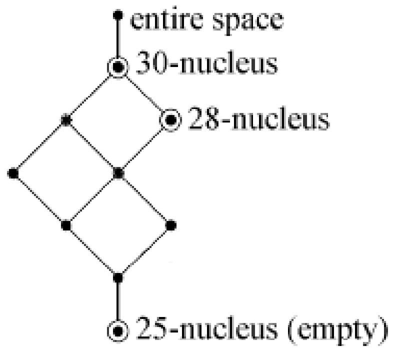
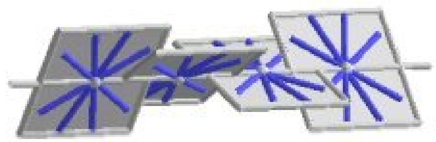
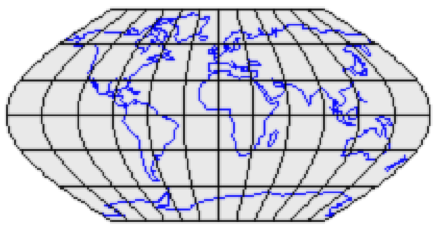
Geometrie: Strukturen oder Figuren?

Hans Havlicek

Institut für Geometrie, Technische Universität Wien

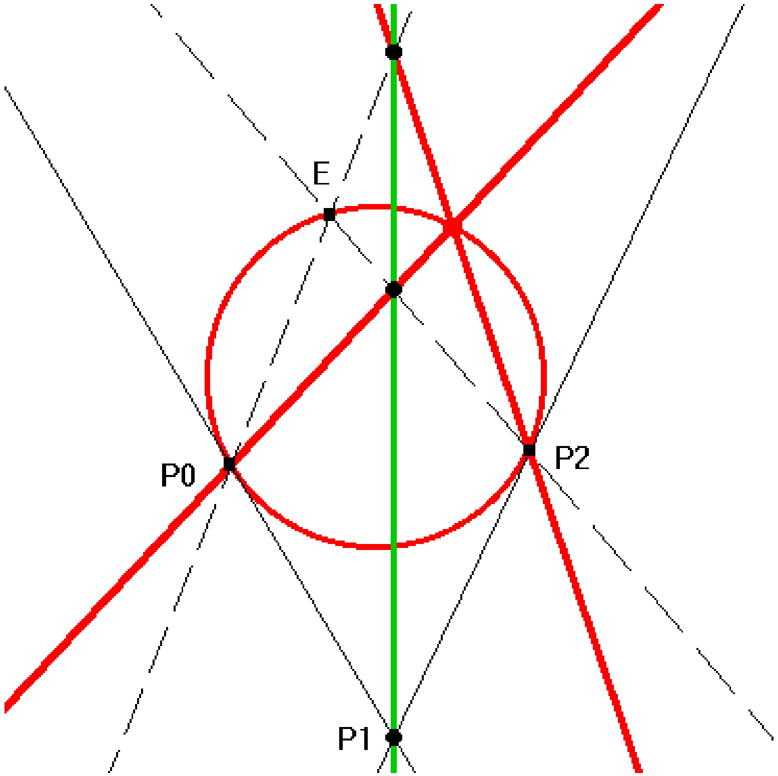






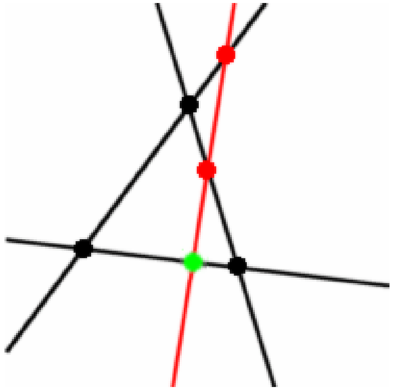
Wien, 2. April 2001

Der Peripheriewinkelsatz



Die Axiome eines projektiven Raumes

Es sei $\mathcal{P}$ eine Menge von *Punkten* und $\mathcal{L} \subset 2^{\mathcal{P}}$ eine Menge von *Geraden*. $(\mathcal{P}, \mathcal{L})$ heißt ein *projektiver Raum*, falls gilt:



- Je zwei verschiedene Punkte haben genau eine Verbindungsgerade.
- Planaritätsaxiom von Veblen und Young.
- Jede Gerade trägt mindestens drei verschiedene Punkte.

