Vier Höhen — Eine Gleichung

Hans Havlicek

(gemeinsam mit Gunter Weiß, Dresden)

Institut für Geometrie
Technische Universität Wien

Die lineare Geometrie des Tetaeders

a_i ... *Ortsvektor* der *Ecke* A_i

$b_{ij} := a_i - a_j$ ... *Kantenvektor* $(i \neq j)$

h_i ... *Höhe* durch die Ecke A_i

$n_i \parallel h_i$ ... *orthozentrisches Lot*

Es gibt maximal zwölf Ebenen, die jeweils orthogonal zu einer Kante sind und durch eine gegenüberliegende Ecke gehen:

$$b_{ij} \cdot (a_k - x) = 0,$$

$(i, j, k$ paarweise verschieden).

Höhen und Lote

Jacob Steiner (1796–1863)

Satz. *Jede Höhe h_i trifft jedes orthozentrische Lot n_j $(i \neq j)$.*

Satz. *Eine Höhe h_i trifft die Höhe h_j genau dann, wenn*

$$b_{kl} \cdot b_{ij} = 0$$

$(i, j, k, l$ paarweise verschieden).

Satz. *Falls eine Höhe zwei andere Höhen trifft, dann sind alle Höhen kopunktal.*

Der Monge-Punkt

Gaspard Monge (1746–1818)

Es gibt genau sechs *Mittenebenen*, die jeweils orthogonal zu einer Kante sind und durch den Mittelpunkt der gegenüberliegenden Kante gehen:

$$b_{ij} \cdot (a_k + a_l - 2x) = 0$$

Satz. *Die sechs Mittenebenen eines Tetraeders sind kopunktal.*

Die Höhenquadrik

Satz. *Für die vier Höhen eines Tetraeders ohne Höhenschnittpunkt gilt genau eine der folgenden Aussagen:*

- *Je zwei Höhen liegen in genau einem von zwei verschränkten Geradenbüscheln, deren Trägerebenen zwei orthogonale Mittenebenen sind. Der Monge-Punkt ist der Mittelpunkt der Büschelzentren.*
- *Die Höhen liegen in einer Erzeugendenschar eines gleichseitigen Hyperboloids, dessen Mittelpunkt in den Monge-Punkt fällt.*

Mitbestimmte quadratische Formen

Wir legen den Ursprung in den Monge-Punkt. Dann gilt

$$\lambda_{ij} =: a_i \cdot a_j = a_k \cdot a_l$$

(i, j, k, l paarweise verschieden).

Wir betrachten die quadratischen Formen

$$Q_{ijkl} : x \mapsto (x \cdot b_{ij})(x \cdot b_{kl})$$

(i, j, k, l paarweise verschieden). Jede Gleichung

$$Q_{ijkl}(x) = 0$$

beschreibt die Vereinigung zweier Mittenebenen.

Spurfreie quadratische Formen

Der Vektorraum aller quadratischen Formen auf einem 3-dimensionalen euklidischen Vektorraum hat die Dimension 6.

Der Unterraum der *spurfreien quadratischen Formen* ist 5-dimensional.

Satz. *Der von den quadratischen Formen Q_{ijkl} aufgespannte Unterraum $\mathcal{S}$ hat die Dimension 2. Der Unterraum $\mathcal{T}$ aller spurfreien quadratischen Formen in $\mathcal{S}$ hat die Dimension 1 oder 2.*

Eine Gleichung

Es ist

$$Q^* := \lambda_{01} Q_{0123} + \lambda_{02} Q_{0231} + \lambda_{03} Q_{0312}.$$

eine spurfreie quadratische Form.

Satz. *Die vier Höhen liegen auf der Quadrik mit der Gleichung*

$$Q^*(x) = (\lambda_{01} - \lambda_{02})(\lambda_{02} - \lambda_{03})(\lambda_{03} - \lambda_{01}).$$
