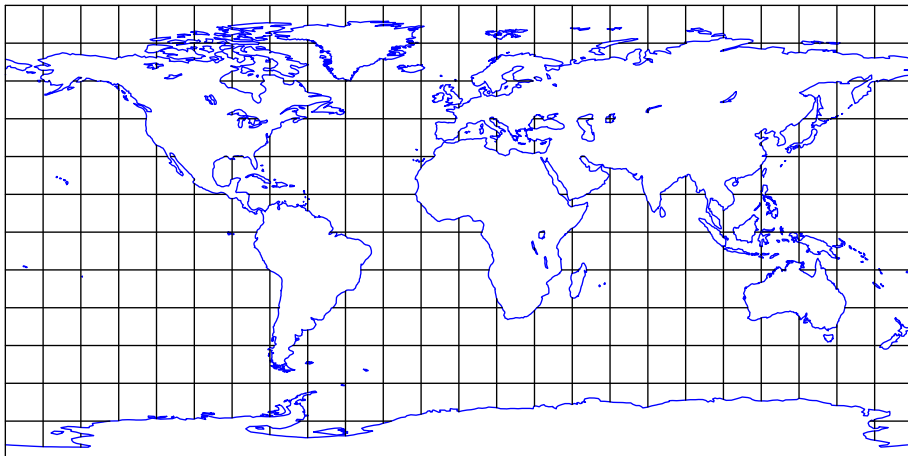
# Eigenschaften

Jeder Zylinderentwurf besitzt die folgenden Eigenschaften:

- Abbildungsgleichungen in kartesischen  $(\bar{x}, \bar{y})$ -Koordinaten:

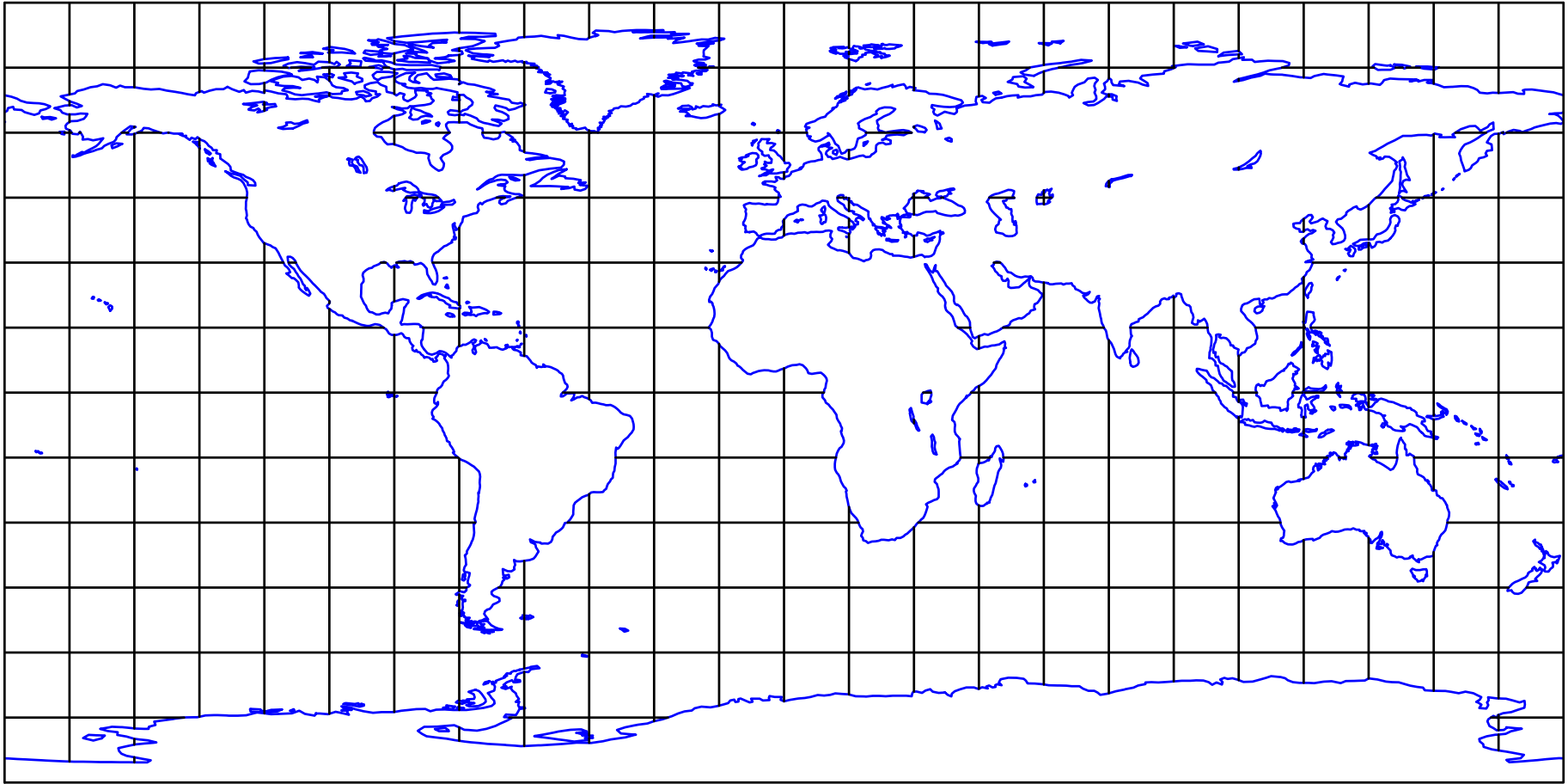
$$\bar{x} = u, \quad \bar{y} = \rho(v)$$

mit einer passenden Funktion  $\rho$ .



- Orthogonales geradliniges Gradnetz
- Der Äquator erscheint in wahrer Länge.
- Alle anderen Breitenkreise erscheinen zu lange.
- Zu den Polen hin wächst die Längenverzerrung der Breitenkreise über alle Grenzen.
- Nord- und Südpol haben keinen Bildpunkt.
- Unstetigkeit am „Nahtmeridian“

# Abstandstreuer Zylinderentwurf



- Alle Meridianhalbkreise erscheinen in wahrer Länge:  $\rho(v) = v$ .
- Der Entwurf ist entlang des Äquators isometrisch.
- Geographische Koordinaten können sofort abgelesen werden.