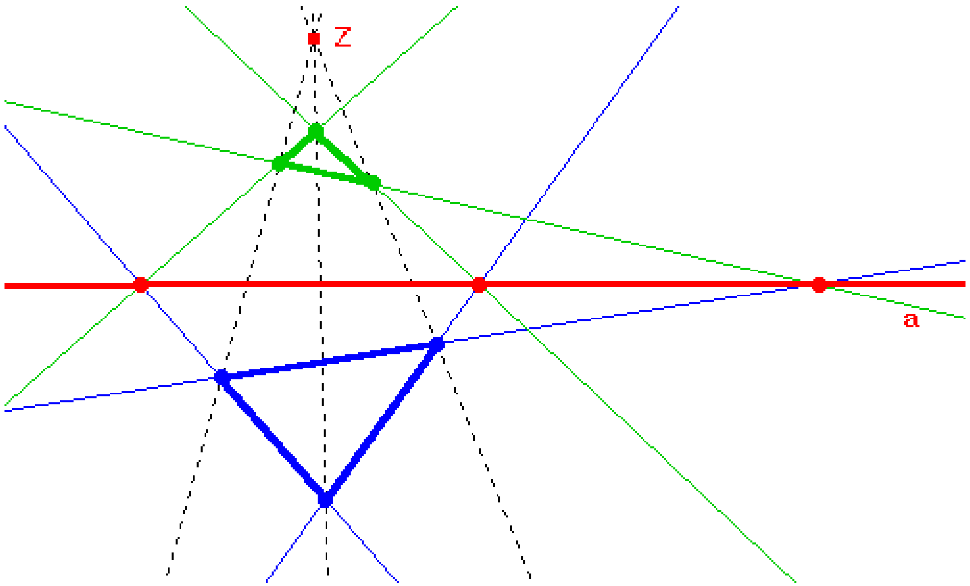
Beispiele projektiver Räume

Satz. *Jeder Vektorraum V (über einem Schiefkörper F) bestimmt folgendermaßen einen projektiven Raum:*

$\mathcal{P}$ sei die Menge der eindimensionalen Unterräume von V.
$\mathcal{L}$ sei die Menge der zweidimensionalen Unterräume von V.

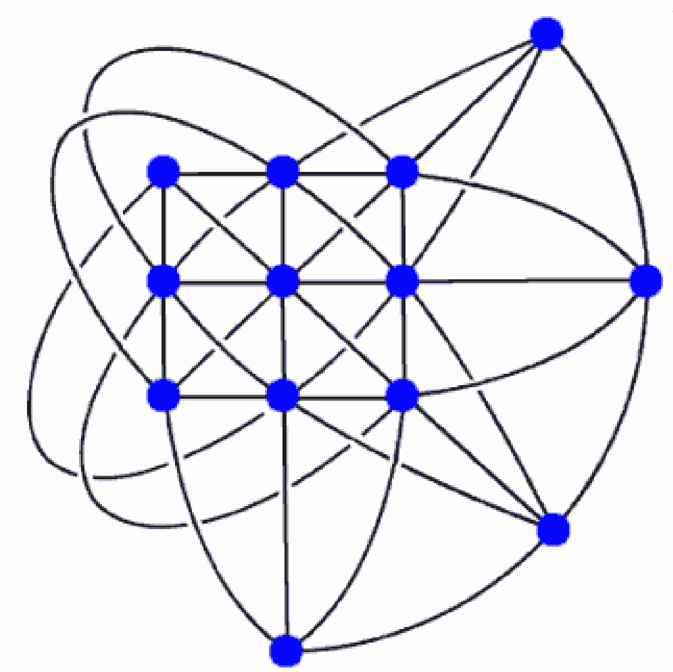
Satz. *Jeder mindestens dreidimensionale projektive Raum ist isomorph zu einem projektiven Raum über einem Vektorraum.*

