

Einhundert Projektionsprobleme – ein Programm zum Zeichnen von Karten

Enter Cartography

Universität für Angewandte Kunst Wien, 16. Juni 2011



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
WIEN

VIENNA
UNIVERSITY OF
TECHNOLOGY

DIFFERENTIALGEOMETRIE UND
GEOMETRISCHE STRUKTUREN

HANS HAVLICEK

FORSCHUNGSGRUPPE

DIFFERENTIALGEOMETRIE UND
GEOMETRISCHE STRUKTUREN

INSTITUT FÜR DISKRETE MATHEMATIK UND GEOMETRIE

TECHNISCHE UNIVERSITÄT WIEN

havlicek@geometrie.tuwien.ac.at

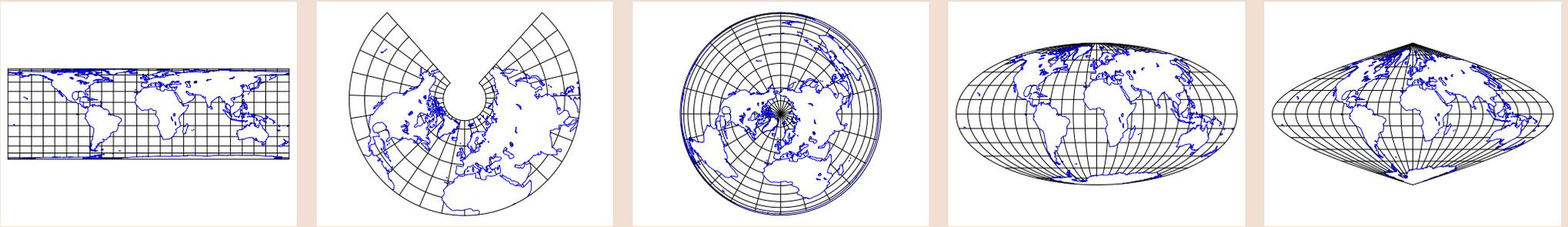
Kartenentwürfe

In der Kartenentwurfslehre geht es nicht darum, die Lage der Erdkugel im Weltall darzustellen, sondern alleine um die Abbildung der Erdoberfläche in die Ebene.

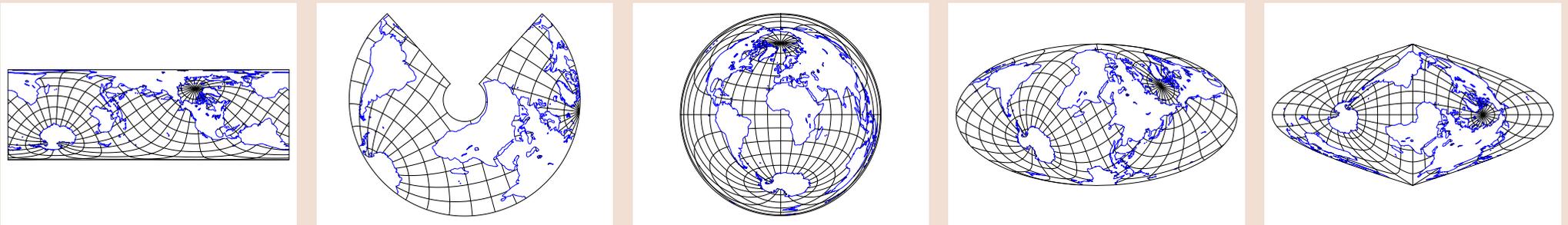
Unabhängig davon, ob eine solche Darstellung von einer Parallel- oder Zentralprojektion des umgebenden Raumes stammt, wird ein **Kartenentwurf** oft synonym als **Kartenprojektion** bezeichnet.

Beispiele

Flächentreue Entwürfe werden bei geographischen und wirtschaftskundlichen Karten verwendet. Dabei wird vielfach nur ein kleiner Ausschnitt gezeigt, um die Verzerrungen klein zu halten.

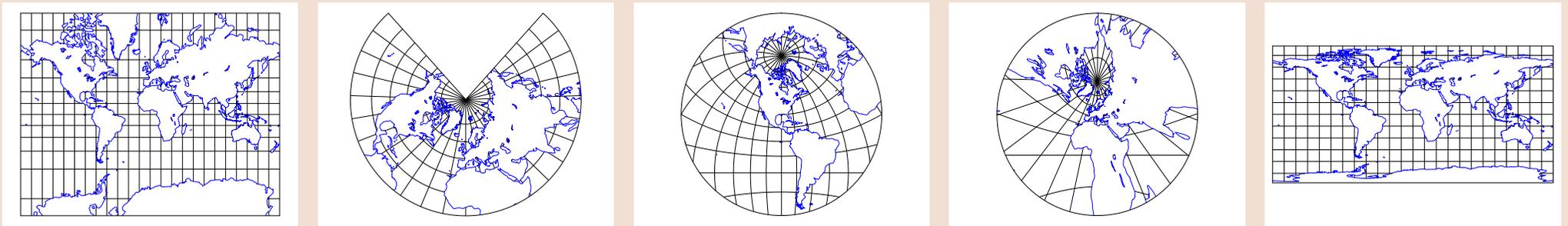


Dieselben Entwürfe, aber mit einem anderen Punkt der Erde in der Bildmitte, liefern einen völlig anderen Bildeindruck.

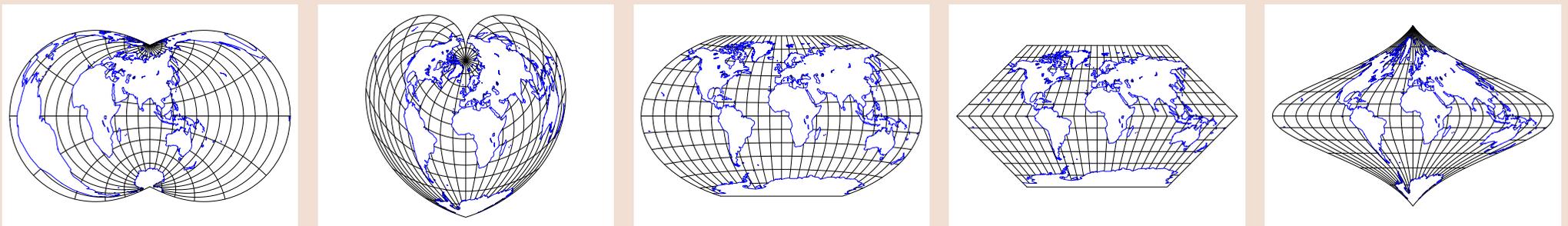


Beispiele

Tieferstehend sind drei winkeltreue Karten, eine gnomonische Projektion mit Bildmitte in Wien und ein Zylinderentwurf mit längentreuen Meridiankreisen zu sehen.



In der Literatur finden sich Hunderte von Kartenentwürfen ...



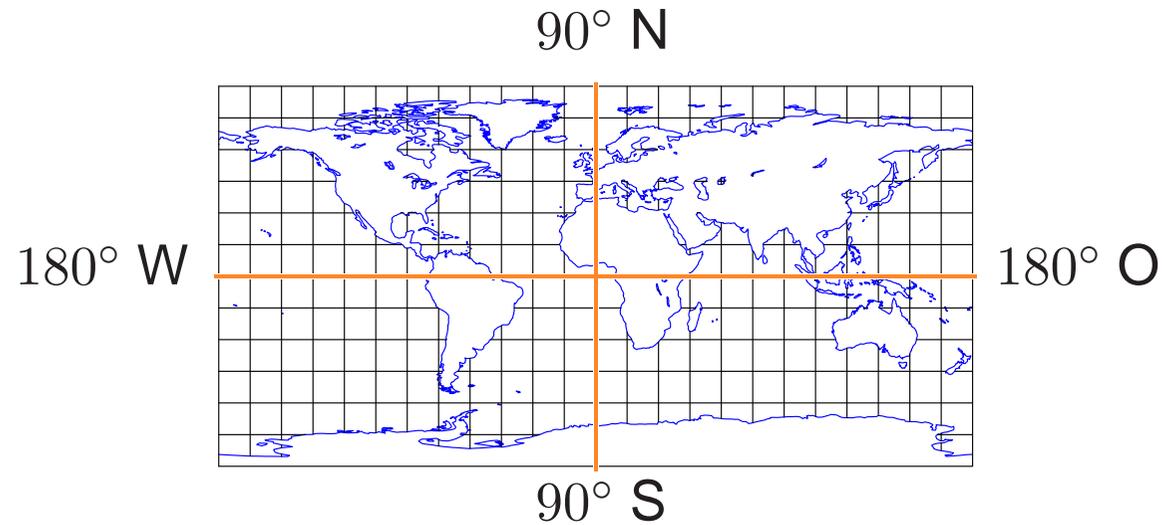
Die Erde als Kugel

Die Erde ist auf Grund der **Abplattung an den Polen** keine Kugel.

- Äquatorradius 6 377 km
- Abstand vom Erdmittelpunkt zu einem der Pole 6 356 km

Für **geographische Karten** kann die Abplattung aber vernachlässigt werden. Wir gehen daher im Folgenden davon aus, dass die Erde **Kugelgestalt** besitzt.

Das Gradnetz



Geographische Länge: 180° West (W) bis 180° Ost (O).

Geographische Breite: 90° Süd (S) bis 90° Nord (N)

Nord- und Südpol haben keine eindeutige geographische Länge!

Die geographische Länge springt (in der Nähe der Datumsgrenze) von 180° O auf 180° W.

Polar- und Wendekreise

Auf vielen Landkarten finden sich vier spezielle Breitenkreise. Sie ergeben sich aus der Schiefe der Ekliptik.

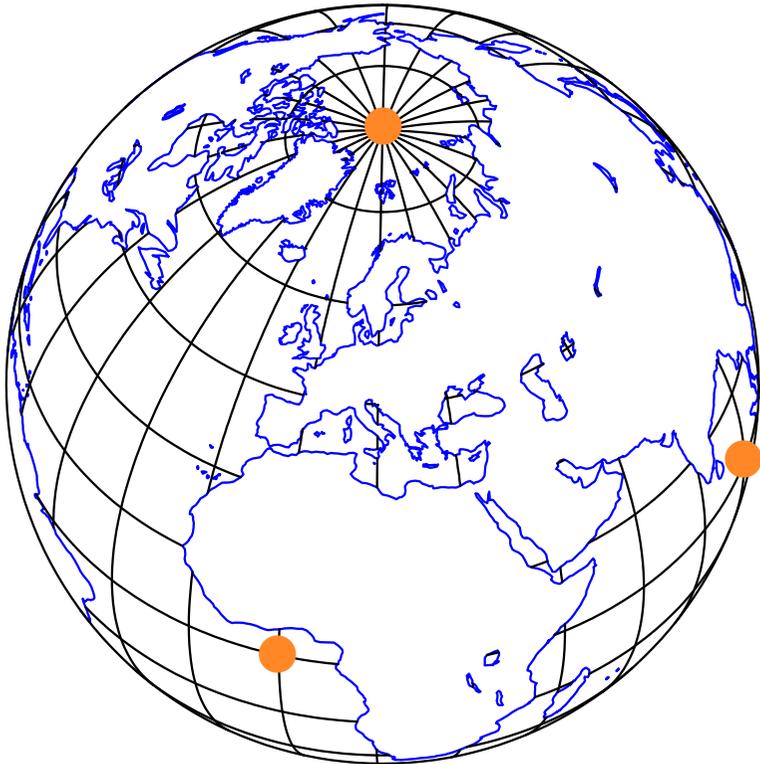
- **Nördlicher Polarkreis** $66^{\circ}34'$ N, **südlicher Polarkreis** $66^{\circ}34'$ S:

Jeder der beiden Polarkreise berandet eine Polkappe, also jenen Teil der Erde, in welchem die Sonne an wenigstens einmal im Jahr 24 Stunden ununterbrochen scheint.

- **Nördlicher Wendekreis** oder **Wendekreis des Krebses** $23^{\circ}26'$ N,
Südlicher Wendekreis oder **Wendekreis des Steinbocks** $23^{\circ}26'$ S:

Die beiden Wendekreise beranden die Tropen, also jene Zone, in welcher die Sonne wenigstens einmal im Jahr im Zenit steht.

Verzerrung



Gleichseitiges sphärisches Dreieck

Der **sphärische Abstand** von zwei Punkten der Erdoberfläche wird immer auf der Kugeloberfläche entlang eines Großkreises gemessen.

Es gibt zwei Arten von Kreisen auf einer Kugel:

- **Großkreise** haben denselben Radius wie die Kugel. Ihr Mittelpunkt ist der Kugelmittelpunkt.