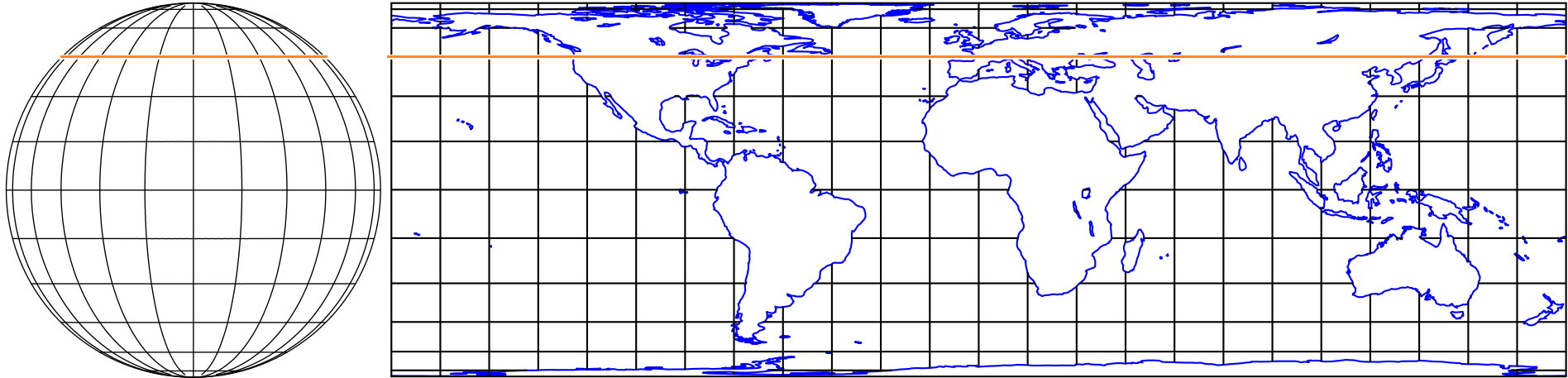
# Abstandstreuer Zylinderentwurf

---

Bemerkungen:

- Wird auch als **quadratische Platkarte** bezeichnet.
- Stimmt mit dem Parameterrechteck der geographischen Koordinaten überein.
- Passable Weltkarte, etwa zur Illustration der Zeitzonen.
- Hintergrundbild in Nachrichtensendungen

# Flächentreuer Zylinderentwurf



- Sehr einfache Abbildungsgleichung:  $\rho(v) = \sin v$ .
- Der Entwurf ist entlang des Äquators isometrisch.
- Zu den Polen hin geht die Längenverzerrung auf den Meridianen gegen 0, jene auf den Breitenkreisen aber gegen  $\infty$ . (Das Produkt der beiden Verzerrungen ist in jedem Punkt gleich 1.)

Flächentreue alleine ist kein Qualitätsmerkmal einer Landkarte.

# Flächentreuer Zylinderentwurf

---

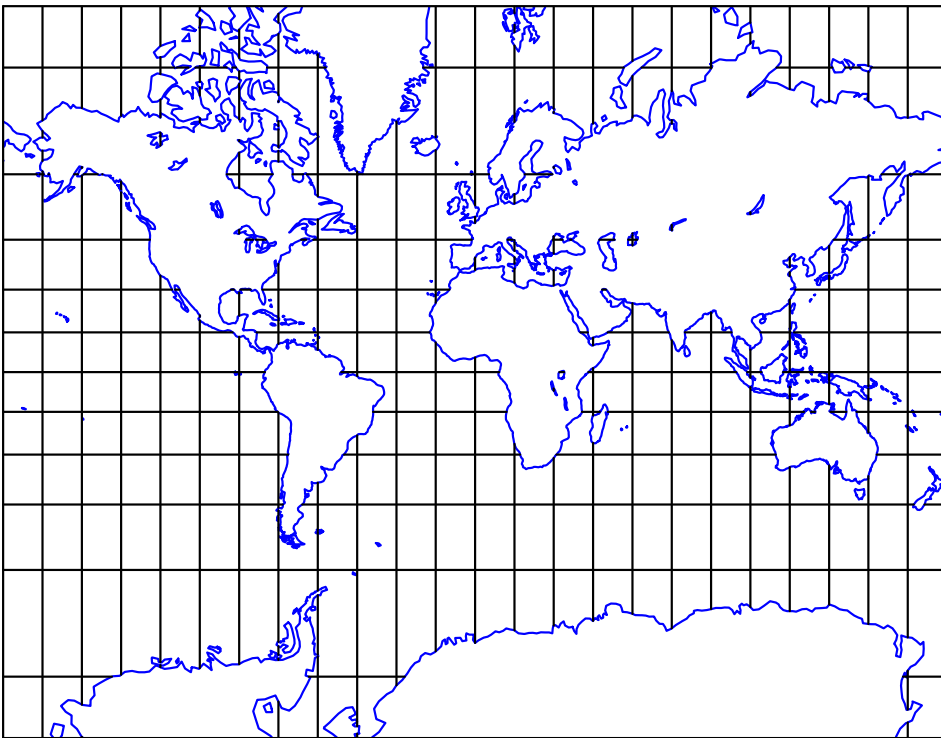
Bemerkungen:

- Als Weltkarte kaum geeignet.
- Liefert sofort die Formeln für den Flächeninhalt von Kugelzone, Kugelkalotte und der gesamten Kugel, da diese in der Karte als Rechtecke erscheinen.
- Archimedes (285–212 v. Chr.), Johann Heinrich Lambert (1728–1777)

# Winkeltreuer Zylinderentwurf

- Abbildungsgleichung:

$$\rho(v) = \log \tan \left( \frac{\pi}{4} + \frac{v}{2} \right)$$



- Der Entwurf ist entlang des Äquators isometrisch.
- Zu den Polen hin geht die Längenverzerrung auf den Meridianen und auf den Breitenkreisen aber gegen  $\infty$ . (Die beiden Werte sind in jedem Punkt gleich.)
- Das volle Kartenbild ist ein unbeschränkter Parallelstreifen.
- Loxodromen erscheinen geradlinig.



# Winkeltreuer Zylinderentwurf

---

Bemerkungen:

- Anderer Name: [Entwurf von Mercator](#), nach Gerard De Kremer (1512–1594)
- Wird auch als [Seekarte](#) bezeichnet.
- Gestattet wegen der geradlinigen Darstellung der Loxodromen eine sehr einfache Navigation auf hoher See (konstanter Kurswinkel gegen Norden).