Axiom bzw. Satz von Desargues

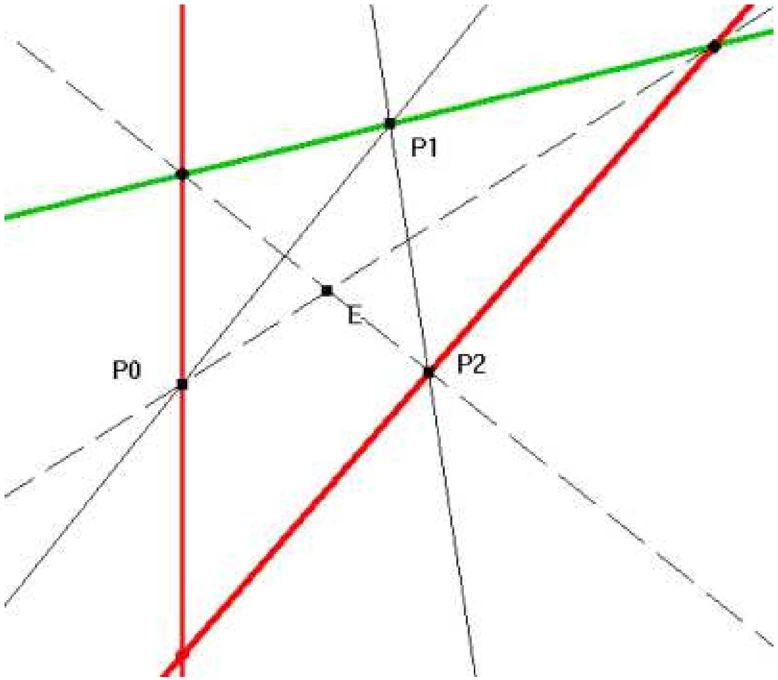


G. DESARGUES (1648).
D. HILBERT (1899) → *Theorie der nichtdesarguesschen projektiven Ebenen*.

Projektive Ebene über $\mathrm{GF}(3)$



Kegelschnittsdefinition nach Krüger



W. Krüger (1968), J. Steiner (1832).

Definition eines Ovals

Eine Punktmenge $\mathcal{O}$ einer projektiven Ebene heißt ein *Oval*, falls gilt:

- Jede Gerade trifft $\mathcal{O}$ in höchstens zwei Punkten.
- In jedem Punkt $X \in \mathcal{O}$ existiert genau eine *Tangente*; das ist eine Gerade t_X mit $t_X \cap \mathcal{O} = \{X\}$.

Fragestellungen

1. Ist jeder Kegelschnitt ein Oval?

Fragestellungen

1. Ist jeder Kegelschnitt ein Oval?

2. In welchen projektiven Ebenen ist jeder Kegelschnitt ein Oval?

Fragestellungen

1. Ist jeder Kegelschnitt ein Oval?

2. In welchen projektiven Ebenen ist jeder Kegelschnitt ein Oval?

3. Ist jedes Oval ein Kegelschnitt?

Fragestellungen

1. Ist jeder Kegelschnitt ein Oval?

2. In welchen projektiven Ebenen ist jeder Kegelschnitt ein Oval?

3. Ist jedes Oval ein Kegelschnitt?

4. In welchen projektiven Ebenen ist jedes Oval ein Kegelschnitt?

Parametrisierung eines Kegelschnitts

Projektiv (alle Punkte werden erfaßt):

$$F(x_0, x_1, x_2) = F(1, t, t^2) \text{ mit } t \in F \cup \{\infty\}$$

Parametrisierung eines Kegelschnitts

Projektiv (alle Punkte werden erfaßt):

$$F(x_0, x_1, x_2) = F(1, t, t^2) \text{ mit } t \in F \cup \{\infty\}$$

Affin (mit Ferngerade $x_0 = 0$): *Parabel* ($+$ ein unendlichferner Punkt)

$$(x_1, x_2) = (t, t^2) \text{ mit } t \in F$$

Parametrisierung eines Kegelschnitts

Projektiv (alle Punkte werden erfaßt):

$$F(x_0, x_1, x_2) = F(1, t, t^2) \text{ mit } t \in F \cup \{\infty\}$$

Affin (mit Ferngerade $x_0 = 0$): *Parabel* (+ ein unendlichferner Punkt)

$$(x_1, x_2) = (t, t^2) \text{ mit } t \in F$$

Affin (mit Ferngerade $x_1 = 0$): *Hyperbel* (+ zwei unendlichferne Punkte)

$$(x_0, x_2) = (t^{-1}, t) \text{ mit } t \in F \setminus \{0\}$$

Kollineare Punkte eines Kegelschnitts

Satz. *Drei verschiedene Punkte*

$$F(1,t,t^2),\ F(1,u,u^2),\ F(1,v,v^2)\ \textit{mit}\ t,\ u,\ v \in F \cup \{\infty\}$$

sind genau dann kollinear, falls t, u, v drei verschiedene Elemente derselben Konjugiertenklasse von F sind.

$\longrightarrow$ *Nullstellen von Polynomen über Schiefkörpern*,
B. Gordon und T.S. Motzkin (1966).

$\longrightarrow$ *Eigenwerte von Matrizen über Schiefkörpern*,
P.M. Cohn (1977), R. Riesinger (1982).