Beispiele: Alle Meridiankreise und der Äquator.

- **Kleinkreise** haben einen kleineren Radius als die Kugel. Ihr Mittelpunkt ist niemals der Kugelmittelpunkt.

Beispiele: Alle Breitenkreise außer dem Äquator.

Problemstellung

Ein **Kartenentwurf** soll die gesamte Erdoberfläche oder zumindest einen Teil davon „in vernünftiger Art und Weise“ in die Ebene abbilden.

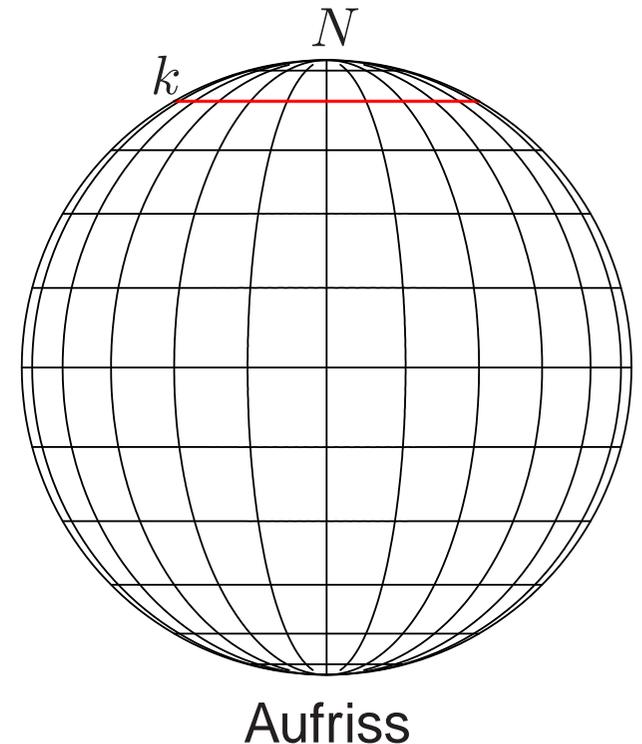
Optimal wäre ein **unverzerrter** Kartenentwurf. Dieser müsste **isometrisch** sein, also alle sphärischen Abstände (abgesehen von einem Maßstabsfaktor) in richtiger Länge in der Ebene wiedergeben.

Nichtexistenz

Satz. *Es gibt keinen Kartenentwurf, der eine (noch so kleine) Kugelkalotte unverzerrt darstellt.*

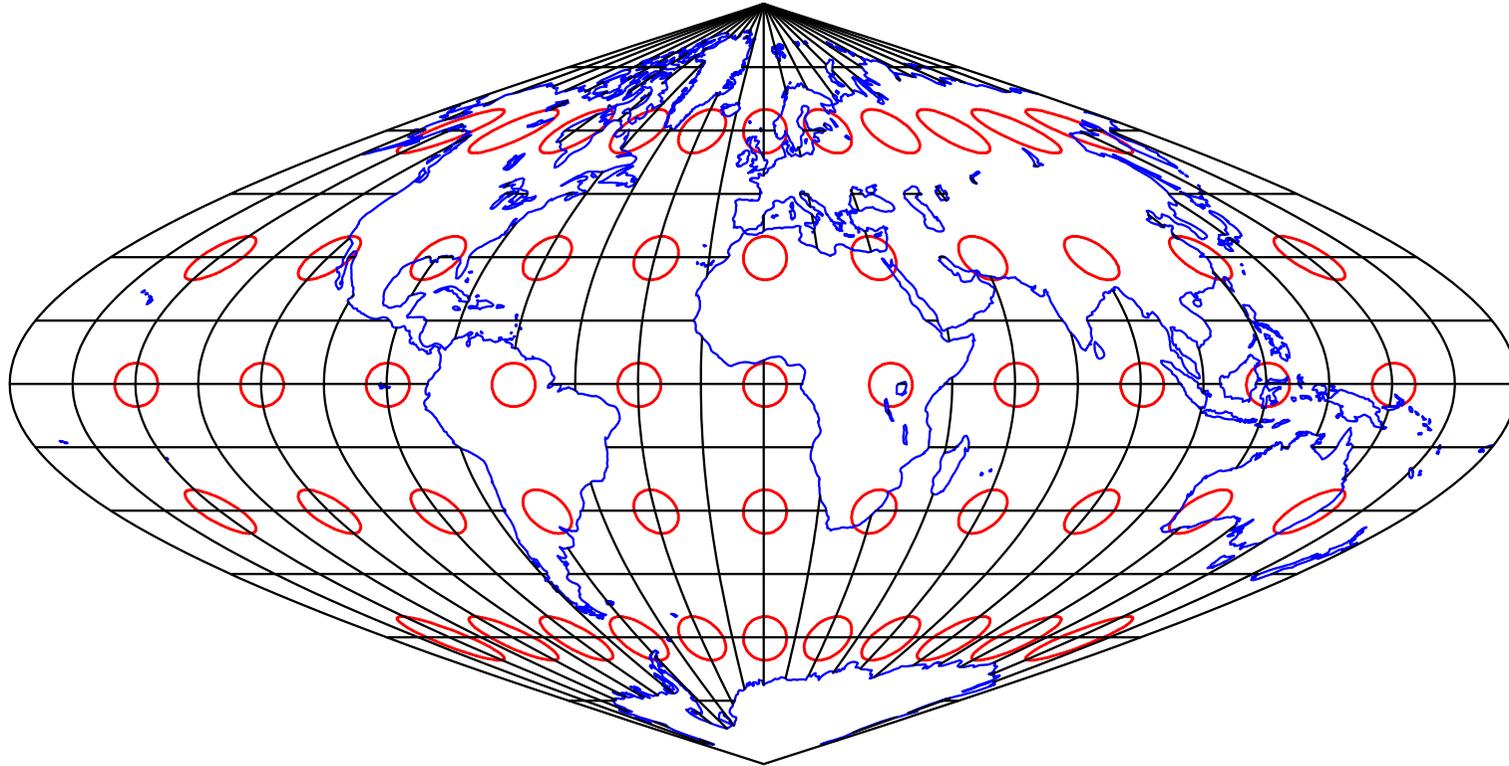
Beweisskizze. Wir betrachten eine Kalotte, die den Nordpol enthält und darin einen Breitenkreis k . Für einen isometrischen Kartenentwurf muss gelten:

1. **Das Bild von k ist ein Kreis.**
Begründung: Alle Punkte von k haben einen festen sphärischen Abstand vom Nordpol, was sich in der Karte widerspiegeln muss.
2. **Der Radius des Bildkreises ist gleich dem sphärischen Radius von k .**
3. **Der Radius des Bildkreises ist gleich dem ebenen Radius von k** (gemessen in der Ebene des Kreises und nicht auf der Kugeloberfläche).
Begründung: Der Kreis k und sein Bild müssen denselben Umfang haben.



Die Eigenschaften 2 und 3 widersprechen einander. Daher gibt es keinen isometrischen Kartenentwurf.

Verzerrungsellipsen



Die Verzerrung einer Kurve in einer Landkarte hängt in jedem Punkt nur von der Richtung der Kurventangente ab.

Zur Illustration der Verzerrungen in einem Punkt dient die **Verzerrungsellipse** (oder: **Tissot-Indikatrix**).

Maßstabsangaben in Landkarten gelten immer nur in gewissen Punkten mit kreisförmiger Indikatrix. In guten Atlanten wird darauf hingewiesen.

Forderungen

Typische Forderungen an einen Kartenentwurf:

- Längen- und Breitenkreise sollen als ... erscheinen.
- Gewisse Kurven sollen längentreu abgebildet werden.
- Differentialgeometrische Eigenschaften:

	Indikatrix	punktal	längs Kurven	in einem Gebiet
winkeltreu	Kreis	ja	ja	ja
flächentreu	Fläche π	ja	ja	ja
isometrisch	Einheitskreis	ja	ja	nein

- Ein gewisser Teil der Kugel soll nahezu isometrisch, etwa mit maximal 5% Fehler, abgebildet werden.

Diese Forderungen lassen sich selbstverständlich kombinieren.
(winkeltreu + flächentreu = isometrisch!)

Historische Anmerkung

Ein tieferes Verständnis der Kartenentwurfslehre setzt Kenntnisse aus der Differentialgeometrie voraus.

Die Entwicklung der Differentialrechnung beginnt erst mit den Untersuchungen von Isaac Newton (1643–1727) und Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716).

Demgegenüber wurden eine Reihe von Kartenentwürfen lange vor dem 17. Jahrhundert gefunden.

Zylinder-, Kegel- und Azimutalentwürfe

Wir umschreiben der Erdkugel entlang des Äquators einen Drehzylinder und bilden die Kugel so auf diesen Zylinder ab, dass gilt:

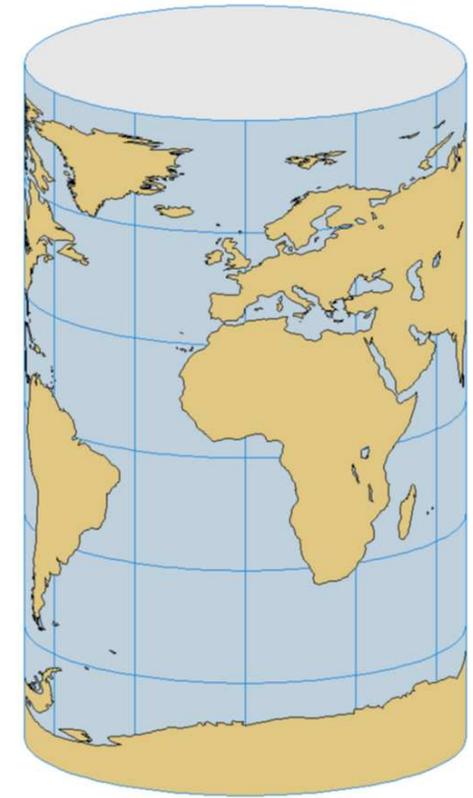
- Der Äquator ist sein eigenes Bild.
- Die Bilder der Meridianhalbkreise sind geradlinig.
- Die Bilder der Breitenkreise sind Kreise.

Wir können dabei die Abbildung

Meridianhalbkreis \rightarrow Erzeugende

(einmal) beliebig wählen.

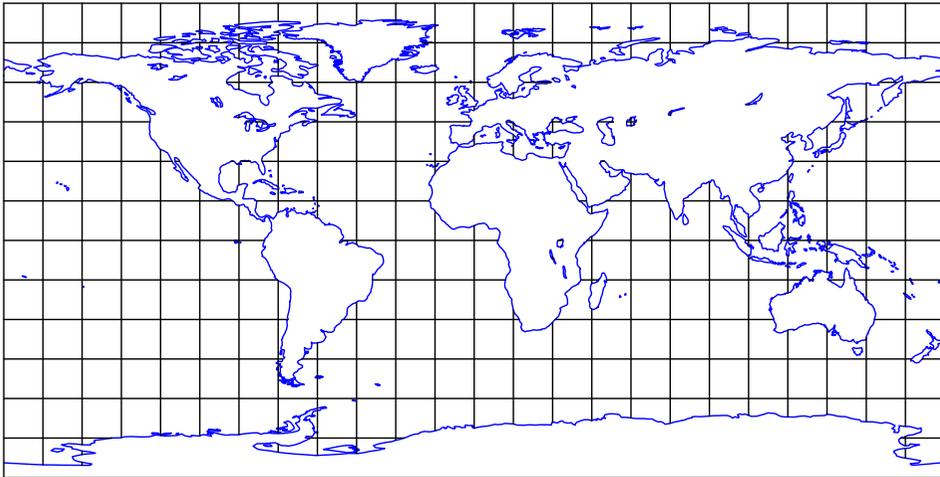
Dann schneiden wir den Zylinder längs einer Erzeugenden auf und wickeln ihn in die Ebene ab.