# Funkmesskarte

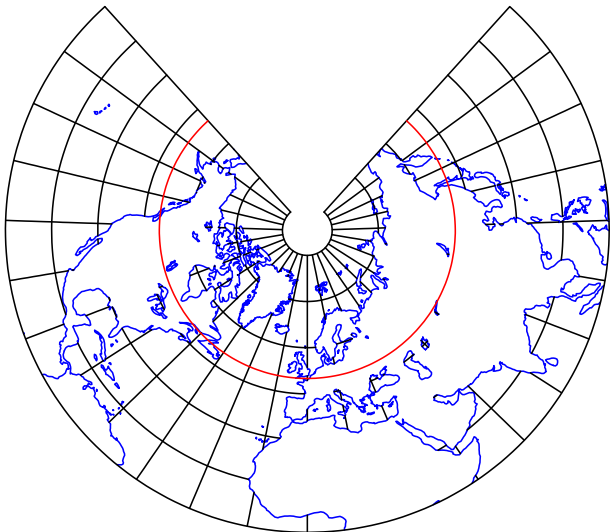


Winkeltreuer (oder: **konformer**) Zylinderentwurf (ORF Kurzwellendienst, um 1971)

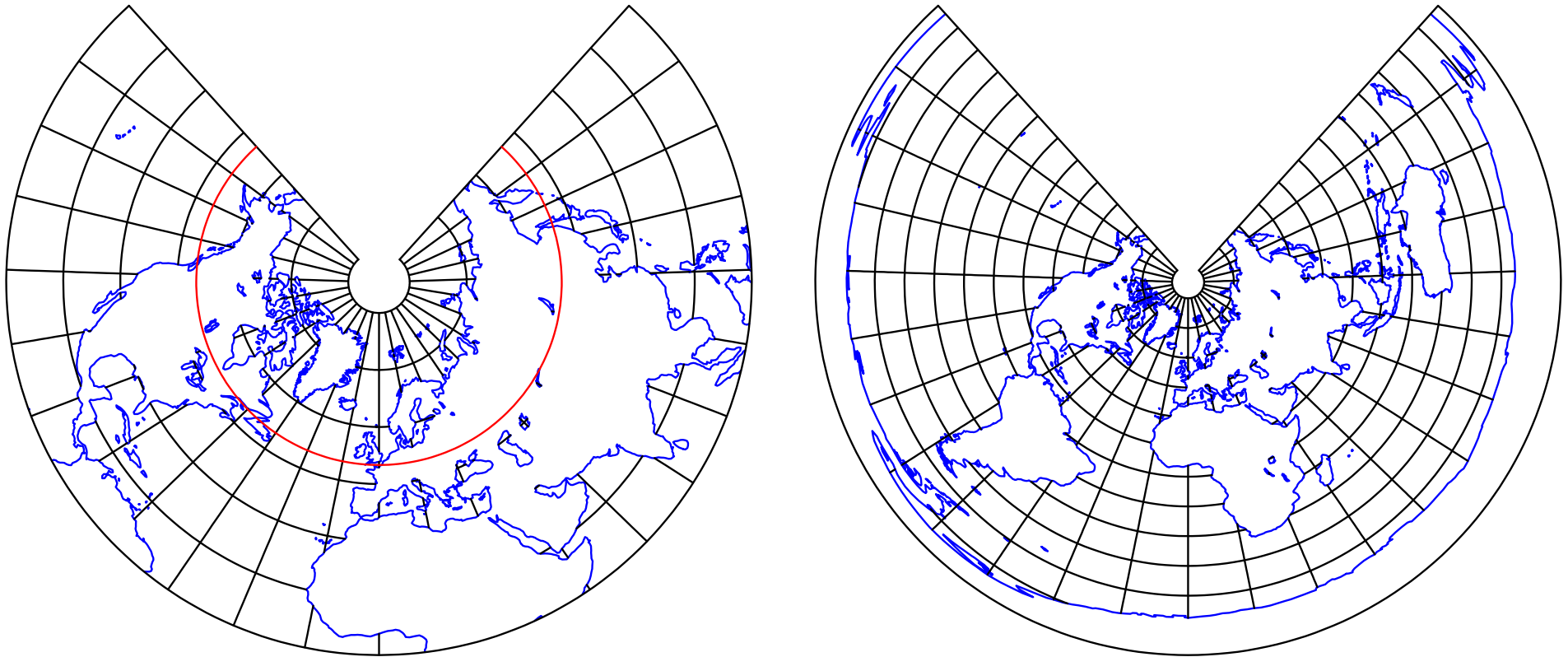
# Kegeleentwürfe

Ersetzen wir den Berührzylinder durch einen Drehkegel, der entlang eines Breitenkreises  $v = v_0 > 0$  berührt, so entsteht (in Analogie zu einem Zylinderentwurf) ein **Kegelentwurf**. Er besitzt die folgenden Eigenschaften:

- Abbildungsgleichungen in Polarkoordinaten  $(r, \varphi)$ :  $r = \rho(v)$ ,  $\varphi = u \sin v_0$  mit einer passenden Funktion  $\rho$ .
- Orthogonales Gradnetz
- Der **Berührparallelkreis** erscheint in wahrer Länge.
- Zum Südpol hin wächst die Längenverzerrung der Breitenkreise über alle Grenzen.
- Der Südpol hat keinen Bildpunkt.
- Unstetigkeit am „Nahtmeridian“
- Situation im Nordpol hängt von  $\rho$  ab.