Antwort

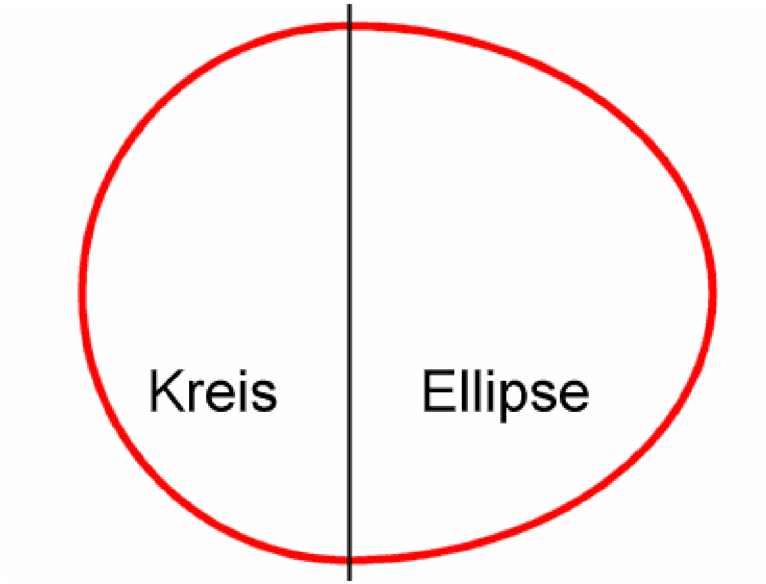
Satz. *In einer projektiven Ebene über einem echten Schiefkörper ist ein Kegelschnitt niemals ein Oval.*

B. Segre (1962), E. Berz (1962).

Satz. *In einer projektiven Ebene über einem kommutativen Körper ist jeder Kegelschnitt ein Oval.*

Beispiel

In der reellen projektiven Ebene gibt es Ovale, die keine Kegelschnitte sind, z.B.:



Ovale in unendlichen Ebenen

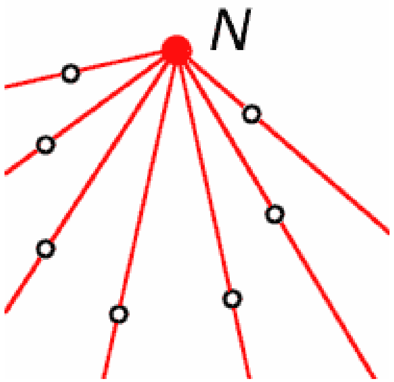
Satz. *In jeder unendlichen desarguesschen projektiven Ebene gibt es (massenhaft) Ovale, die keine Kegelschnitte sind.*

S. Mazurkiewicz (1914), A. Barlotti (1967), K. Strambach (1995).

Ovale in unendlichen Ebenen

Satz. *In jeder unendlichen desarguesschen projektiven Ebene gibt es (massenhaft) Ovale, die keine Kegelschnitte sind.*

S. Mazurkiewicz (1914), A. Barlotti (1967), K. Strambach (1995).
Beweisidee: Konstruiere mit transfiniter Induktion eine Menge $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}$ so, daß jede Gerade die Menge $\mathcal{M}$ in genau zwei Punkten trifft (2-*Menge*).
Wähle einen Punkt $N \in \mathcal{M}$. Dann ist



$$\mathcal{O} := \mathcal{M} \setminus \{N\}$$

ein Oval, bei dem alle Tangenten durch N gehen. Bei „geeigneter“ Wahl von $\mathcal{M}$ ist $\mathcal{O}$ kein Kegelschnitt.

Satz von Buchanan

Satz. *In der komplexen projektiven Ebene ist jedes (topologisch) abgeschlossene Oval $\mathcal{O}$ ein Kegelschnitt.*

T. Buchanan (1979).

Satz von Buchanan

Satz. *In der komplexen projektiven Ebene ist jedes (topologisch) abgeschlossene Oval $\mathcal{O}$ ein Kegelschnitt.*

T. Buchanan (1979).

Beweisidee: $\mathcal{O}$ läßt sich (bis auf einen Punkt) als Graph schreiben, etwa

$$\mathcal{O} = \{\mathbb{C}(1, t, f(t)) \mid t \in \mathbb{C}\} \cup \{\mathbb{C}(0, 0, 1)\}.$$

Die Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ erweist sich zunächst als ganze Funktion. Mit funktionentheoretischen Methoden folgt dann $f(t) = t^2$.

Satz von B. Segre

Satz. *In einer projektiven Ebene über* $\mathrm{GF}(q)$, q *ungerade, ist jedes Oval ein Kegelschnitt.*

B. Segre (1955), schon 1949 vermutet von P. Kustaanheimo.

Satz von B. Segre

Satz. *In einer projektiven Ebene über* $\mathrm{GF}(q)$, q *ungerade, ist jedes Oval ein Kegelschnitt.*

B. Segre (1955), schon 1949 vermutet von P. Kustaanheimo.

Beweisidee: Geometrische Überlegungen sowie die Eigenschaft

$$\prod_{\substack{x \in \mathrm{GF}(q),\\ x \neq 0}} x = -1.$$

Charakteristik 2

Satz. *In einer projektiven Ebene über einem kommutativen Körper der Charakteristik 2 gehen alle Tangenten eines Kegelschnitts durch einen Punkt.*

Affin: Alle Tangenten einer Parabel sind parallel.

