Linearer Raum $(\mathcal{P}, \mathcal{L})$:

Punktmenge $\mathcal{P}$, Geradenmenge $\mathcal{L}$

1. Je zwei verschiedene Punkte gehören gemeinsam genau einer Geraden an.
2. Jede Gerade enthält mindestens zwei verschiedene Punkte.

$\varphi : \mathcal{P} \to \mathcal{P}'$ Punktabbildung mit ...

V ... Rechtsvektorraum über einem Körper K

Projektiver Raum über V:

Punkte	...	1−dim. Unterräume von V
Geraden	...	2−dim. Unterräume von V
$\mathcal{P}(V)$	...	Punktmenge

Kollineation:

Abbildung $\varphi : \mathcal{P} \to \mathcal{P}'$ mit

1. φ ist bijektiv.
2. φ ist geradentreu (d.h. $g \in \mathcal{L} \Rightarrow g^\varphi \in \mathcal{L}'$)

2. Hauptsatz der Projektiven Geometrie: Eine Abbildung $\varphi : \mathcal{P}(V) \to \mathcal{P}(V')$ ist genau dann Kollineation, falls φ durch eine semilineare Bijektion $f : V \to V'$ induziert wird, d.h.

$$(aK)^\varphi = (a^f)K' \text{ für alle } aK \in \mathcal{P}(V).$$

Dabei sei vorausgesetzt:

(Δ) im φ enthält ein Dreieck.

Spurraum eines linearen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{L})$:

1. $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}$ (beliebig).
2. $\mathcal{L}_{\mathcal{M}} := \{g \cap \mathcal{M} \mid g \in \mathcal{L},\ \#(g \cap \mathcal{M}) \geq 2\}$.

Dann ist $(\mathcal{M}, \mathcal{L}_{\mathcal{M}})$ ein linearer Raum.

Sonderfall *Unterraum* $\mathcal{M}$:

$$g \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}} \Rightarrow g \in \mathcal{L}.$$

Projektion in einem projektiven Raum:

Komplementäre Unterräume $\mathcal{O}, \mathcal{T} \subset \mathcal{P}$, d.h.

$$\mathcal{P} = \overline{\mathcal{O} \cup \mathcal{T}} = \mathcal{O} \vee \mathcal{T}, \quad \mathcal{O} \cap \mathcal{T} = \emptyset,$$

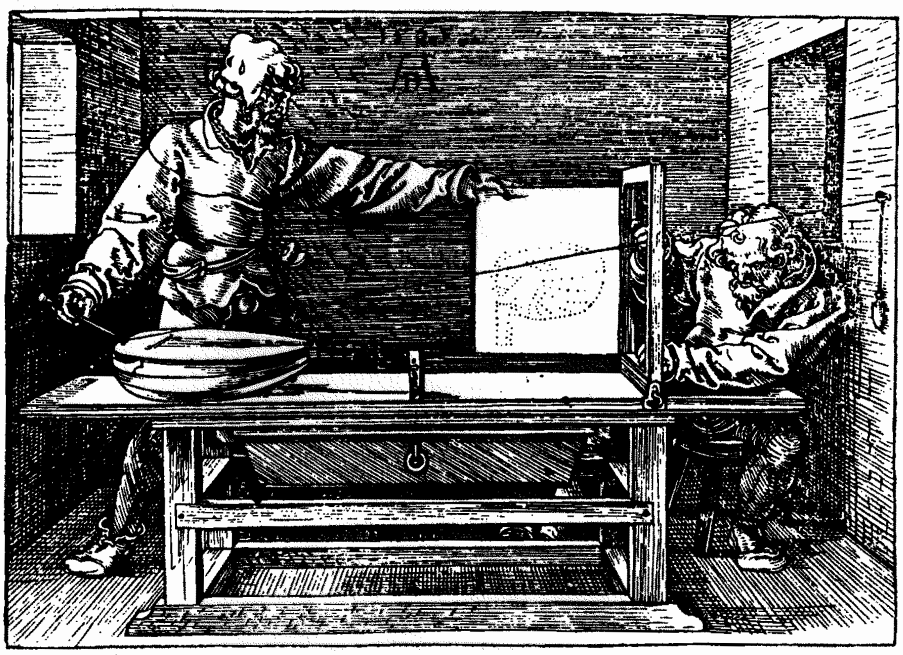
bestimmen die Abbildung

$$\varphi : \mathcal{P} \rightarrowtail \mathcal{T},\ A \mapsto A^{\varphi}$$

mit

$$\{A^{\varphi}\} = (\{A\} \vee \mathcal{O}) \cap \mathcal{T} \text{ (falls } \neq \emptyset).$$

$\text{dom}\varphi = \mathcal{P} \setminus \mathcal{O}$	$\dots$	*Definitionsmenge*,
$\mathcal{O}$	$\dots$	*Ausnahmeraum*,
$\mathcal{T}$	$\dots$	*Bildraum*.