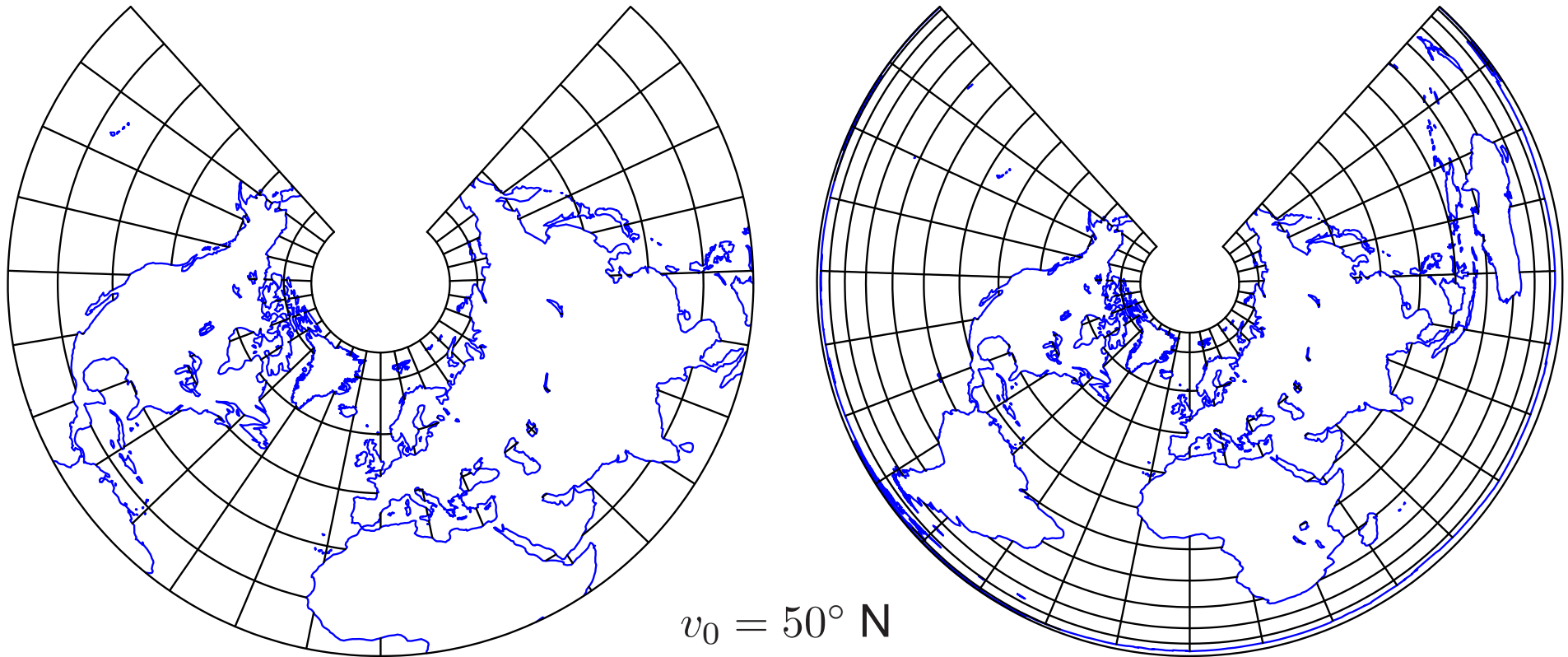
# Abstandstreuer Kegellentwurf



$$v_0 = 50^\circ \text{ N}$$

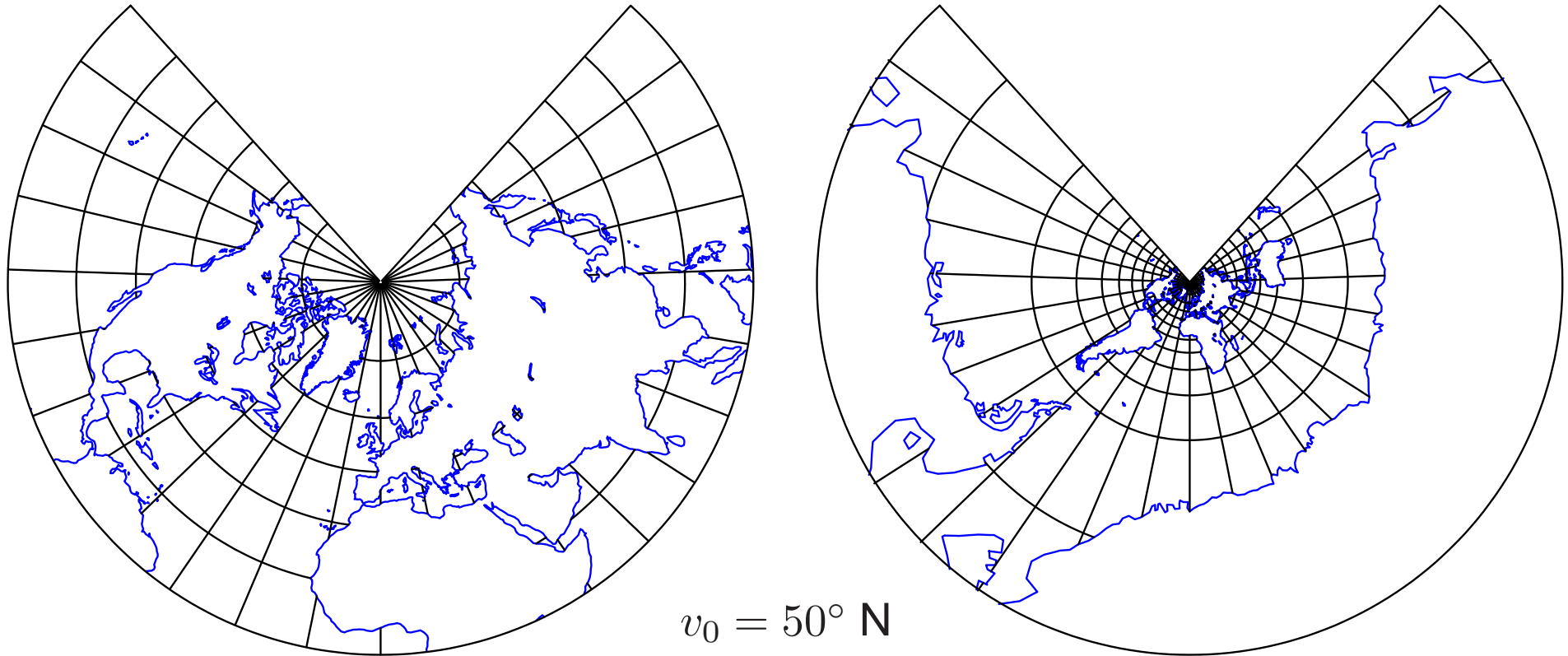
- Alle Meridianhalbkreise erscheinen in wahrer Länge:  $\rho(v) = (\cot v_0) + v_0 - v$
- Der Entwurf ist entlang des Berührparallelkreises isometrisch.
- Alle anderen Breitenkreise erscheinen zu lange.
- Der Nordpol hat kein Bild.

# Flächentreuer Kegellentwurf



- Komplizierte Abbildungsgleichung:  $\rho(v) = \dots$
- Der Entwurf ist entlang des Berührparallelkreises isometrisch.
- Zu den Polen hin geht die Längenverzerrung auf den Meridianen gegen 0, jene auf den Breitenkreisen aber gegen  $\infty$ . (Das Produkt der beiden Verzerrungen ist in jedem Punkt gleich 1.)
- Der Nordpol hat kein Bild.

# Winkeltreuer Kegellentwurf

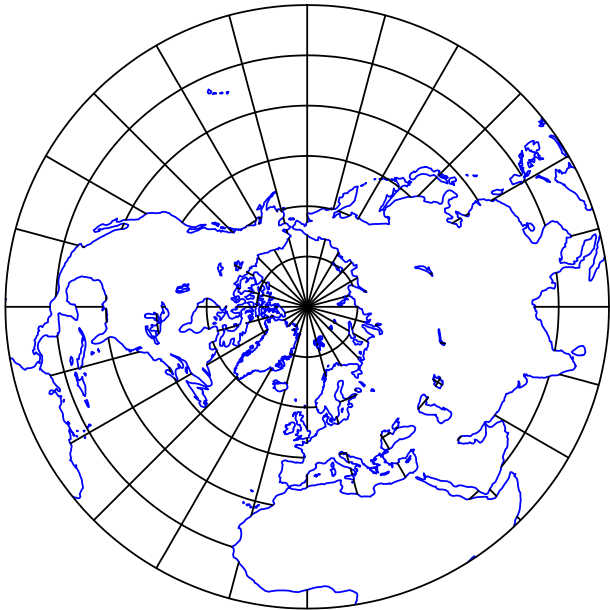


- Komplizierte Abbildungsgleichung:  $\rho(v) = \dots$
- Der Entwurf ist entlang des Berührparallelkreises isometrisch.
- Zu den Polen hin geht die Längenverzerrung auf den Meridianen und den Breitenkreisen gegen  $\infty$ . (Die beiden Werte sind in jedem Punkt gleich.)
- Der Nordpol hat seinen Bildpunkt im Ursprung (Abwicklung der Kegelspitze).