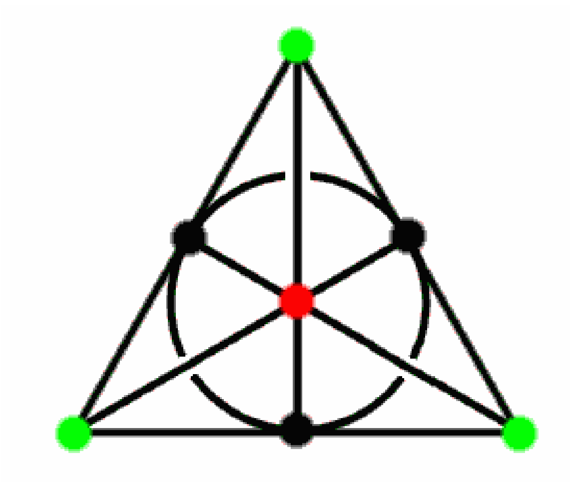
Satz. *In der projektiven Ebene über $\mathrm{GF}(2^h)$ gehen alle Tangenten eines Ovals durch einen Punkt.*

B. QVIST (1952).

Man spricht vom *Knoten* eines Ovals und nennt ein um seinen Knoten vermehrtes Oval auch ein *Hyperoval*.

Beispiel

Ein Kegelschnitt in der projektiven Ebene über $\mathrm{GF}(2)$:



Grün: Punkte des Kegelschnitts.
Rot: Knoten.

Beispiele von Ovalen

Satz. *In der projektiven Ebene über* $\mathrm{GF}(2^h)$, *sei ein Oval* $\mathcal{O}$ *mit Knoten* N *gegeben.*
Entfernt man aus $\mathcal{O}$ *einen beliebigen Punkt und fügt man den Knoten* N *zur Restmenge hinzu, so erhält man ein Oval* $\mathcal{O}'$.
Ist $h > 2$ *und* $\mathcal{O}$ *ein Kegelschnitt, so ist das Oval* $\mathcal{O}'$ *kein Kegelschnitt.*

$\longrightarrow$ *Theorie der Ovale und Hyperovale*.

Punktmengen und lineare Codes

Satz. *Es besteht — bis auf projektive bzw. Code-Äquivalenz — eine Bijektion zwischen den n-elementigen erzeugenden Punktmengen im $(k-1)$-dimensionalen projektiven Raum über $F := \mathrm{GF}(q)$ und den linearen $[n,k]_q$-Codes.*

Punktmengen und lineare Codes

Satz. *Es besteht — bis auf projektive bzw. Code-Äquivalenz — eine Bijektion zwischen den n-elementigen erzeugenden Punktmengen im $(k-1)$-dimensionalen projektiven Raum über $F := \mathrm{GF}(q)$ und den linearen $[n,k]_q$-Codes.*

Beweisidee: Sei $p_1, p_2, \ldots, p_n$ ein Erzeugendensystem eines k-dimensionalen Vektorraumes V über $F := \mathrm{GF}(q)$. Dann ist das Bild der linearen Abbildung

$$V^* \longrightarrow F^n : a^* \mapsto (a^*(p_1), a^*(p_2), \ldots, a^*(p_n))$$

ein linearer $[n,k]_q$-Code.

Für $V = F^{k\times 1}$ ist $\big(p_1, p_2, \ldots, p_n\big)$ eine Generatormatrix von C.

Lineare MDS-Codes

Jedes Oval bzw. jedes Hyperoval in einer projektiven Ebene über $\mathrm{GF}(q)$ liefert einen *linearen MDS-Code* über $\mathrm{GF}(q)$.

Allgemeiner läßt sich jeder Klasse äquivalenter linearer MDS-Codes über $\mathrm{GF}(q)$ — bis auf projektive Äquivalenz — genau ein *k-Bogen* in einem projektiven Raum über $\mathrm{GF}(q)$ zuordnen.

Beispiel für einen Bogen: *rationale Normkurve*

$$F(x_0, x_1, \dots, x_m) = F(1, t, t^2, \dots, t^m) \text{ mit } t \in F \cup \{\infty\}.$$

Windschiefe Kubik