Berührzylinder

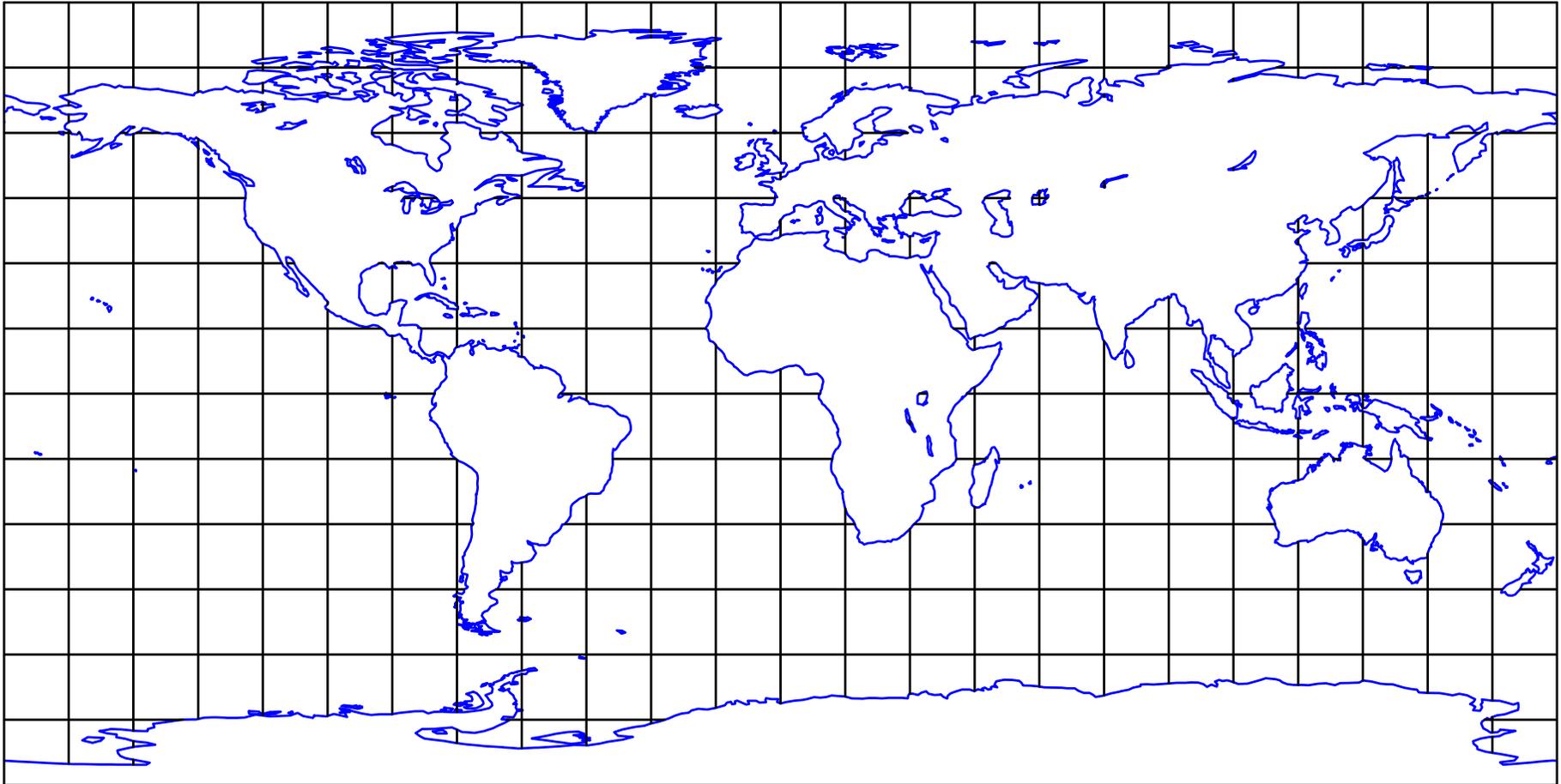
Eigenschaften

Jeder Zylinderentwurf besitzt die folgenden Eigenschaften:



- Orthogonales geradliniges Gradnetz
- Der Äquator erscheint in wahrer Länge.
- Alle anderen Breitenkreise erscheinen zu lange.
- Zu den Polen hin wächst die Längenverzerrung der Breitenkreise über alle Grenzen.
- Nord- und Südpol haben keinen Bildpunkt.
- Sprung am „Nahtmeridian“

Abstandstreuer Zylinderentwurf



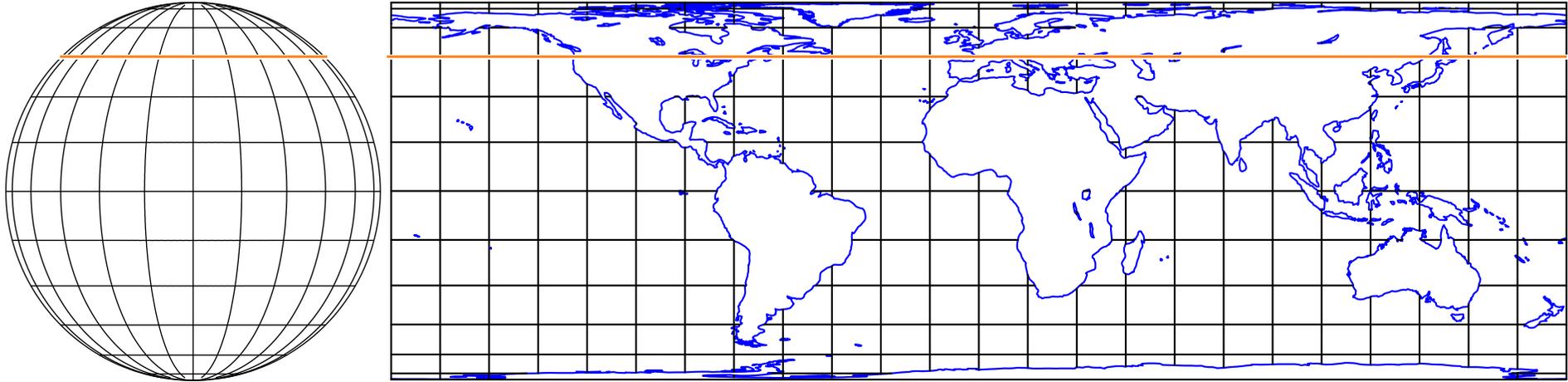
- Alle Meridianhalbkreise erscheinen in wahrer Länge.
- Der Entwurf ist entlang des Äquators isometrisch.
- Geographische Koordinaten können sofort abgelesen werden.

Abstandstreuer Zylinderentwurf

Bemerkungen:

- Wird auch als **quadratische Platkarte** bezeichnet.
- Passable Weltkarte, etwa zur Illustration der Zeitzonen.
- Hintergrundbild in Nachrichtensendungen
- Vor vielen Jahren wurde im ORF beim Vorspann zur Sendung *Inlandsreport* die Abwicklung eines Zylinders samt Weltkarte gezeigt.

Flächentreuer Zylinderentwurf



- Vorschrift: Breitenkreisebenen mit dem Berührzylinder schneiden.
- Der Entwurf ist entlang des Äquators isometrisch.
- Zu den Polen hin strebt die Längenverzerrung auf den Meridianen gegen Null, jene auf den Breitenkreisen wächst aber über alle Grenzen. (Das Produkt der beiden Verzerrungen ist in jedem Punkt gleich 1.)

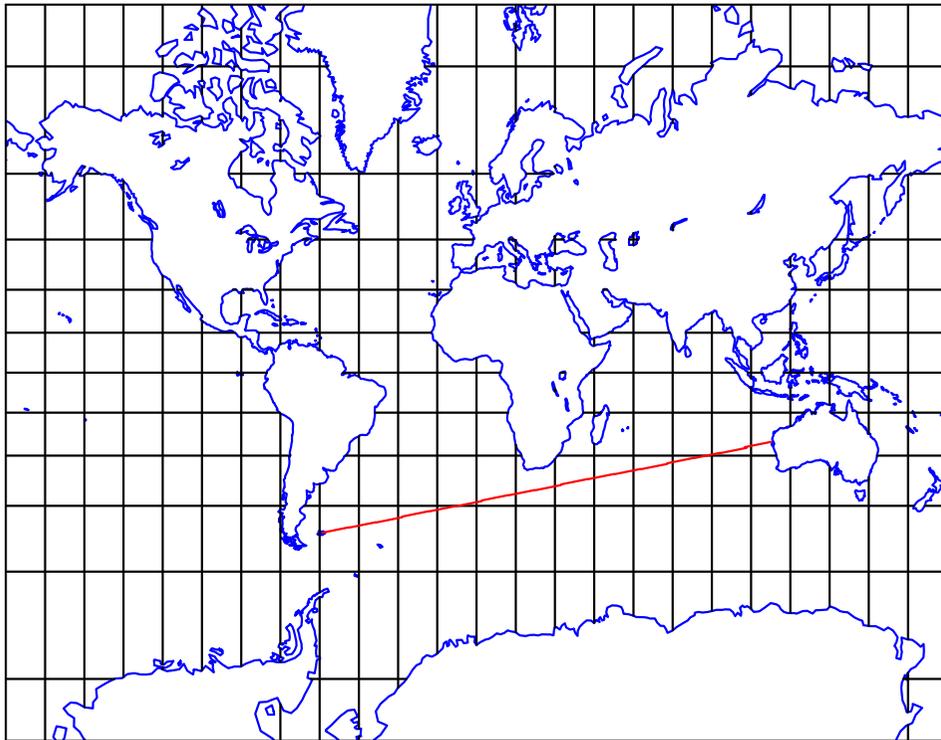
Flächentreue alleine ist kein Qualitätsmerkmal einer Landkarte.

Flächentreuer Zylinderentwurf

Bemerkungen:

- Als Weltkarte kaum geeignet.
- Archimedes (285–212 v. Chr.), Johann Heinrich Lambert (1728–1777)

Winkeltreuer Zylinderentwurf



Loxodrome als Kurs von den Falkland-Inseln nach Westaustralien

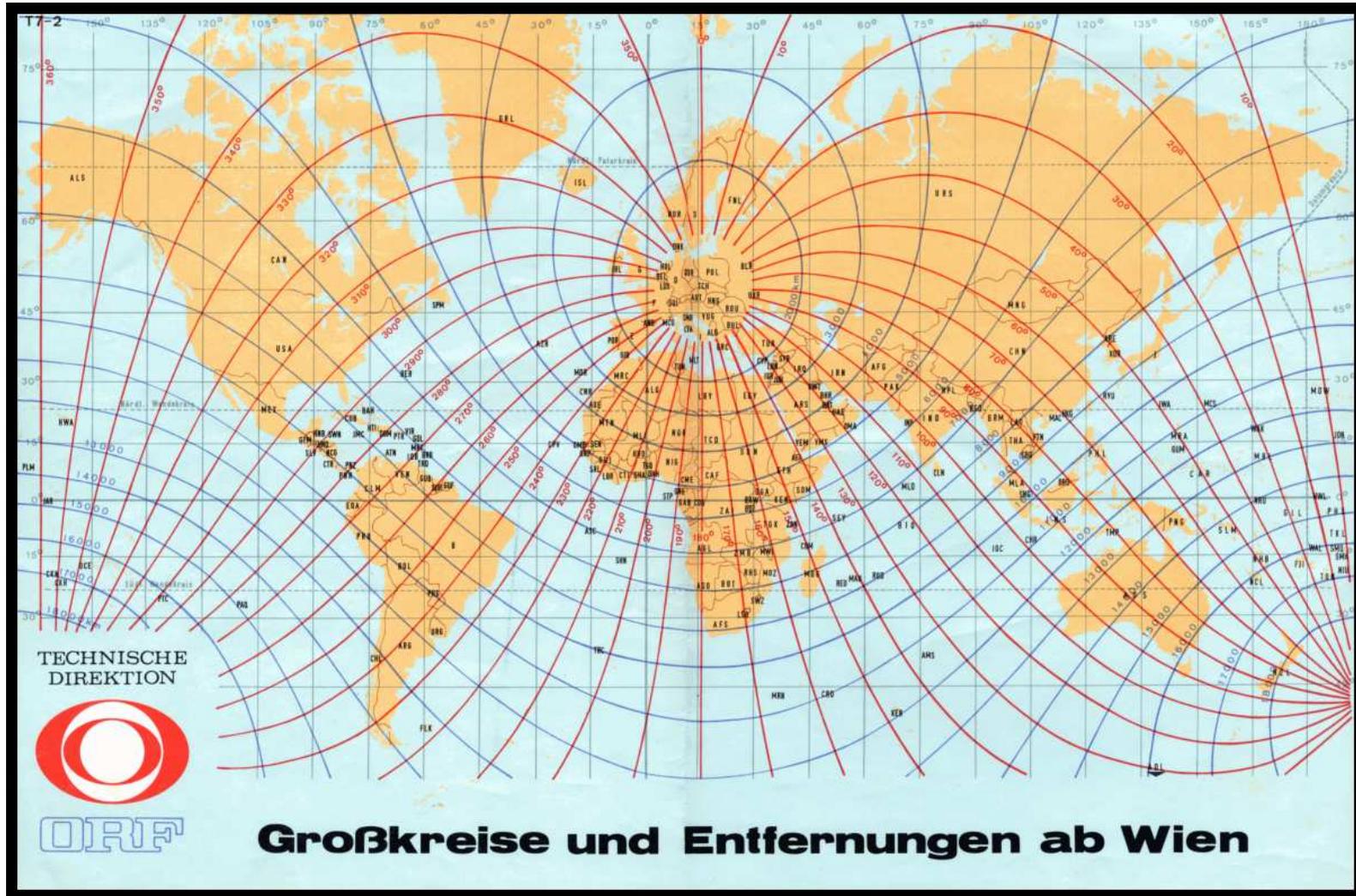
- Die mathematische Beschreibung ist aufwändig.
- Der Entwurf ist entlang des Äquators isometrisch.
- Zu den Polen hin wächst die Längenverzerrung auf den Meridianen und auf den Breitenkreisen über alle Grenzen. (Die beiden Werte sind in jedem Punkt gleich.)
- Das volle Kartenbild ist ein unbeschränkter Parallelstreifen.
- Loxodromen (konstanter Winkel gegen Norden) erscheinen geradlinig.