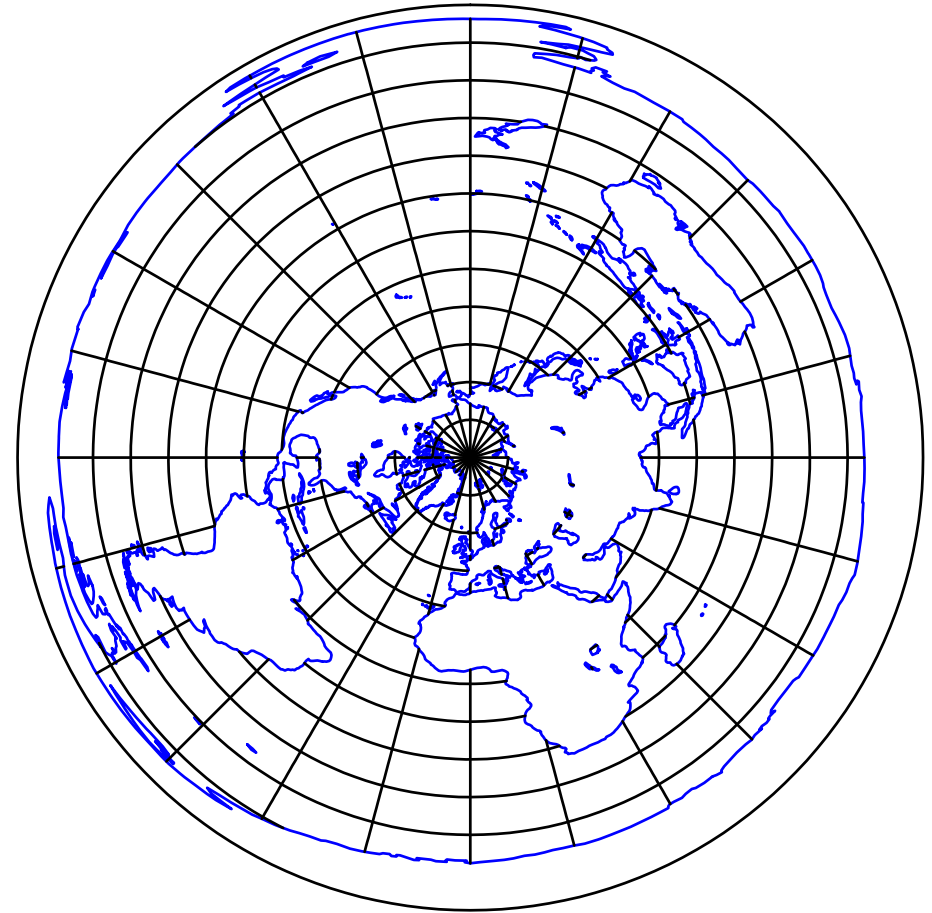
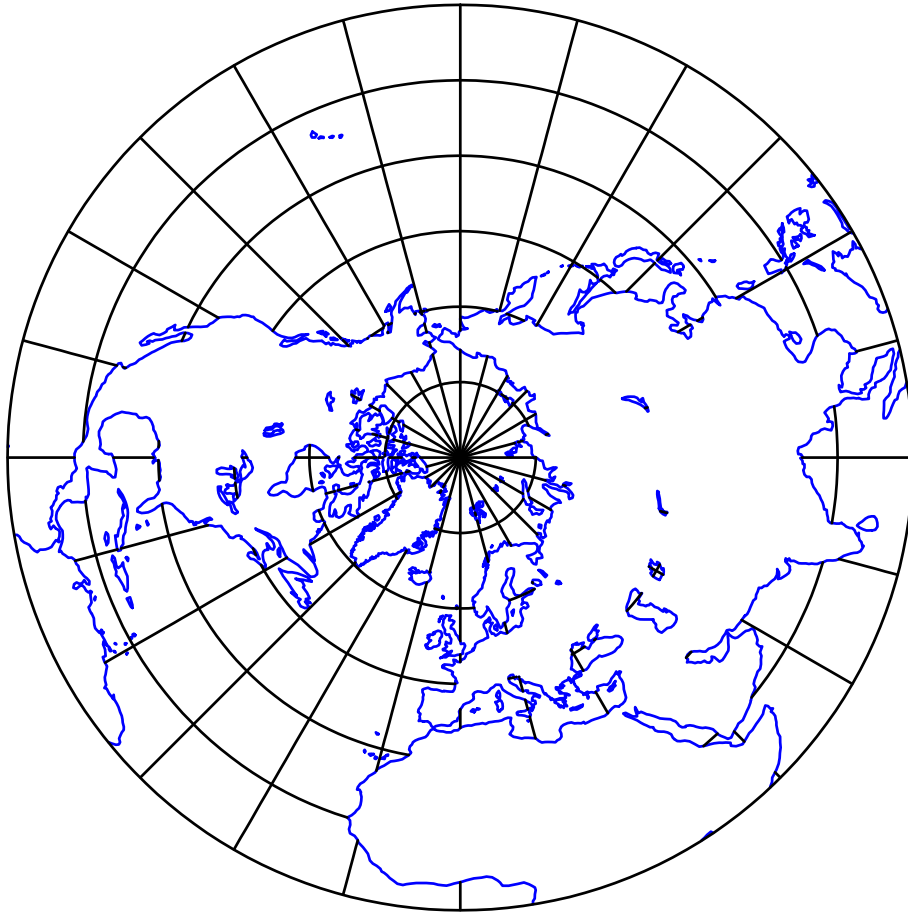
# Azimutalentwürfe

Beim Grenzübergang  $v_0 \rightarrow \frac{\pi}{2}$  geht der Berührtrehkegel in die Tangentialebene im Nordpol über. An Stelle eines Kegelentwurfs erhalten wir nun einen **Azimutalentwurf**. Er besitzt die folgenden Eigenschaften:

- Abbildungsgleichungen in Polarkoordinaten  $(r, \varphi)$ :  $r = \rho(v)$ ,  $\varphi = u$  mit einer passenden Funktion  $\rho$ .
- Orthogonales Gradnetz
- Geographische Längen können (als Winkelmaß) sofort abgelesen werden.
- Der Entwurf ist im Nordpol erklärt und dort sogar winkeltreu.
- Zum Südpol hin wächst die Längenverzerrung der Breitenkreise über alle Grenzen.
- Der Südpol hat keinen Bildpunkt.
- Kein störender „Nahtmeridian“



