Dualität in der Kettengeometrie

Andrea Blunck und Hans Havlicek

Institut für Geometrie
Technische Universität Wien

ÖMG-Kongress 2001

Literatur

W. Benz. *Vorlesungen über Geometrie der Algebren*. Springer, Berlin, 1973.

A. Herzer. Chain geometries. In F. Buekenhout, editor, *Handbook of Incidence Geometry*. Elsevier, Amsterdam, 1995.

A. Blunck und H. Havlicek. Affine spaces within projective spaces. *Res. Math.* **36** (1999), 237–251.

A. Blunck und H. Havlicek. Extending the concept of chain geometry. *Geom. Dedicata* **83** (2000), 119–130.

A. Blunck und H. Havlicek. The connected components of the projective line over a ring. *Adv. Geom.* **1** (2001), 107–117.

A. Blunck und H. Havlicek. The dual of a chain geometry. *J. Geom.*, im Druck.

Kettengeometrien

Sei $\mathrm{GL}_2(R)$ die Gruppe der invertierbaren (2×2)-Matrizen über einem Ring R.

Projektive Gerade über R:

$$\mathbb{P}(R) := \{R(a,b) = R(1,0) \cdot M \mid M \in \mathrm{GL}_2(R)\}$$

Ist K ein (nicht notwendig kommutativer) Unterkörper von R, so haben wir die natürliche Einbettung

$$\mathbb{P}(K) \to \mathbb{P}(R) : K(a,b) \mapsto R(a,b).$$

Die Bilder von $\mathbb{P}(K)$ under $\mathrm{GL}_2(R)$ sind die *Ketten* der *Kettengeometrie* $\Sigma(K,R)$.

Sei R^* die Einheitengruppe von R. Dann gilt

$$\Sigma(K,R) = \Sigma(u^{-1}Ku, R) \text{ für alle } u \in R^*.$$

Dualität

Es sei R° der zu R entgegengesetzte Ring.

$(R^\circ)^2$: R°-Linksmodul	$\widehat{R}^2$: R-Rechtsmodul
	(dualer Modul zu R^2)
$\mathbb{P}(R^\circ)$: $R^\circ(a,b)$	$\widehat{\mathbb{P}}(R)$: $\binom{a}{b}R$
$\Sigma(K^\circ, R^\circ)$	$\widehat{\Sigma}(K,R)$

$\widehat{\Sigma}(K,R)$ heisst zu $\Sigma(K,R)$ *duale Kettengeometrie*.

Der kanonische Isomorphismus

Satz. *Sei* $\Sigma(K,R)$ *eine Kettengeometrie. Dann ist die Abbildung*

$$\iota : \mathbb{P}(R) \longrightarrow \widehat{\mathbb{P}}(R) : p \mapsto p^{\perp}$$

ein Isomorphismus von $\Sigma(K,R)$ *auf die duale Kettengeometrie.*

Für

$$p = R(1,0)\cdot M \text{ mit } M \in \mathrm{GL}_2(R)$$

gilt dann

$$p^{\iota} = M^{-1}\cdot(0,1)^{\mathrm{T}} R \in \widehat{\mathbb{P}}(R).$$

Problem: Invertieren von Matrizen

- R kommutativ: Kofaktor-Verfahren
- Sei $\mathrm{E}_2(R)$ die von allen Matrizen

$$E(t) := \left(\begin{smallmatrix} t & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \qquad (t \in R)$$

erzeugte Untergruppe von $\mathrm{GL}_2(R)$. Offenbar gilt:

$$E(t)^{-1} := \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & t \end{smallmatrix}\right) \qquad (t \in R)$$

Jede Matrix aus $\mathrm{E}_2(R)$ lässt sich in der Form

$$E(t_1)E(t_2)\cdots E(t_n)$$

mit $t_i \in R$ und $n \in \mathbb{N}$ schreiben. Daher folgt:

$$\begin{aligned} \big(R(t_1,1)\big)^{\iota} &= (-1,t_1)^{\mathrm{T}}R, \\ \big(R(t_1t_2-1,t_1)\big)^{\iota} &= (-t_1,t_2t_1-1)^{\mathrm{T}}R \\ \cdots &= \cdots \end{aligned}$$

Residuum in einem Punkt

Wir zeichnen einen Punkt von $\Sigma(K,R)$ aus, z.B. $R(1,0) =: \infty$ und setzen

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_\infty &:= \{R(a,b) \mid \exists \text{ Kette durch } R(a,b) \text{ und } \infty\}, \\ \mathbf{B}_\infty &:= \{\mathcal{C} \setminus \{\infty\} \mid \mathcal{C} \text{ ist eine Kette durch } \infty\}. \end{aligned}$$

$(\mathbb{P}_\infty, \mathbf{B}_\infty)$ heisst das *Residuum* von $\Sigma(K,R)$ im Punkt ∞. Die Elemente von $\mathbf{B}_\infty$ heissen *Blöcke*.

Wir identifizieren R und $\mathbb{P}_\infty$ mittels der Bijektion

$$R \to \mathbb{P}_\infty : r \mapsto R(r,1).$$

Analog lässt sich das Residuum von $\widehat{\Sigma}(K,R)$ im Punkt $\infty^\iota = (0,1)^{\mathrm{T}}R$ erklären. Das führt zur Bijektion

$$R \to \widehat{\mathbb{P}}_{\infty^\iota} : r \mapsto (-1,r)^{\mathrm{T}}R = \big(R(r,1)\big)^\iota.$$

Linke und rechte affine Räume

R ist ein Links- und ein Rechtsvektorraum über $u^{-1}Ku$ für jedes $u \in R^*$.

Wir erhalten daher „viele“ affine Räume

$$\mathbb{A}(R, u^{-1}Ku)_{\mathrm{links}}, \ \mathbb{A}(R, u^{-1}Ku)_{\mathrm{rechts}}$$

mit gemeinsamer Punktmenge $\mathbb{P}_\infty = R$.

Jeder solche Raum hat zwei Typen von Geraden:

- *reguläre* Geraden (Richtungsvektor in R^*)
- *singuläre* Geraden (sonst)

Die Elemente von $\mathbf{B}_\infty$ sind genau die regulären Geraden all dieser linken (rechten) affinen Räume.

Problem

Gibt es eine kettengeometrische Kennzeichnung jener Teilmengen von $\mathbf{B}_\infty$, die aus den affinen Geraden eines festen affinen Raumes

$$\mathbb{A}(R, u^{-1}Ku)_{\mathrm{links}}$$

oder

$$\mathbb{A}(R, u^{-1}Ku)_{\mathrm{rechts}}$$

bestehen?

Beispiel: $\Sigma(\mathbb{C}, \mathbb{H})$

Wir betrachten dazu den durch $\mathbb{H}$ bestimmten *reellen elliptischen Raum*.

Alle Blöcke durch $0 \in \mathbb{H}$:
Alle Geraden des elliptischen Raumes.

Blöcke durch $0 \in \mathbb{H}$ eines linken (rechten) affinen Raumes:
Klasse linksparalleler (rechtsparalleler) Geraden.

Damit lassen sich (etwa durch Derivation) aus dem Residuum auch nichtdesarguessche affine Ebenen konstruieren.