Winkeltreuer Zylinderentwurf

Bemerkungen:

- Anderer Name: [Entwurf von Mercator](#), nach Gerard De Kremer (1512–1594)
- Wird auch als [Seekarte](#) bezeichnet.
- Gestattet wegen der geradlinigen Darstellung der Loxodromen eine sehr einfache Navigation auf hoher See.

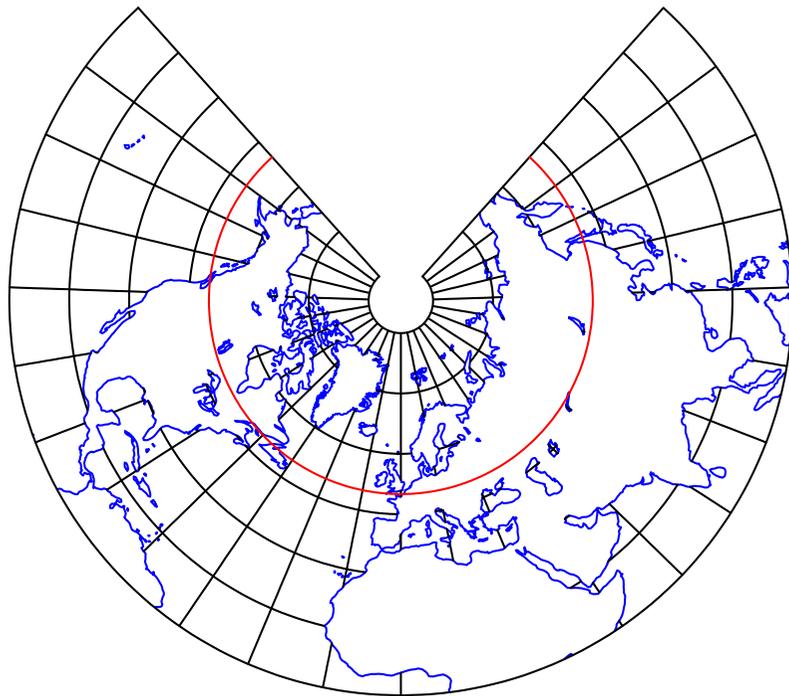
Funkmesskarte



Winkeltreuer (oder: **konformer**) Zylinderentwurf (ORF Kurzwellendienst, um 1971)

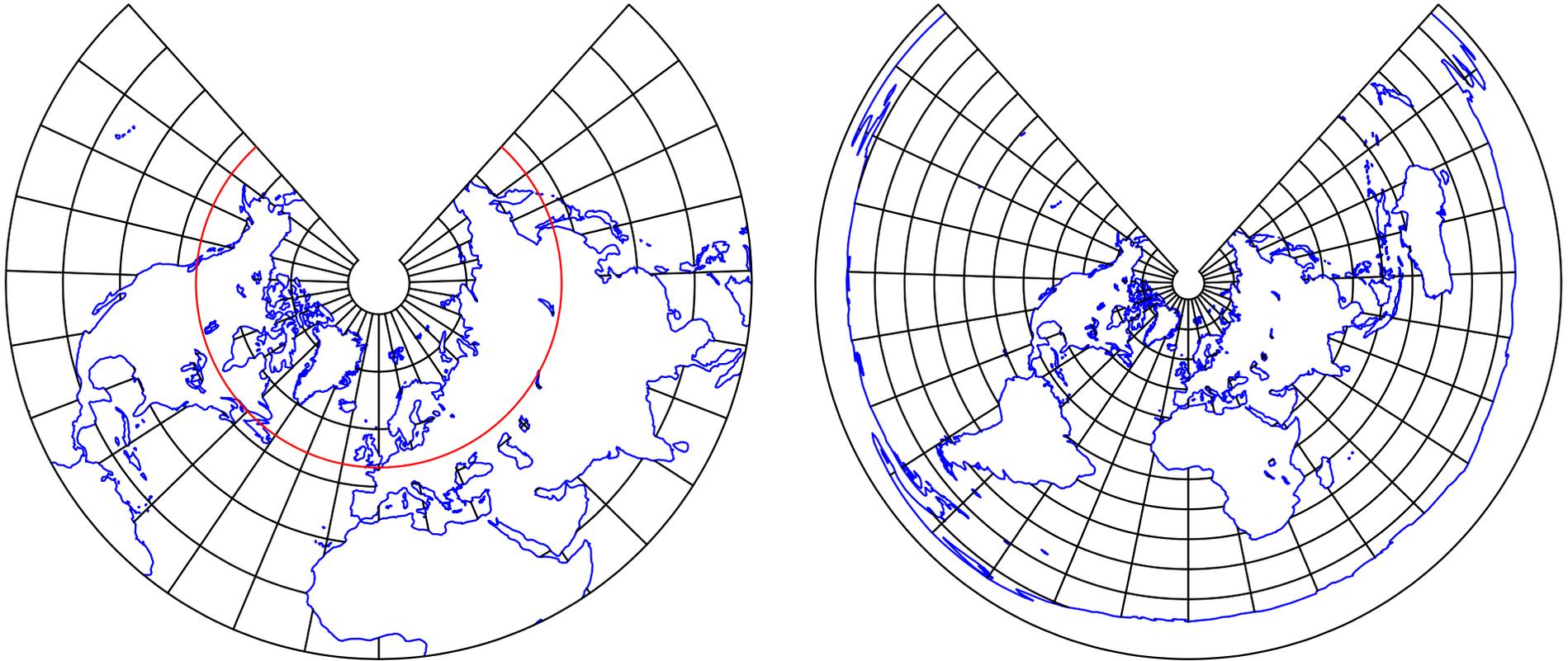
Kegeleentwürfe

Ersetzen wir den Berührzylinder entlang des Äquators durch einen berührenden Drehkegel entlang eines anderen Breitenkreises, so entsteht (in Analogie zu einem Zylinderentwurf) ein **Kegelentwurf**. Er besitzt die folgenden Eigenschaften:



- Orthogonales Gradnetz
- Der **Berührparallelkreis** erscheint in wahrer Länge.
- Zum Südpol hin wächst die Längenverzerrung der Breitenkreise über alle Grenzen.
- Der Südpol hat keinen Bildpunkt.
- Sprung am „Nahtmeridian“
- Die Situation im Nordpol hängt vom Entwurf ab.

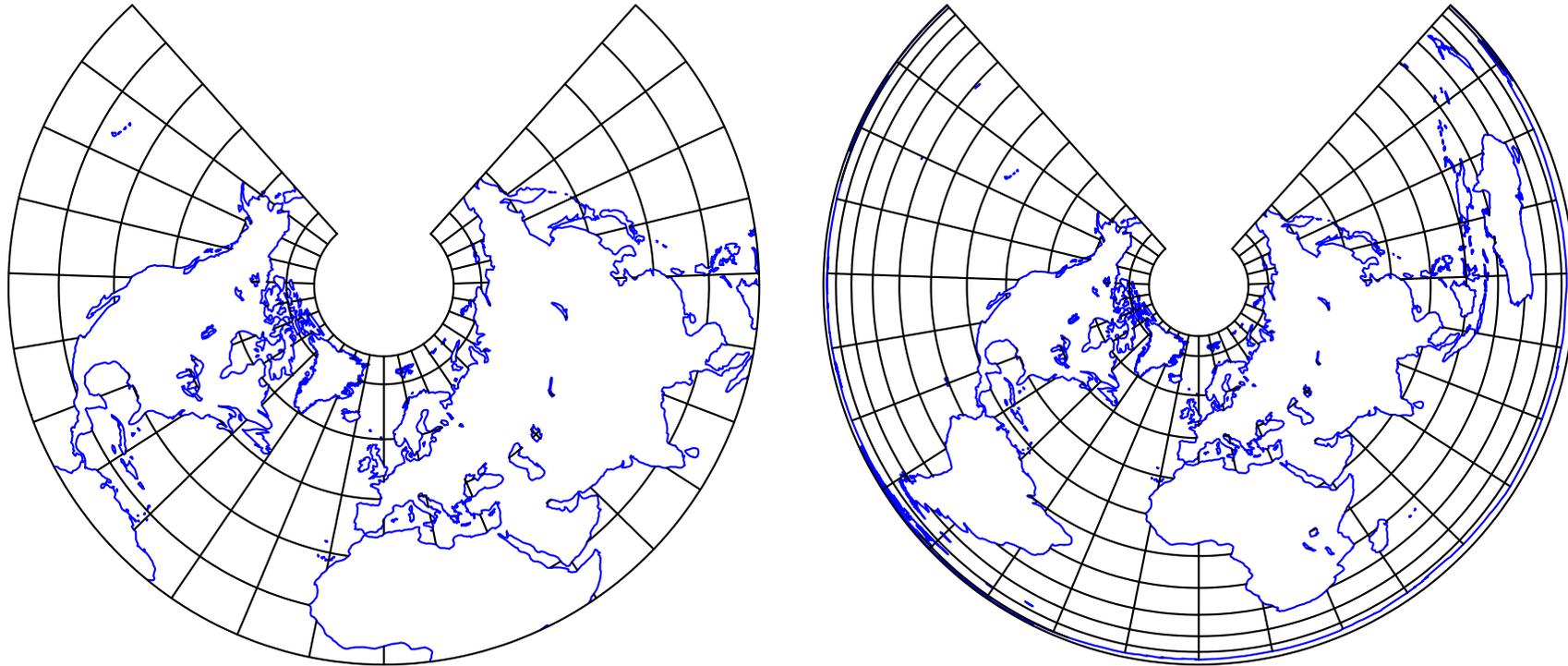
Abstandstreuer Kegellentwurf



Berührparallelkreis 50° N

- Alle Meridianhalbkreise erscheinen in wahrer Länge.
- Der Entwurf ist entlang des Berührparallelkreises isometrisch.
- Alle anderen Breitenkreise erscheinen zu lange.
- Der Nordpol hat kein Bild (Pollinie).

