NICHTEUKLIDISCHE GEOMETRIE UND QUANTENLOGIK

Hans Havlicek
Inst. f. Geometrie

Karl Svozil
Inst. f.
Theoretische Physik

TU Wien

Density conditions for quantum propositions
J. Math. Phys. 37 (1996), 5337 – 5341.

Geometrische Problemstellung

$\underbrace{\{u, v, w\}}_{=: V_0}$ sei Basis von E_3

$$V_{i+1} := V_i \cup \{ r \times s \mid r, s \in V_i ,\ r \times s \neq 0 \} \quad (i \in \mathbb{N})$$

$$V := \bigcup_{i \in \mathbb{N}} V_i$$

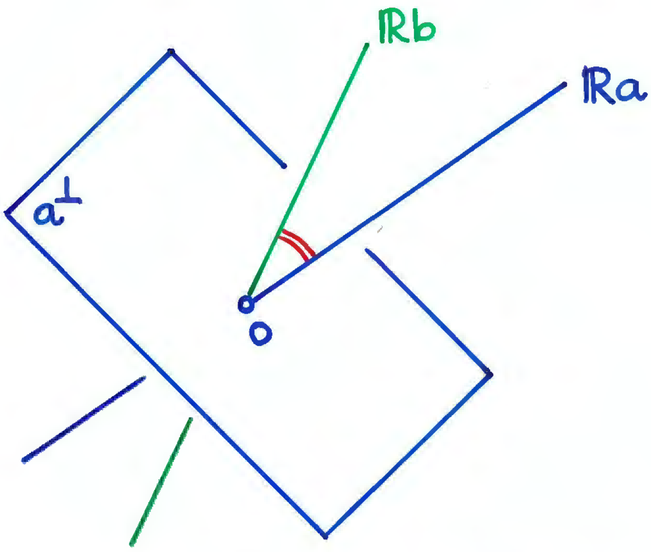
Frage: Wie liegen die Schnittpunkte der Geraden $\mathbb{R}a$ $(a \in V)$ mit der Einheitssphäre S_2?

Äquivalente Frage: Wie liegen die Punkte $\mathbb{R}a$ $(a \in V)$ in der elliptischen Ebene?

Quantenlogik

G. Birkhoff, J.v. Neumann:
The logic of quantum mechanics, Ann. of Math 37 (1936), 823-843.

I. Pitowski:
Constructive quantum mechanics, Gleason's theorem, and the indeterminacy relations, Tatra Mt. Math. Publ. 15 (1998), 155-164.



quantenlog. Behauptung	Unterraum von E_3
elementare Behauptung (reiner Zustand)	Gerade
UND	Schnitt ($\wedge$)
ODER	Summe ($\vee$)
IMPLIKATION	Inklusion ($\subset$)
NICHT	Orthogonales Komplement ($\perp$)
NICHT ($\mathbb{R}a$ ODER $\mathbb{R}b$) ($\mathbb{R}a \neq \mathbb{R}b$)	$\mathbb{R}(a \times b)$

Projektive Ebene

$(\mathcal{P}, \mathcal{G})$ $\qquad\qquad$ $(\mathcal{G} \subset 2^{\mathcal{P}})$

Punkte $\quad$ Geraden

(P1)  $\exists^*$

(P2) 

$\exists$

(P3) $\quad\exists$ Viereck

$$\mathcal{M} \subset \mathcal{P} \ : \quad \mathcal{G}_{\mathcal{M}} := \{\underbrace{g \cap \mathcal{M}}_{\text{„Spurgeraden"}} \mid g \in \mathcal{G},\ \#(g \cap \mathcal{M}) \geq 2\}$$

$(\mathcal{M}, \mathcal{G}_{\mathcal{M}})$ erfüllt (P1)

$\mathcal{M}$ heißt <u>Unterebene</u>, falls $(\mathcal{M}, \mathcal{G}_{\mathcal{M}})$ die Forderung (P2) erfüllt.