Einbettung als Spurraum:

Abbildung $\varphi : \mathcal{P} \to \mathcal{P}'$ mit

1. φ ist injektiv.
2. Kollineare Lage ist invariant unter φ.
3. Nicht kollineare Lage ist invariant unter φ.

Es kann φ als Kollineation von $\mathcal{P}$ auf den Spurraum $\mathcal{P}^\varphi$ von $\mathcal{P}'$ aufgefaßt werden.

Sonderfall *Einbettung als Unterraum*:

Abbildung $\varphi : \mathcal{P} \to \mathcal{P}'$ mit

1. φ ist injektiv.
2. φ ist geradentreu.

Beispiele für Einbettungen projektiver Räume ($K \subset K'$):

- $K^{n+1} \subset K'^{n+1}$

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{P}(K^{n+1}) &\to \mathcal{P}(K'^{n+1}), \\ (a_0, \ldots, a_n)K &\mapsto (a_0, \ldots, a_n)K' \end{aligned}$$

- V über K, $V' := V \otimes_K K'$

$$\varphi : \mathcal{P}(V) \to \mathcal{P}(V'),\ aK \mapsto (a \otimes 1)K'$$

“kanonische” Einbettung

- Seien $1, y_0, y_1, y_2 \in K'$ linear unabhängig im Linksvektorraum K' über K:

$$\varphi : \mathcal{P}(K^4) \to \mathcal{P}(K'^3),\ aK \mapsto (a^f)K'$$

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \overset{f}{\mapsto} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -y_0 \\ 0 & 1 & 0 & -y_1 \\ 0 & 0 & 1 & -y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

Gemeinsame Eigenschaften dieser Abbildungen projektiver Räume:

Für alle Unterräume $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \subset \mathcal{P}$ gilt:

$$\begin{aligned}
\overline{(\mathcal{X} \vee \mathcal{Y})^\varphi} &= \overline{\mathcal{X}^\varphi} \vee \overline{\mathcal{Y}^\varphi} \\
\dim \overline{\mathcal{X}^\varphi} &\leq \dim \mathcal{X} \\
(\mathcal{X} \vee \mathcal{Y})^\varphi &= \mathcal{X}^\varphi \vee \mathcal{Y}^\varphi \begin{cases} \text{Kollineation} \\ \text{Projektion} \\ \text{UR-Einbettung} \end{cases}
\end{aligned}$$

Schwach lineare Abbildung projektiver Räume:

Abbildung $\varphi : \mathcal{P} \rightarrowtail \mathcal{P}'$ mit

1. $\overline{(\{X\} \vee \{Y\})^\varphi} = \{X\}^\varphi \vee \{Y\}^\varphi$
   für alle $X, Y \in \mathcal{P}$.

Schwach semilineare Abbildung:

Abbildung $f : V \to V'$ mit

1. $(a+b)^f = a^f + b^f$ für alle $a, b \in V$.
2. $(ax)^f = a^f x^\zeta$ für alle $a \in V, x \in K$; dabei ist $\zeta : K \to K'$ ein Körpermonomorphismus.

Satz (Faure Frölicher 1994, H. 1994): Die Abbildung

$$\varphi : \mathcal{P}(V) \rightarrowtail \mathcal{P}(V')$$

erfülle (Δ). Es ist φ genau dann schwach linear, falls φ durch eine schwach semilineare Abbildung $f : V \to V'$ induziert werden kann. Dann ist φ darstellbar als Produkt einer natürlichen Einbettung, einer Projektion und einer Unterraumeinbettung.

Sonderfälle schwach linearer Abbildungen:

Lineare Abbildung (konstruktive Geometrie):

Abbildung $\varphi : \mathcal{P} \rightarrowtail \mathcal{P}'$ mit

1. $(\{X\} \vee \{Y\})^\varphi = \{X\}^\varphi \vee \{Y\}^\varphi$ für alle $X, Y \in \mathcal{P}$.

Rehbock 1926, **Brauner 1973, 1976**, **Timmermann 1973**, **Sörensen 1985**, **Faure Frölicher 1993**.
Lenz 1957, **Frank 1992** $\rightarrow$ lokale Kennzeichnungen.
Sörensen 1985 $\rightarrow$ Lineare Räume.
Rehbock 1926, **H. 1981**, **Wells 1983**, **Zanella 1995** $\rightarrow$ Graßmann-Räume
Zanella 1996 $\rightarrow$ Segre-Räume.
Pfeiffer Schmidt 1995 $\rightarrow$ Projektive Verbandsgeometrie.

Wir betrachten im folgenden ausschließlich Abbildungen mit der Eigenschaft (Δ):

Folgerung 1 Jede schwach lineare Abbildung reeller projektiver Räume ist linear.

Folgerung 2 Jede injektive Abbildung eines reellen projektiven Raumes in sich, die stets kollineare in kollineare Punkte überführt, ist bereits Unterraumeinbettung.

Folgerung 3 Jede injektive Abbildung eines reellen in einen komplexen projektiven Raum, die stets kollineare in kollineare Punkte überführt, ist Produkt einer kanonischen Einbettung und einer Unterraumeinbettung.