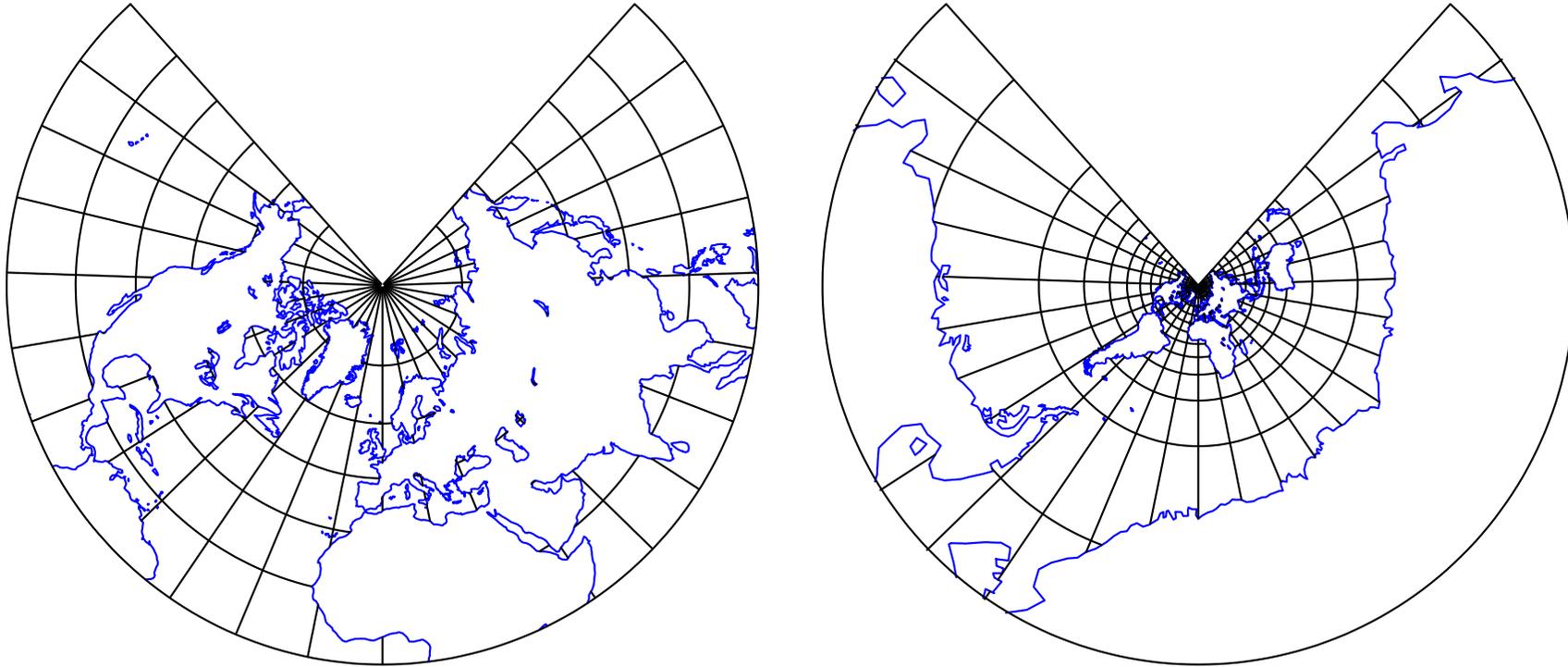
Flächentreuer Kegellentwurf



Berührparallelkreis 50° N

- Die mathematische Beschreibung ist aufwändig.
- Der Entwurf ist entlang des Berührparallelkreises isometrisch.
- Zu den Polen hin geht die Längenverzerrung auf den Meridianen gegen Null, jene auf den Breitenkreisen wächst aber über alle Grenzen. (Das Produkt der beiden Verzerrungen ist in jedem Punkt gleich 1.)
- Der Nordpol hat kein Bild (Pollinie).

Winkeltreuer Kegellentwurf

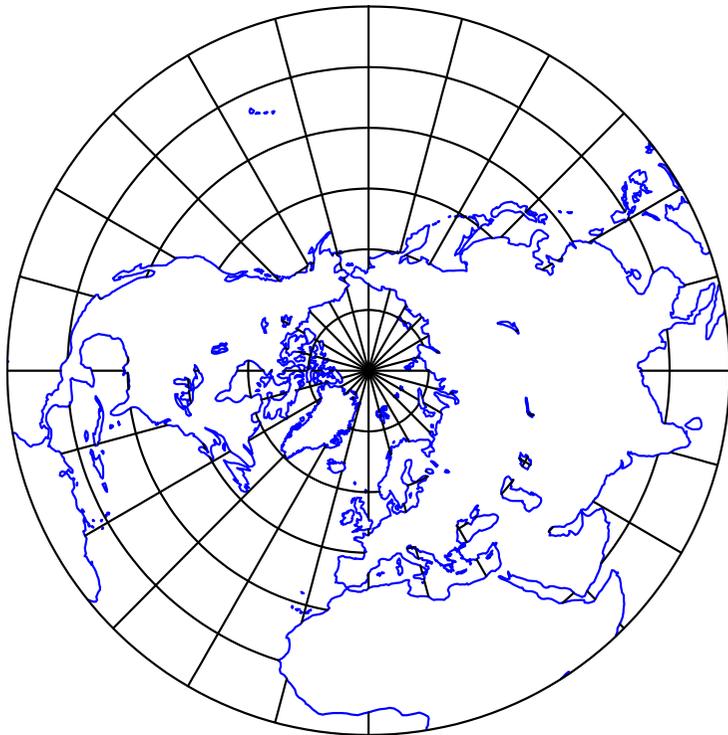


Berührparallelkreis 50° N

- Die mathematische Beschreibung ist aufwändig.
- Der Entwurf ist entlang des Berührparallelkreises isometrisch.
- Zu den Polen hin wächst die Längenverzerrung auf den Meridianen und Breitenkreisen über alle Grenzen. (Die beiden Werte sind in jedem Punkt gleich.)
- Der Nordpol hat einen Bildpunkt (Abwicklung der Kegelspitze).

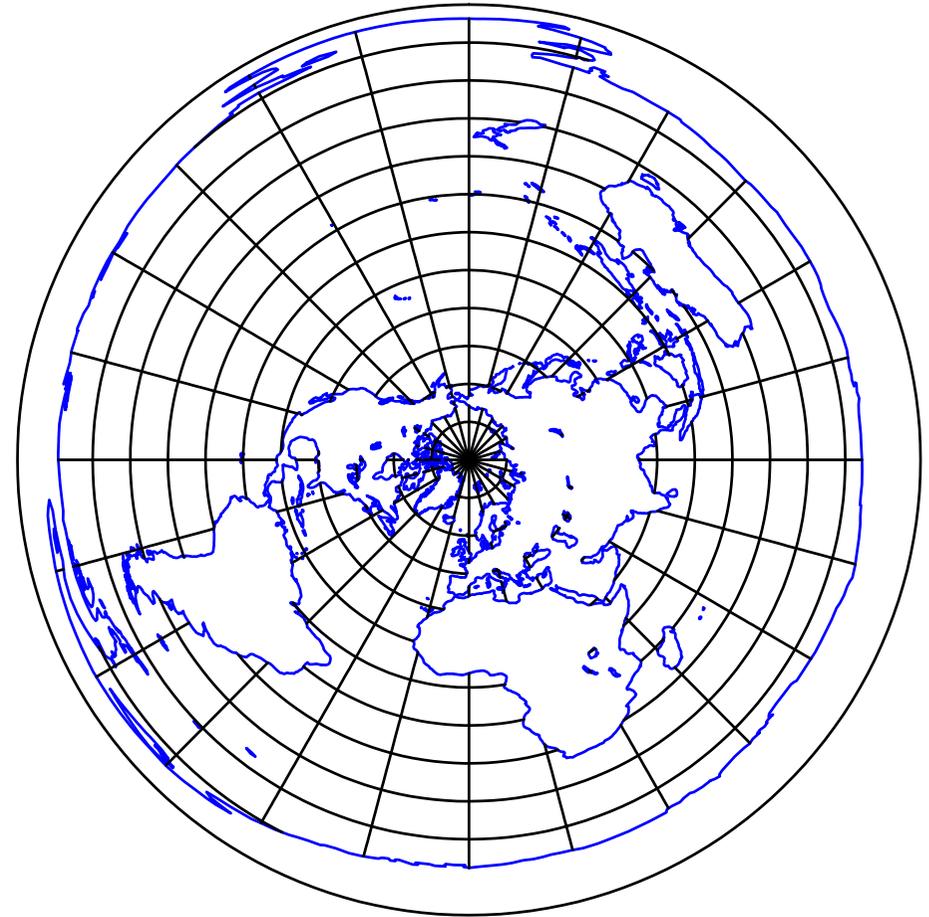
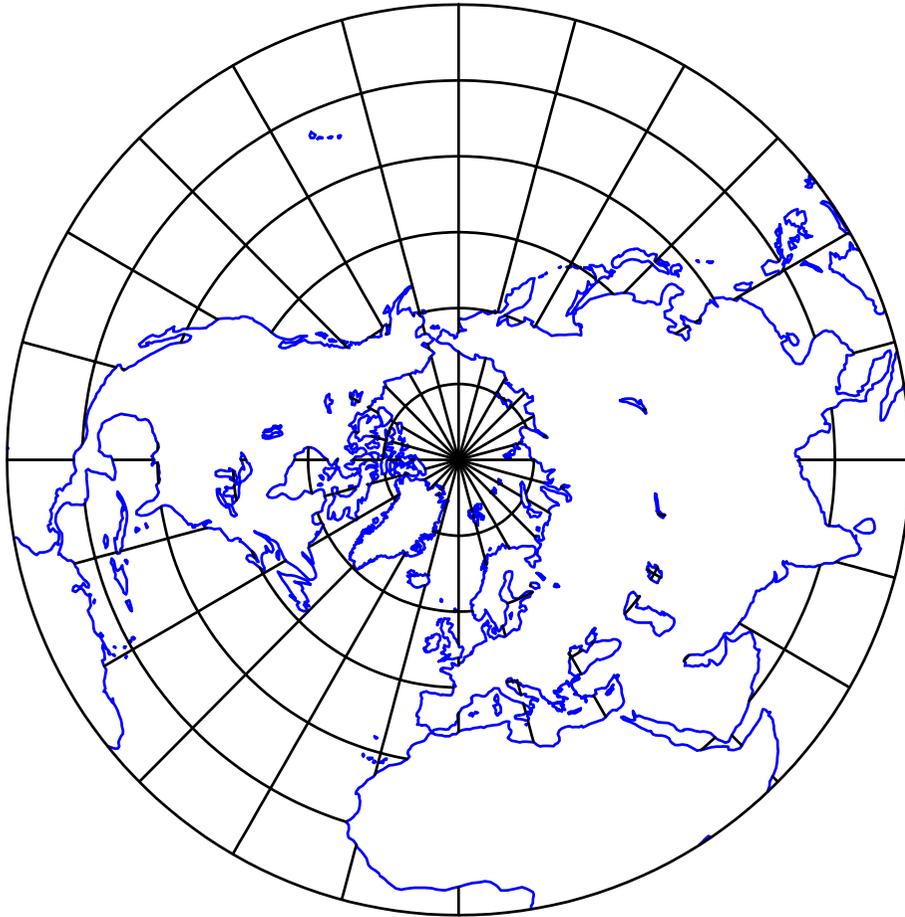
Azimutalentwürfe

Wandert der Berührparallelkreis in den Nordpol, so wird aus dem berührenden Drehkegel die Tangentialebene im Nordpol. An Stelle eines Kegelentwurfs erhalten wir nun einen **Azimutalentwurf**. Er besitzt die folgenden Eigenschaften:



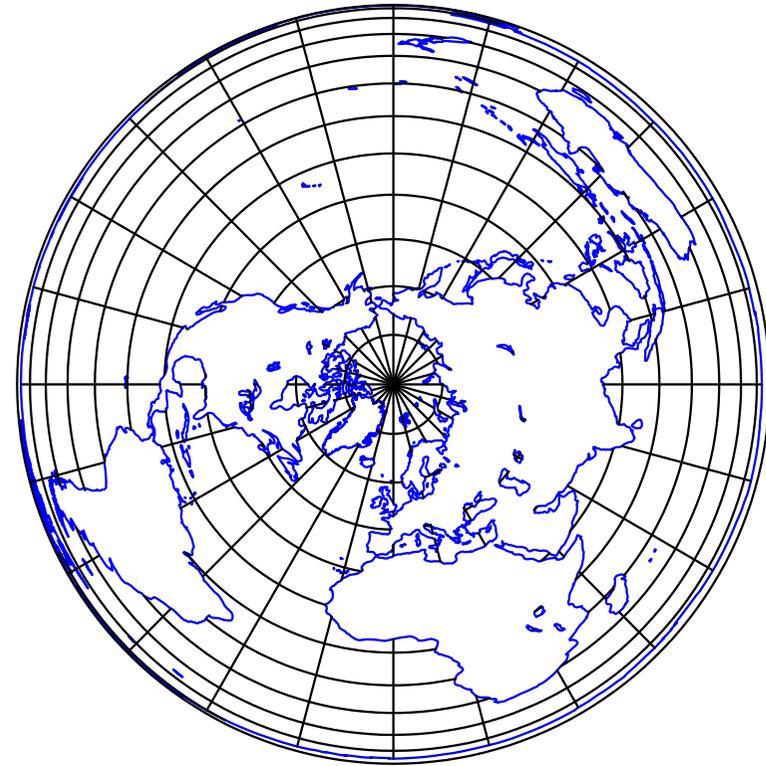
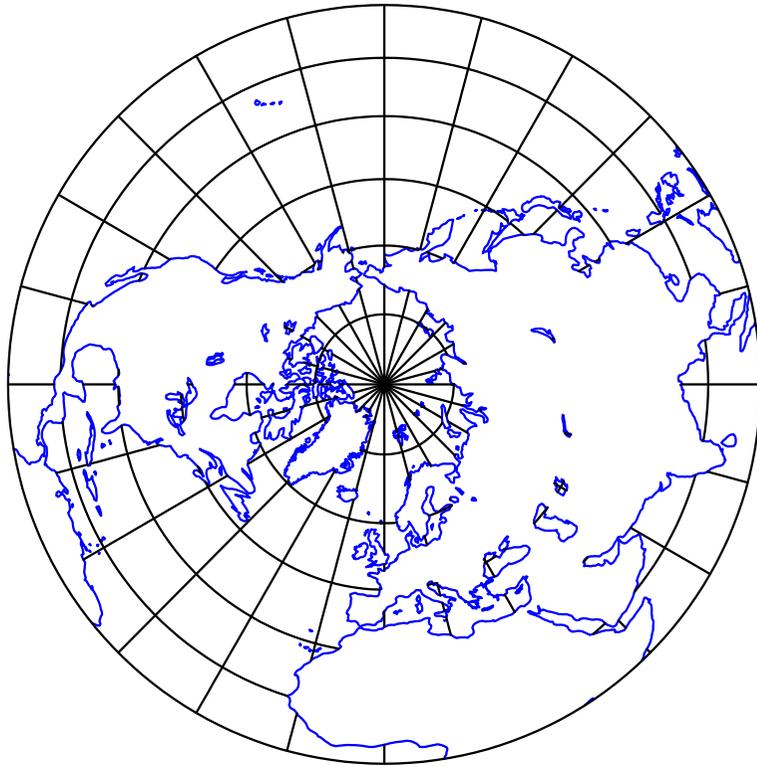
- Orthogonales Gradnetz
- Geographische Längen können (als Winkelmaß) sofort abgelesen werden.
- Der Entwurf ist im Nordpol erklärt und dort sogar winkeltreu.
- Zum Südpol hin wächst die Längenverzerrung der Breitenkreise über alle Grenzen.
- Der Südpol hat keinen Bildpunkt.
- Kein störender „Nahtmeridian“

Abstandstreuer Azimutalentwurf



- Alle Meridianhalbkreise erscheinen in wahrer Länge.
- Der Entwurf ist im Nordpol isometrisch.
- Alle Breitenkreise erscheinen zu lange.