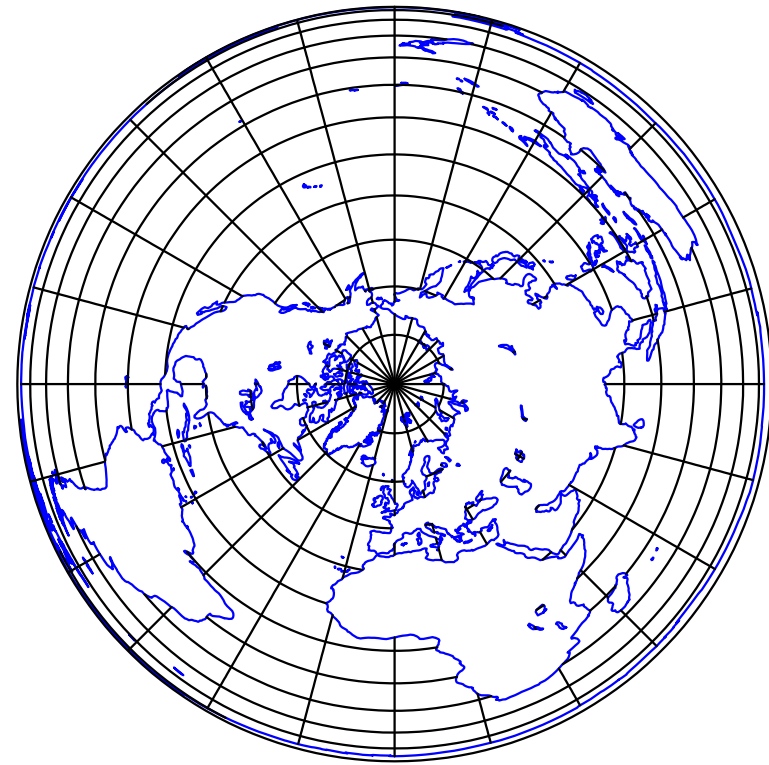
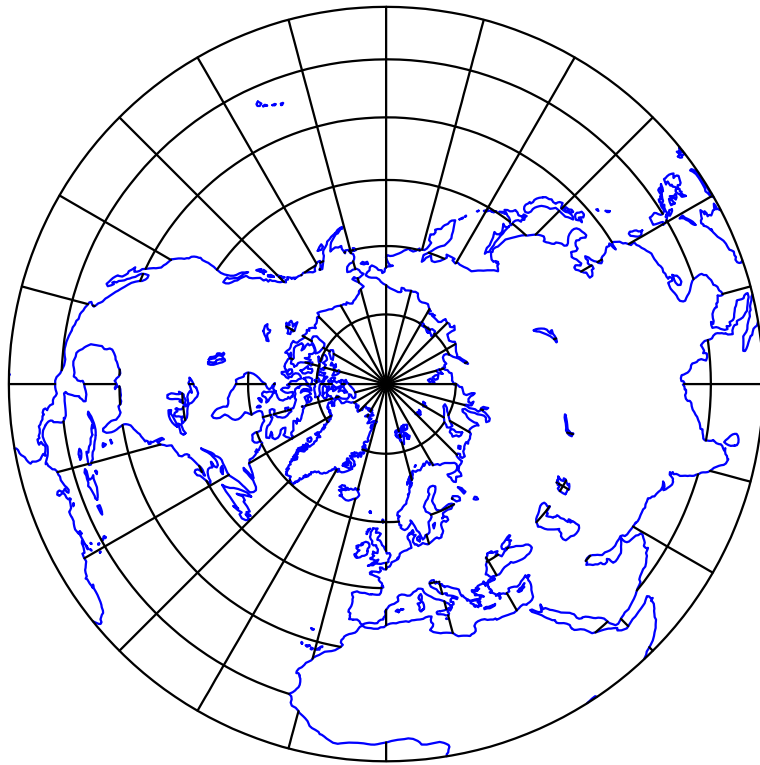
# Abstandstreuer Azimutalentwurf



- Alle Meridianhalbkreise erscheinen in wahrer Länge:  $\rho(v) = \frac{\pi}{2} - v$
- Der Entwurf ist im Nordpol isometrisch.
- Alle Breitenkreise erscheinen zu lange.



# Flächentreuer Azimutalentwurf



- Abbildungsgleichung:  $\rho(v) = \sqrt{2 - 2 \sin v} =$  Raumabstand zum Nordpol
- Der Entwurf ist im Nordpol isometrisch.
- Zum Südpol hin geht die Längenverzerrungen auf den Meridianen gegen 0, jene auf den Breitenkreisen aber gegen  $\infty$ . (Das Produkt der beiden Verzerrungen ist in jedem Punkt gleich 1.)
- Alle Breitenkreise erscheinen zu lange.

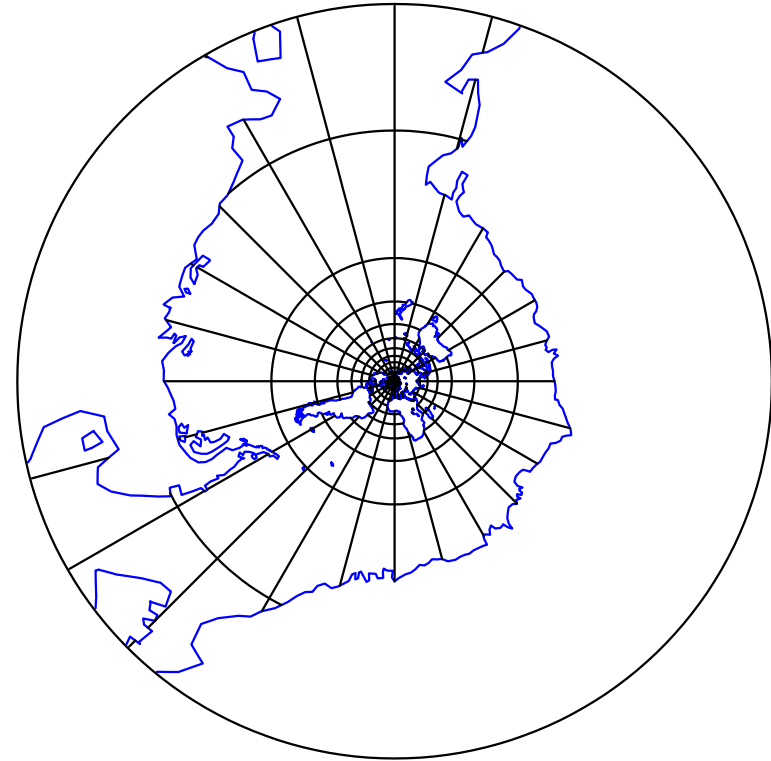
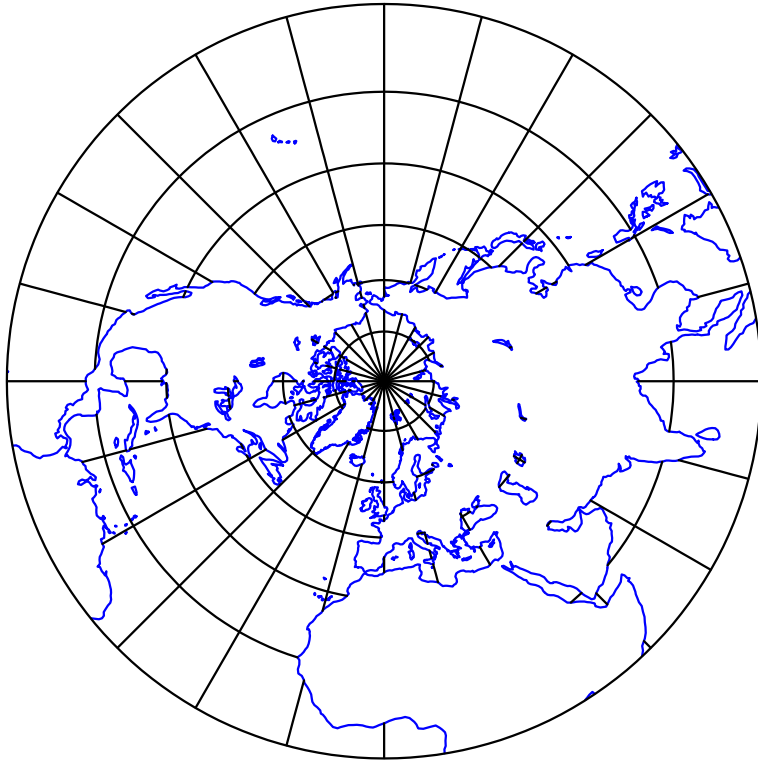
# Flächentreuer Azimutalentwurf