$\mathcal{M}$ heißt <u>projektive Unterebene</u>, falls $(\mathcal{M}, \mathcal{G}_{\mathcal{M}})$ die Forderungen (P2) und (P3) erfüllt.

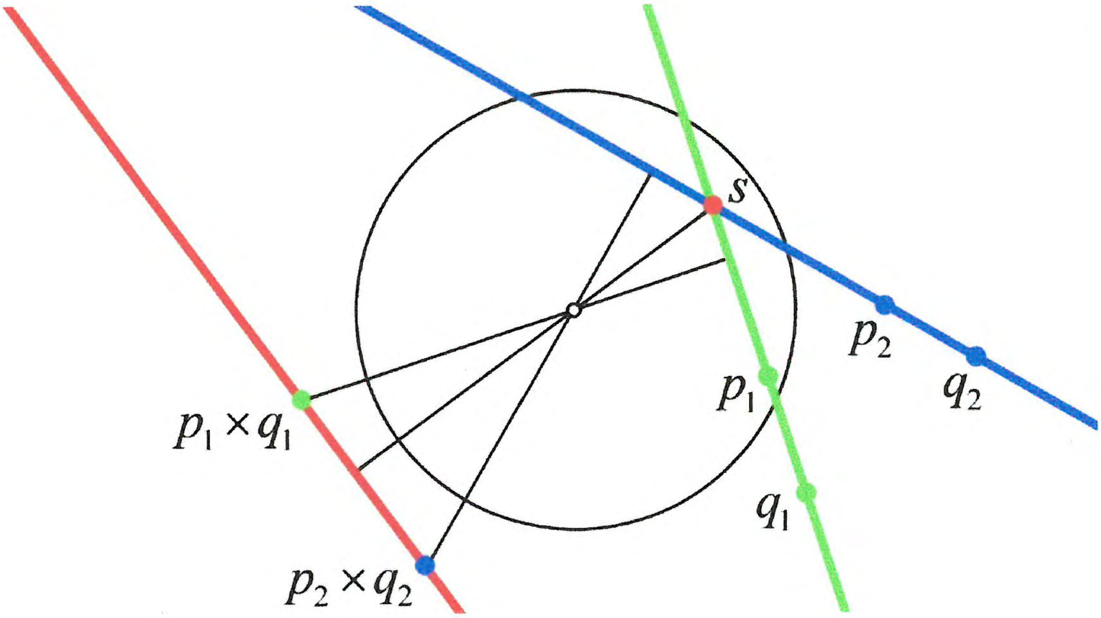
entartete Unterebenen

SATZ 1: Die Menge

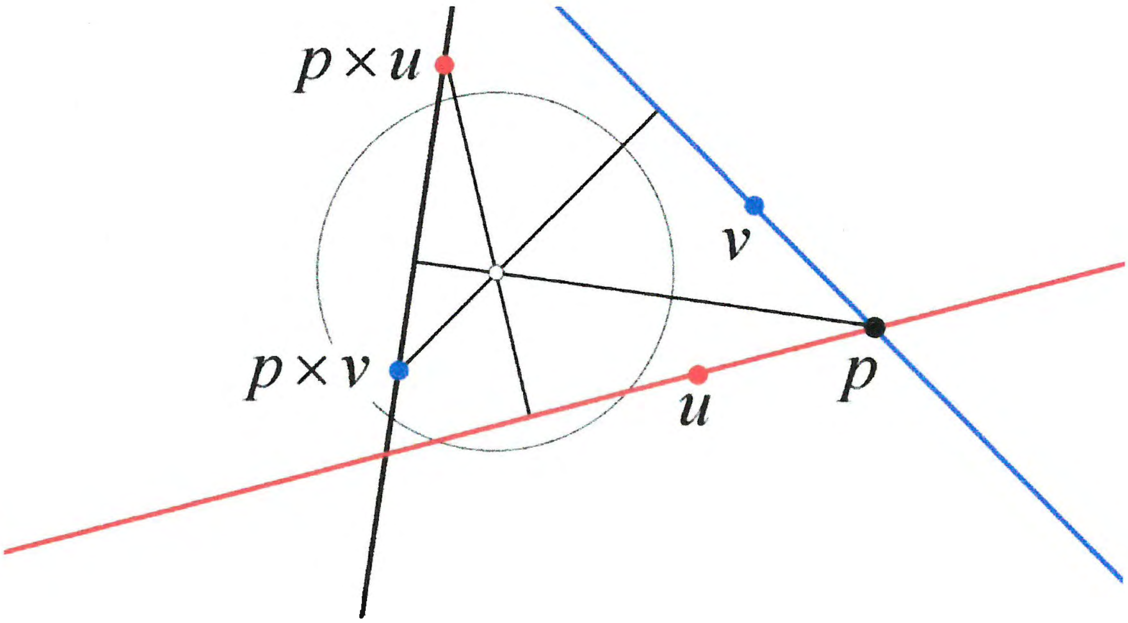
$$\mathcal{M} := \{ p\mathbb{R} \mid p \in V \}$$