Flächentreuer Azimutalentwurf



- Der Entwurf ist im Nordpol isometrisch.
- Zum Südpol hin geht die Längenverzerrungen auf den Meridianen gegen Null, jene auf den Breitenkreisen wächst aber über alle Grenzen. (Das Produkt der beiden Verzerrungen ist in jedem Punkt gleich 1.)
- Alle Breitenkreise erscheinen zu lange.

Flächentreuer Azimutalentwurf

Bemerkungen:

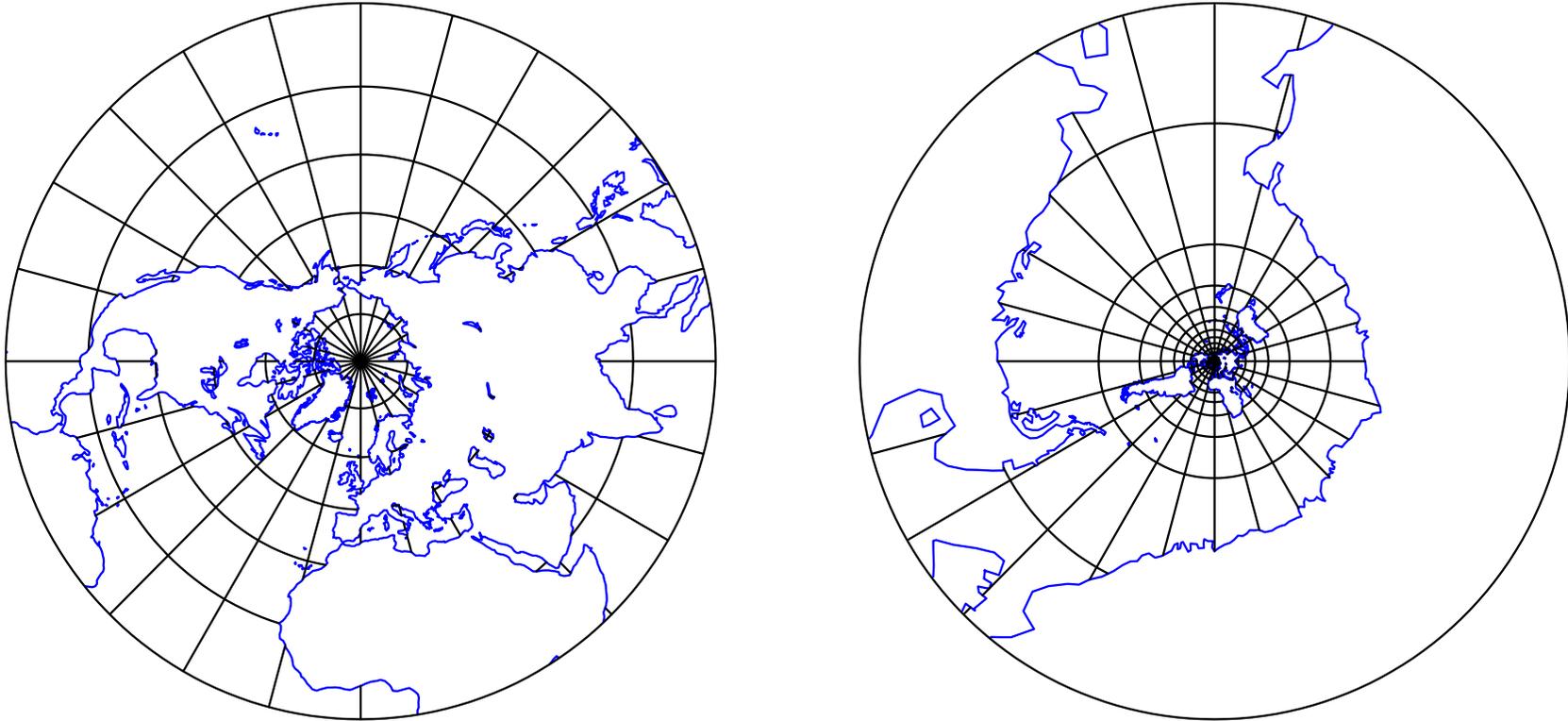
- Wird oft in Atlanten verwendet.
- Sehr gute Werte hinsichtlich der Abstandsverzerrung in der Umgebung des Nordpols:

Zwei Punkte mit dem sphärischen Abstand d haben im Bild – je nach ihrer Lage – einen Abstand λd mit λ zwischen folgenden Grenzen:

In der Kalotte bis 80°N	$0,9962 \leq \lambda \leq 1,0038$
In der Kalotte bis 70°N	$0,9848 \leq \lambda \leq 1,0154$

- Durch jeden Punkt gibt es zwei Richtungen mit Längenverzerrung 1.

Winkeltreuer Azimutalentwurf



- **Stereographische Projektion aus dem Südpol** auf die Tangentialebene im Nordpol
- Der Entwurf ist im Nordpol isometrisch.
- Zum Südpol hin wächst die Längenverzerrungen auf den Meridianen und den Breitenkreisen über alle Grenzen. (Die beiden Werte sind in jedem Punkt gleich.)
- Alle Breitenkreise erscheinen zu lange.
- Kreise gehen in Kreise oder Geraden über.

Winkeltreuer Azimutalentwurf

Bemerkungen:

- Kommt (als Projektion) schon bei Hipparchos (um 100 v. Chr.) vor. Die Kreistreue wurde aber erst im 13. Jahrhundert, die Winkeltreue erst im 16. Jahrhundert gefunden.
- Wird für drehbare Sternkarten verwendet, also zur Abbildung des [Himmelsglobus](#).
- Schlechtere Werte hinsichtlich der Abstandsverzerrung in der Umgebung des Nordpols im Vergleich zum flächentreuen Azimutalentwurf:

Zwei Punkte mit dem sphärischen Abstand d haben im Bild – je nach ihrer Lage – einen Abstand λd mit λ zwischen folgenden Grenzen:

In der Kalotte bis	Flächentreuer Entwurf	Winkeltreuer Entwurf
80°N	$0,9962 \leq \lambda \leq 1,0038$	$1,0000 < \lambda \leq 1,0077$
70°N	$0,9848 \leq \lambda \leq 1,0154$	$1,0000 < \lambda \leq 1,0311$
0°N	$0,7071 \leq \lambda \leq 1,4142$	$1,0000 < \lambda \leq 2,0000$

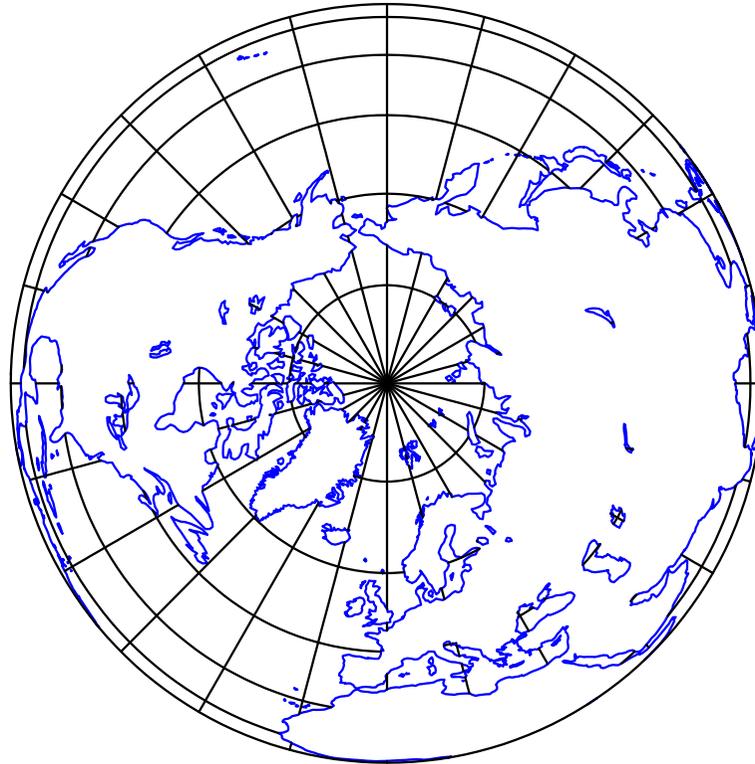
Bemerkung

Mit dem winkeltreuen Azimutalentwurf liegt in diesem Vortrag erstmalig ein Kartenentwurf vor, dem eine räumliche **Projektion** zu Grunde liegt. Das ist vom Standpunkt der Geometrie eine wichtige Eigenschaft.

Es stellt sich allerdings die Frage, ob dieses Wissen beim Betrachten der Karte hilfreich ist oder nicht.

Ein Kartenentwurf dient ja nicht dazu, die Lage der Erdkugel im Weltall zu illustrieren. Vielmehr soll er nur ein Bild der Erdoberfläche liefern.

Orthographische Projektion



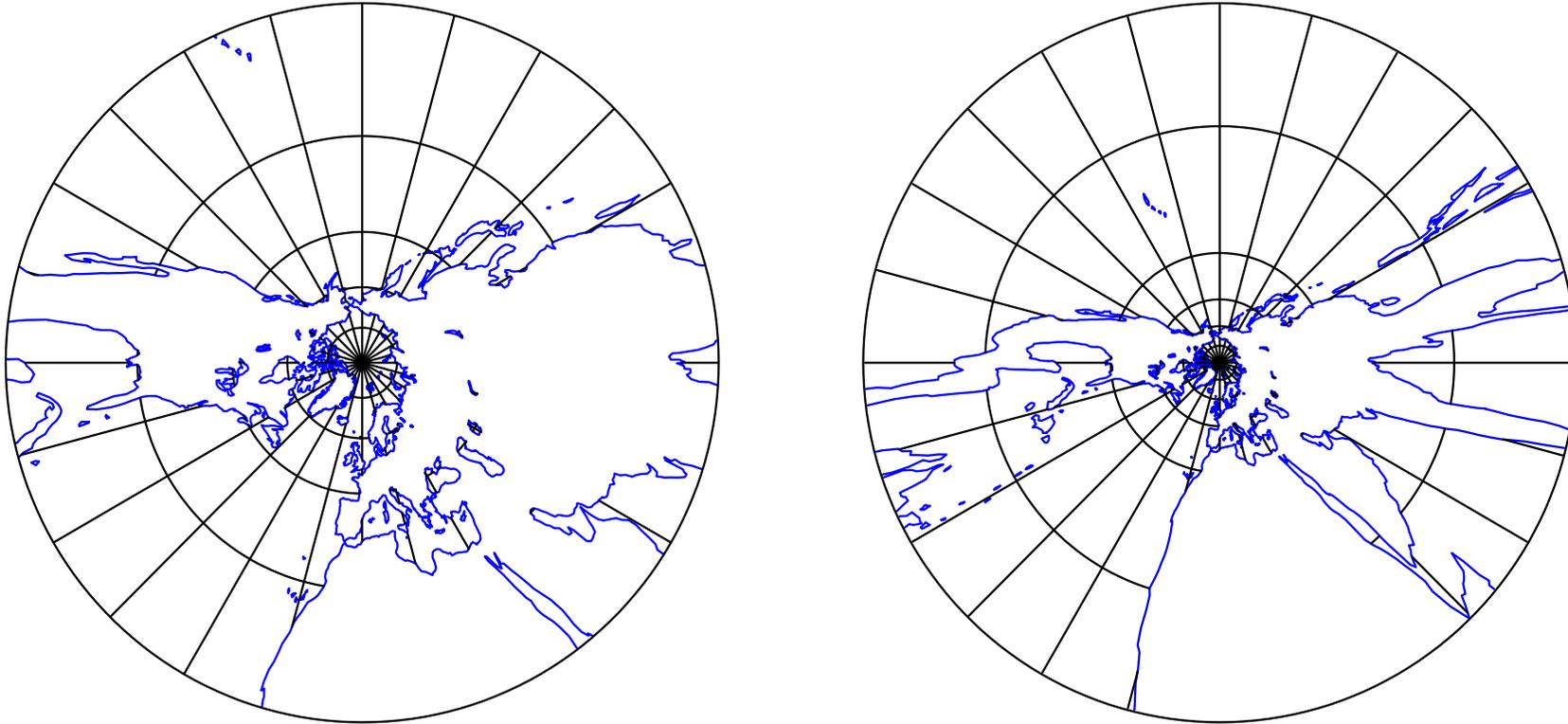
- **Projektion in Richtung der Erdachse** auf die Tangentialebene im Nordpol
- Der Entwurf ist im Nordpol isometrisch.
- Alle Breitenkreise erscheinen in wahrer Länge.
- Der Äquator ist eine natürliche Grenze der Abbildung.