---

## Bemerkungen:

- Wird oft in Atlanten verwendet.
- Sehr gute Werte hinsichtlich der Abstandsverzerrung in der Umgebung des Nordpols (vgl. weiter unten).

# Winkeltreuer Azimutalentwurf



- Abbildungsgleichung:  $\rho(v) = 2 \cot \left( \frac{\pi}{4} + \frac{v}{2} \right)$
- **Stereographische Projektion** aus dem Südpol auf die Tangentialebene im Nordpol
- Der Entwurf ist im Nordpol isometrisch.
- Zum Südpol hin geht die Längenverzerrungen auf den Meridianen und den Breitenkreisen gegen  $\infty$ . (Die beiden Werte sind in jedem Punkt gleich.)
- Alle Breitenkreise erscheinen zu lange.
- Kreise gehen in Kreise oder Geraden über.

# Winkeltreuer Azimutalentwurf

## Bemerkungen:

- Kommt (als Projektion) schon bei Hipparchos (um 100 v. Chr.) vor. Die Kreistreue wurde aber erst im 13. Jahrhundert, die Winkeltreue erst im 16. Jahrhundert gefunden.
- Wird für drehbare Sternkarten verwendet, also zur Abbildung des [Himmelsglobus](#).
- Schlechtere Werte hinsichtlich der Abstandsverzerrung in der Umgebung des Nordpols im Vergleich zum flächentreuen Azimutalentwurf:

Zwei Punkte mit dem sphärischen Abstand  $d$  haben im Bild – je nach ihrer Lage – einen Abstand  $\lambda d$  mit  $\lambda$  zwischen folgenden Grenzen:

In der Kalotte bis	Flächentreuer Entwurf	Winkeltreuer Entwurf
80°N	$0,9962 \leq \lambda \leq 1,0038$	$1,0000 \leq \lambda \leq 1,0077$
70°N	$0,9848 \leq \lambda \leq 1,0154$	$1,0000 \leq \lambda \leq 1,0311$
0°N	$0,7071 \leq \lambda \leq 1,4142$	$1,0000 \leq \lambda \leq 2,0000$

# Bemerkung

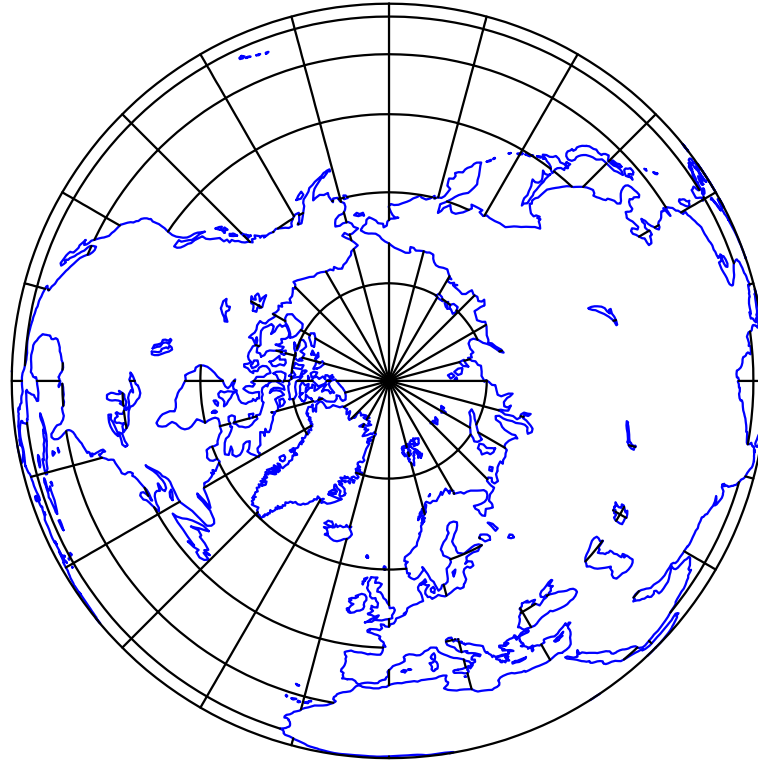
Mit dem winkeltreuen Azimutalentwurf liegt in diesem Vortrag erstmalig ein Kartenentwurf vor, dem eine räumliche **Projektion** zu Grunde liegt. Das ist vom Standpunkt der Geometrie eine wichtige Eigenschaft.

Es stellt sich allerdings die Frage, ob dieses Wissen beim Betrachten der Karte hilfreich ist oder nicht.

Ein Kartenentwurf dient ja nicht dazu, die Lage der Erdkugel im Weltall zu illustrieren. Vielmehr soll er nur ein Bild der Erdoberfläche liefern.

In der Literatur werden Kartenentwürfe oft als Projektionen bezeichnet, obwohl sie gar nichts mit einem räumlichen Projektionsvorgang zu tun haben.

# Orthographische Projektion



- Abbildungsgleichung:  $\rho(v) = \cos v$
- **Normalprojektion** in Richtung der Erdachse auf die Tangentialebene im Nordpol
- Der Entwurf ist im Nordpol isometrisch.
- Alle Breitenkreise erscheinen in wahrer Länge.
- Der Äquator ist eine natürliche Grenze der Abbildung.