ist eine Unterebene der elliptischen Ebene. Sie ist abgeschlossen unter der absoluten Polarität, d.h.

$$P \in \mathcal{M} \Rightarrow (P^{\perp} \cap \mathcal{M}) \in \mathcal{G}_{\mathcal{M}}.$$



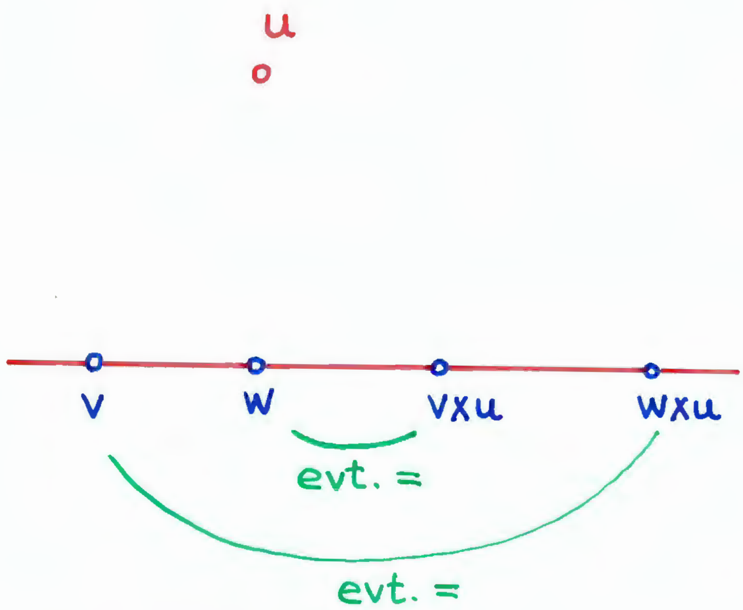
$$s = (p_1 \times q_1) \times (p_2 \times q_2)$$


$p \times u$
v
$p \times v$
p
u

SATZ 2 : $(\mathcal{M}, g_{\mathcal{M}})$ entartet $\Longleftrightarrow$

Ein Angabevektor ist orthogonal zu den beiden anderen.

Bew. $u \perp v, w$ (o.B.d.A.)



$\Longleftrightarrow$ $(\mathcal{M}, g_{\mathcal{M}})$ entartet

SATZ 3: $\mathcal{M}$ liegt dicht in der elliptischen Ebene $\Longleftrightarrow$ Kein Angabevektor ist orthogonal zu den beiden anderen.

Bew.: (a) $(\mathcal{M}, \mathcal{G}_\mathcal{M})$ sei projektive Unterebene

$\downarrow$

Koordinatenkörper F

$\mathbb{Q} \subset F \subset \mathbb{R} \Rightarrow$ F ist dicht in $\mathbb{R} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\mathcal{M}$ liegt dicht in der elliptischen Ebene

(b) $\mathcal{M}$ dicht $\xRightarrow{\text{Satz 1}}$ $\mathcal{M}$ projektive Unterebene

(c) proj. Unterebene $\overset{\text{Satz 2}}{\Longleftrightarrow}$ kein Angabevektor orthogonal zu den anderen.