Orthographische Projektion

Bemerkungen:

- Schon Thales (um 600 v. Chr.) zugeschrieben.
- Wird hauptsächlich für Darstellung der Erde im Raum verwendet.
- Tritt als **Mondkarte** auf, da sie (nahezu) dem Bild des von der Erde aus gesehenen Mondes entspricht.

Gnomonische Projektion



- **Projektion aus dem Mittelpunkt** der Erdkugel auf die Tangentialebene im Nordpol
- Der Entwurf ist im Nordpol isometrisch.
- Alle Breitenkreise erscheinen zu lange.
- Der Äquator ist eine (unerreichbare) natürliche Grenze.
- Großkreise gehen in Geraden über.

Gnomonische Projektion

Bemerkungen:

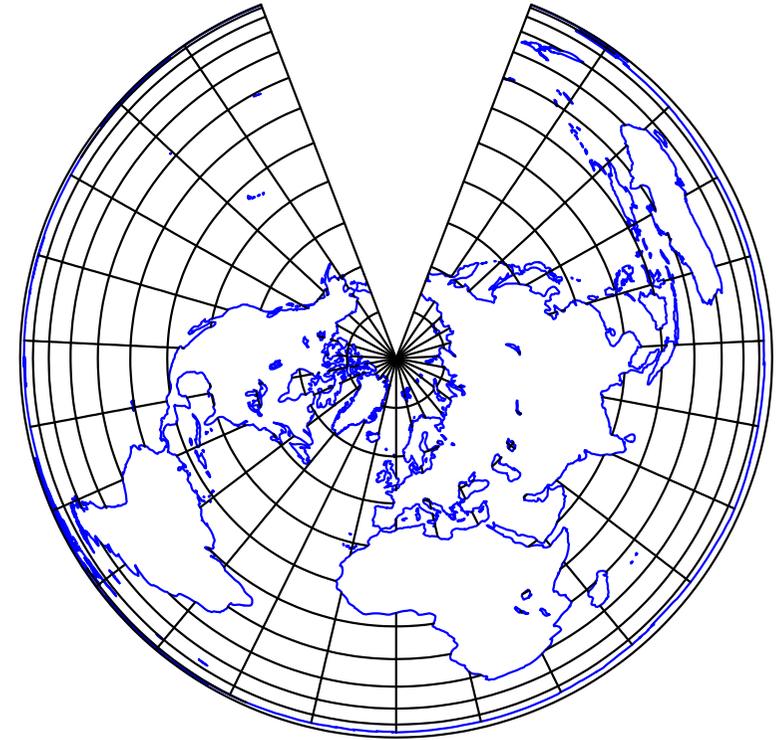
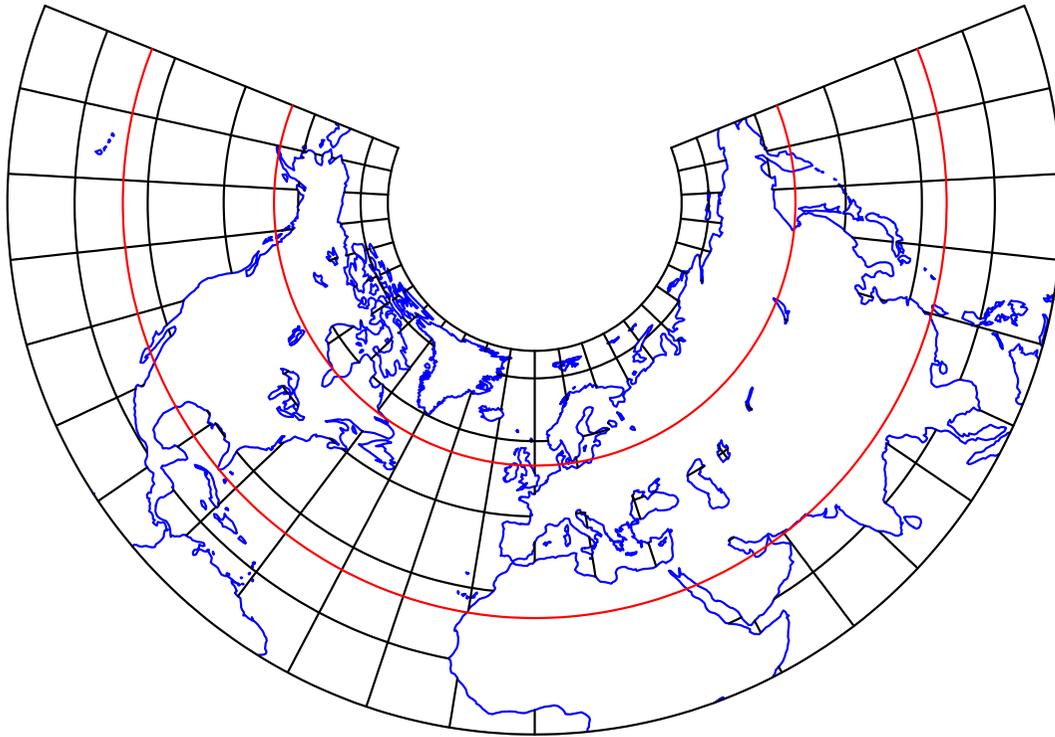
- Obwohl die Karte den kürzesten Weg zwischen je zwei Punkten der Nordhalbkugel als (verzerrte) Strecke erscheinen lässt, ist sie wegen der fehlenden Winkel-treue zur Navigation nicht unmittelbar geeignet.
- Kann als Hilfsmittel zur Konstruktion von Sonnenuhren verwendet werden.
- Hat große theoretische Bedeutung.

Ausblick

Im letzten Teil dieses Vortrages gehen wir ganz kurz auf die folgenden Themen ein:

- Einige weitere Kartenentwürfe
- Änderung der Entwurfsachse
- Über die Figuren
- Literaturhinweise

Allgemeine Kegellentwürfe



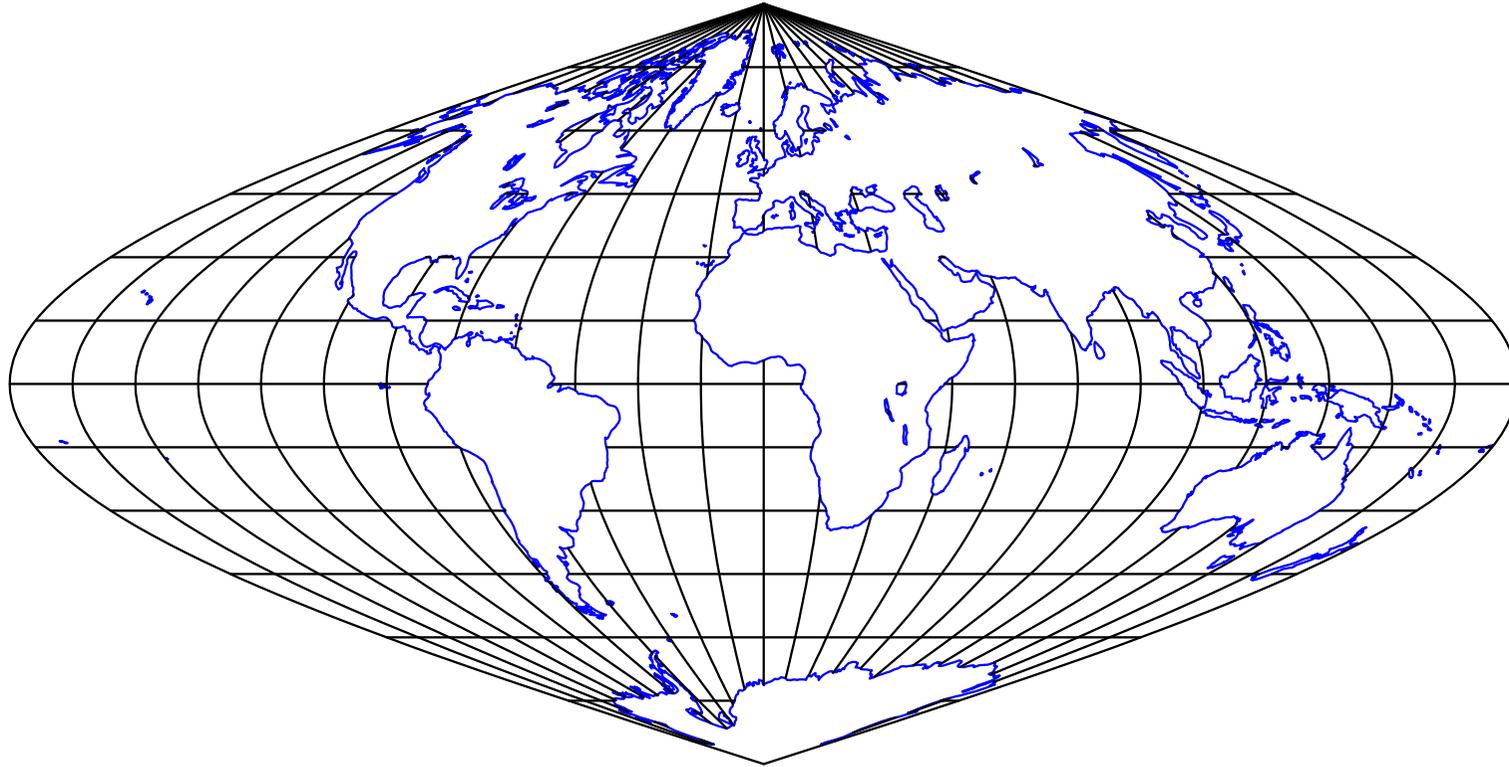
Flächentreue Kegellentwürfe mit **zwei längentreuen** Breitenkreisen:

links: 25° N und 55° N

rechts: 50° N und 90° N (als Grenzfall)

Der verwendete Drehkegel geht **nicht** durch die beiden Breitenkreise!