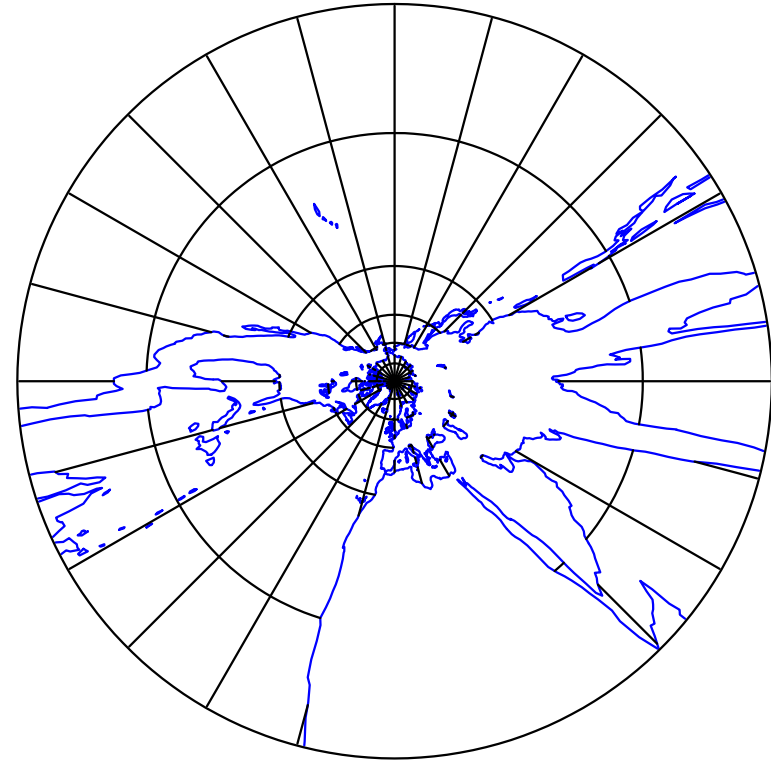
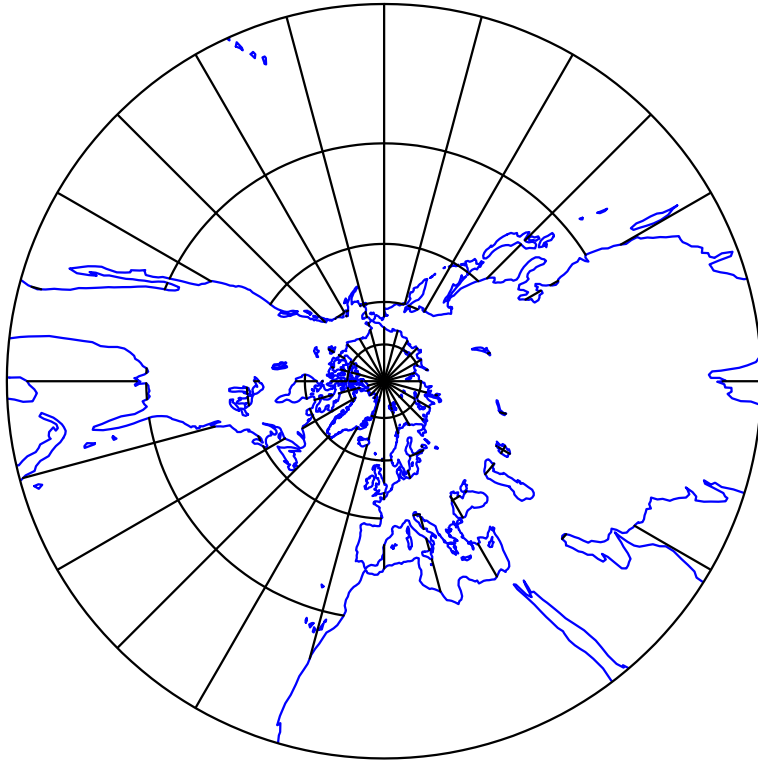
# Orthographische Projektion

---

## Bemerkungen:

- Schon Thales (um 600 v. Chr.) zugeschrieben.
- Wird hauptsächlich für Darstellung der Erde im Raum verwendet.
- Tritt als **Mondkarte** auf, da sie (nahezu) dem Bild des von der Erde aus gesehenen Mondes entspricht.

# Gnomonische Projektion



- Abbildungsgleichung:  $\rho(v) = \cot v$
- Projektion aus dem Mittelpunkt der Erdkugel auf die Tangentialebene im Nordpol
- Der Entwurf ist im Nordpol isometrisch.
- Alle Breitenkreise erscheinen zu lange.
- Der Äquator ist eine (unerreichbare) natürliche Grenze.
- Großkreise gehen in Geraden über.



# Gnomonische Projektion

---

## Bemerkungen:

- Obwohl die Karte den kürzesten Weg zwischen je zwei Punkten der Nordhalbkugel als (verzerrte) Strecke erscheinen lässt, ist sie wegen der fehlenden Winkel-treue zur Navigation nicht unmittelbar geeignet.
- Kann als Hilfsmittel zur Konstruktion von Sonnenuhren verwendet werden.
- Hat große theoretische Bedeutung.

# Im Internet

---

- [www.geometrie.tuwien.ac.at/karto/](http://www.geometrie.tuwien.ac.at/karto/)

Picture Gallery of Map Projections, in englischer Sprache. Die Figuren sind alle in Deutsch beschriftet, aber zum Ausdrucken ungeeignet.

- [www.geometrie.tuwien.ac.at/havlicek/karten.html](http://www.geometrie.tuwien.ac.at/havlicek/karten.html)

Kurze Zusammenfassung meiner Vorlesungen, in englischer Sprache.

- [www.geometrie.tuwien.ac.at/havlicek/publications.html](http://www.geometrie.tuwien.ac.at/havlicek/publications.html)

Unter der Überschrift *Lecture Notes*: Formelsammlung Kartenentwürfe (PDF) mit vielen Illustrationen.

- [www.geometrie.tuwien.ac.at/havlicek/talks.html](http://www.geometrie.tuwien.ac.at/havlicek/talks.html)

Diese Präsentation (PDF), auch in einer längeren Version (Wien 2008).

Daneben gibt es im Internet eine Fülle von Seiten über Kartenentwürfe.

# Literaturhinweise

---

- [1] F. Hohenberg: *Konstruktive Geometrie in der Technik*, 3. Aufl., Wien New York, Springer, 1966.
- [2] J. Hoschek: *Mathematische Grundlagen der Kartographie*, 2. Aufl., Mannheim Wien Zürich, BI-Wissenschaftsverlag, 1984.
- [3] E. Müller, E. Kruppa: *Lehrbuch der darstellenden Geometrie*, 6. Aufl., Springer, Wien, 1961.
- [4] G. Sammet: *Der Vermessene Planet*, Gruner + Jahr, Hamburg, 1990.
- [5] K. Strubecker, G. Scheffers: *Wie findet und zeichnet man Gradnetze von Land- und Sternkarten?*, 2. Aufl., Stuttgart, Teubner, 1956.

Weiter Literatur findet sich in den angegebenen Büchern. Vgl. auch Artikel in den IBDG.