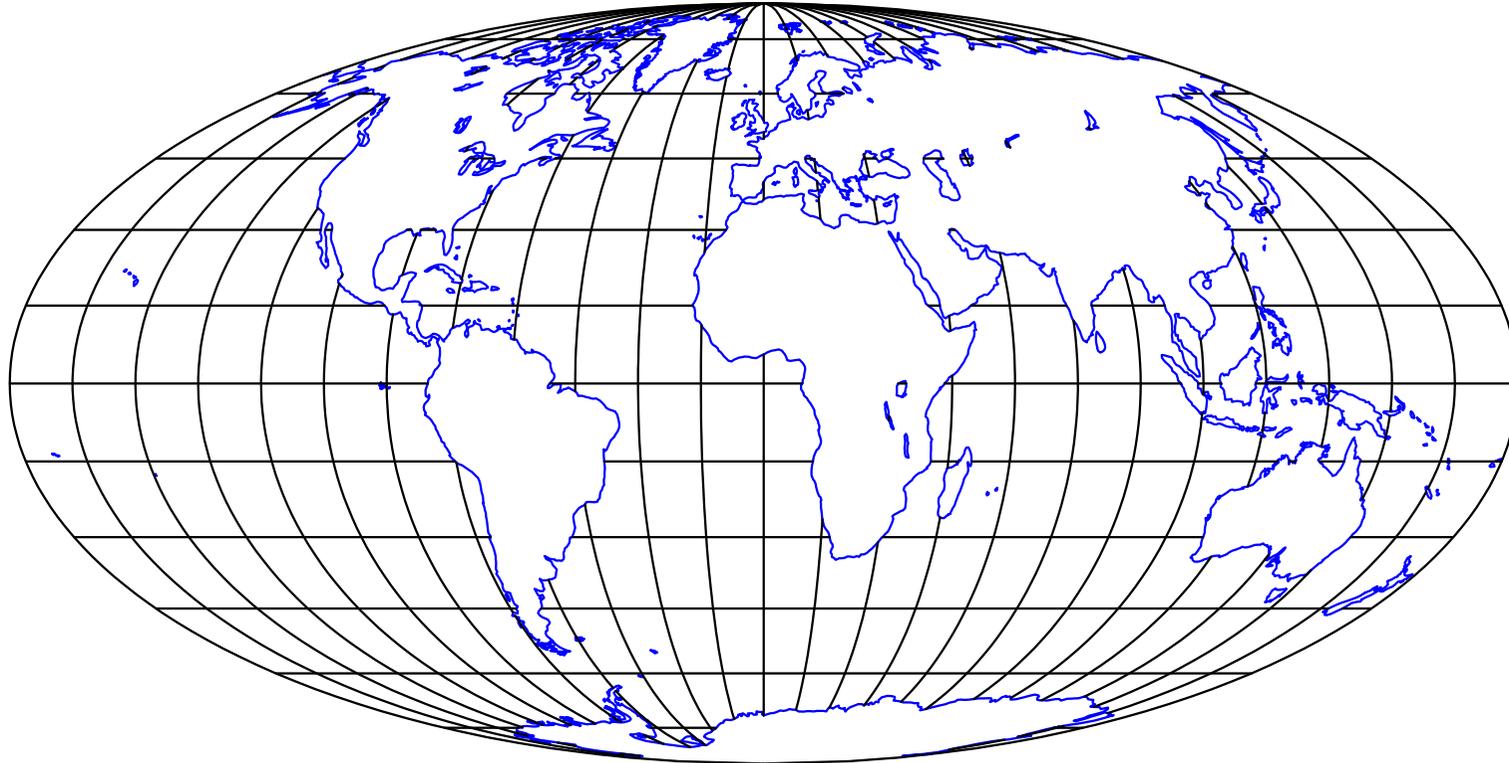
Entwurf von Sanson



- Alle Breitenkreise und der Nullmeridian erscheinen als Strecken in wahrer Länge
- Der Entwurf ist flächentreu.
- Störende Ecken in den Bildern der Pole
- Nicolas Sanson (1600-1667), John Flamsteed (1646 - 1719)

Ist ein Beispiel eines sogenannten **unechten Zylinderentwurfs**.

Entwurf von Mollweide



- Gradnetz besteht aus Ellipsen und Strecken
- Der Entwurf ist flächentreu.

Beispiel eines Entwurfs, der für eine Weltkarte brauchbar erscheint.

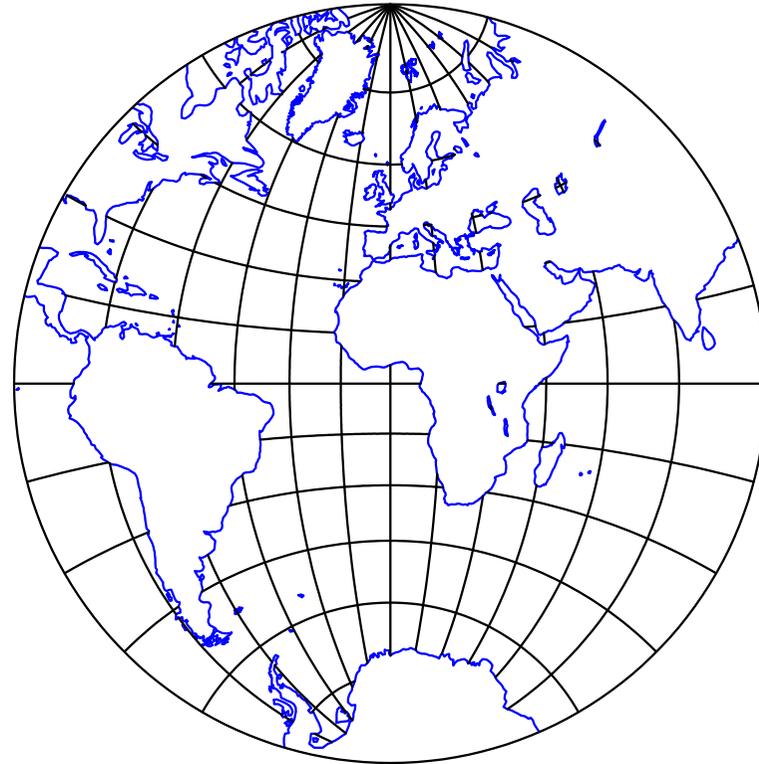
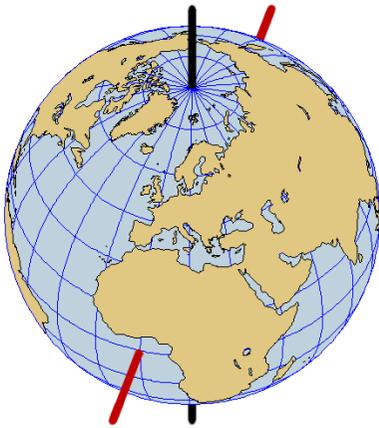
Entwurfsachse

In unseren bisherigen Beispielen spielt der Nordpol N eine ausgezeichnete Rolle, die aber ein beliebiger Punkt P der Erdoberfläche übernehmen kann.

Die Verbindungsgerade dieses Punktes P mit dem Mittelpunkt der Erde wird dann die **Entwurfsachse** genannt.

- **Normale Lage**: Erdachse = Entwurfsachse
- **Transversale Lage**: Entwurfsachse in der Ebene des Äquators
- **Schiefe Lage**: sonst

Transversale Entwurfsachse



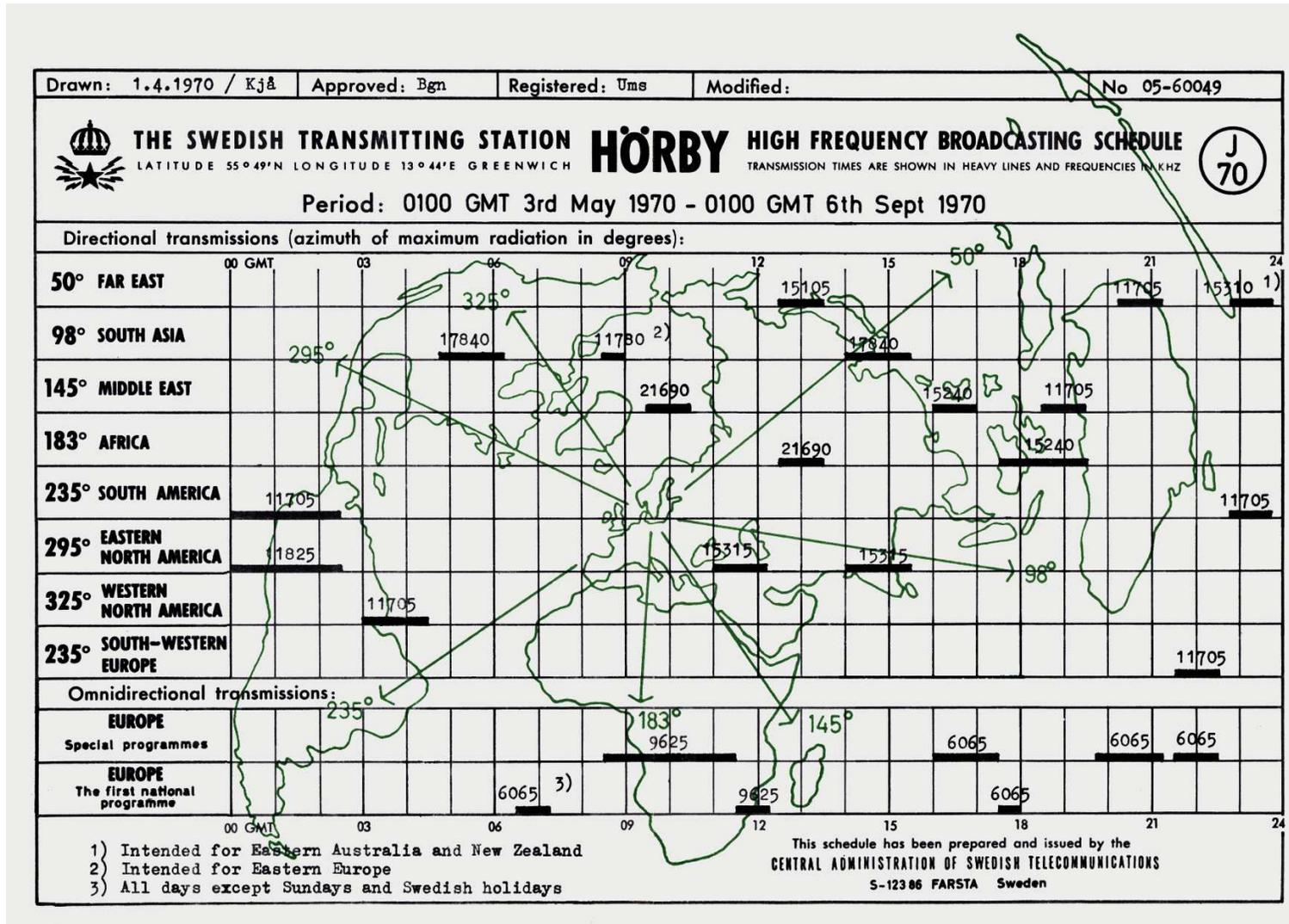
Stereographische Projektion mit transversaler Entwurfsachse (in der Äquatorebene)

Schiefe Entwurfsachse



Abstandstreuer Azimutalentwurf mit (schiefer) Entwurfsachse durch Wien

Funkmesskarte



Abstandstreuer Azimutalentwurf mit Entwurfsachse durch Hörby, Schweden

Globularentwurf



Diese Weltkarte von Willem Blaeuw (1606) hat keine besonderen mathematischen Eigenschaften, aber ihr Gradnetz kann mit Zirkel und Lineal leicht gezeichnet werden.

Über die Figuren

Die meisten Figuren dieser Präsentation wurden mit einem in den Jahren 1987 bis 1994 vom Vortragenden selbst erstellten Programm erstellt.

Basis ist dabei eine [Liste von Punkten](#), welche die Umrise der Kontinente annähern. Diese Liste wurde mit Hilfe eines Digitalisieretabletts generiert und erfüllt keine hohen Ansprüche hinsichtlich der Genauigkeit.

Einige Zeilen dieser Liste sehen im Original etwa so aus:

```
B,lofoten vor norwegen   OK
A,      11.79      67.85
P,      12.78      68.24
P,      13.84      68.47
P,      12.31      68.42
P,      11.79      67.85
A,      14.39      69.43
```

Literaturhinweise

- [1] F. Hohenberg: *Konstruktive Geometrie in der Technik*, 3. Aufl., Wien New York, Springer, 1966.
- [2] J. Hoschek: *Mathematische Grundlagen der Kartographie*, 2. Aufl., Mannheim Wien Zürich, BI-Wissenschaftsverlag, 1984.
- [3] E. Müller, E. Kruppa: *Lehrbuch der darstellenden Geometrie*, 6. Aufl., Springer, Wien, 1961.
- [4] G. Sammet: *Der Vermessene Planet*, Gruner + Jahr, Hamburg, 1990.
- [5] K. Strubecker, G. Scheffers: *Wie findet und zeichnet man Gradnetze von Land- und Sternkarten?*, 2. Aufl., Stuttgart, Teubner, 1956.

Eigene Seiten im Internet

- www.geometrie.tuwien.ac.at/karto/

Picture Gallery of Map Projections, in englischer Sprache. Die Figuren sind alle in Deutsch beschriftet, aber zum Ausdrucken ungeeignet.

- www.geometrie.tuwien.ac.at/havlicek/karten.html

Kurze Zusammenfassung meiner Vorlesungen, in englischer Sprache.

- www.geometrie.tuwien.ac.at/havlicek/publications.html

Unter der Überschrift *Lecture Notes*: Formelsammlung Kartenentwürfe (PDF) mit vielen Illustrationen.

- www.geometrie.tuwien.ac.at/havlicek/talks.html

Diese und andere Präsentationen (PDF)