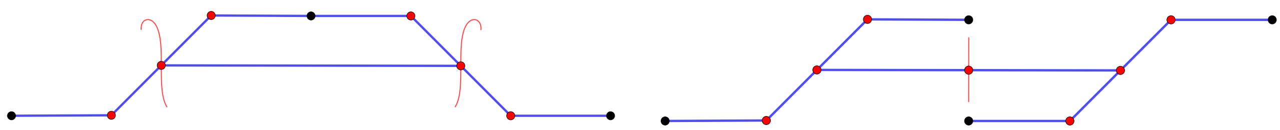
Zur Flexion der Stabwerke mit Wackeligkeit höherer Ordnung
On the flex of bar-joint frameworks with higher-order flexibility

Georg Nawratil, TU Wien, Institut für Diskrete Mathematik und Geometrie & Center for Geometry and Computational Design, 1040 Wien, Österreich, nawratil@geometrie.tuwien.ac.at

Kurzfassung

Das wohlbekannte Beispiel des Doppel-Watt Mechanismus (siehe linke Figur) von Connelly und Servatius [1] zeigt Probleme der klassischen Definitionen von Wackeligkeit und Starrheit höherer Ordnung auf, da diese dem Stabwerk eine Starrheit dritter Ordnung attestieren, obwohl es kontinuierlich beweglich ist. Einige Versuche wurden unternommen um dieses Dilemma aufzuklären [2, 3] jedoch blieb eine vollständige Lösung des Problems aus. Kürzlich wurde eine Neudefinition für die Ordnung der Wackeligkeit beziehungsweise Starrheit vorgelegt [4], aber die Bestimmung der damit assoziierten Flexionen (Eigenbeweglichkeiten) verblieb offen. Dieser Fragestellung ist der vorliegende Beitrag gewidmet.



Ein Stabwerk besteht aus w Knoten mit zugehörigen Ortsvektoren $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_w$, welche in einer gewissen Kombinatorik mittels e Stäben miteinander verbunden sind. Indem man nun den Stäben Längen zuweist, legt man die innere Metrik des ebenen/räumlichen Stabwerks fest, jedoch ist dadurch dessen Einbettung in die/den Euklidische Ebene/Raum im Allgemeinen nicht eindeutig bestimmt; sprich es gibt für gewöhnlich mehrere Realisierungen.
Wenn wir die quadratischen Gleichungen, die sich aus den quadrierten Abständen von entsprechenden Knoten ergeben[1], mittels $c_1, \ldots, c_e$ notieren, so lässt sich gemäß Stachel [3] die klassische Definition einer Flexion höherer Ordnung wie folgt formulieren:

Definition 1. *Ein Stabwerk hat eine Flexion der Ordnung n wenn für jeden Knoten $\mathbf{x}_i$ eine Polynomfunktion*

$$\mathbf{x}_i' := \mathbf{x}_i + \mathbf{x}_{i,1}t + \ldots + \mathbf{x}_{i,n}t^n \quad \textit{mit} \quad n > 0 \tag{1}$$

exisitert, sodass

1. *das Ersetzen von $\mathbf{x}_i$ durch $\mathbf{x}_i'$ in den Gleichungen $c_1, \ldots, c_e$ der Stablängen stationäre Werte mit einer Vielfachheit $\geq n+1$ zum Zeitpunkt $t = 0$ liefert;*
2. *die Geschwindigkeitsvektoren $\mathbf{x}_{1,1}, \mathbf{x}_{2,1}, \ldots, \mathbf{x}_{w,1}$ stammen nicht von einer Starrkörperbewegung (inklusive Stillstand) des gesamten Stabwerks; sprich sie sind nicht trivial.*

Das obig bereits erwähnte Beispiel des Doppel-Watt Mechanismus veranlasste Stachel die von Sabitov in [5, Seite 230] eingeführte Notation einer (k,n)-Flexion aufzugreifen, wobei in Definition 1 die Gleichung (1) ersetzt wird durch

$$\mathbf{x}_i' := \mathbf{x}_i + \mathbf{x}_{i,k}t^k + \ldots + \mathbf{x}_{i,n}t^n \quad \text{mit} \quad n \geq k > 0 \tag{2}$$

und nun die Vektoren $\mathbf{x}_{1,k}, \mathbf{x}_{2,k}, \ldots, \mathbf{x}_{w,k}$ nicht trivial sein dürfen. Zusätzlich forderte Stachel, dass Gleichung (2) eine irreduzible Flexion darstellt, also nicht aus einer Flexion niederer Ordnung durch eine polynomiale Parametersubstitution der Form

$$t = \bar{t}^q (a_0 + a_1\bar{t} + a_2\bar{t}^2 + \ldots) \tag{3}$$

mit $a_0 \neq 0$ und $q > 1$ hervorgeht. Auf diese Art und Weise konnte dem Doppel-Watt Mechanismus eine $(2,\infty)$-Flexion zugewiesen werden. Dieser Ansatz wurde von Stachel nur im Rahmen einer Tagung im Jahr 2007 präsentiert [3], blieb aber aus dem folgenden Grund unveröffentlicht. Diese Definition erlaubte es Stachel nämlich nicht dem in der rechten Figur abgebildeten Doppel-Watt Mechanismus, welcher um eine zusätzliche geradlinige Punktführung des Koppelmittelpunkts zu einem starren Stabwerk ergänzt wurde, eine eindeutige (k,n)-Flexion zuzuschreiben [6], sondern nur eine unendliche Reihe von irreduziblen Flexionen der Ordnung $(k, 3k-1)$ für $k = 1, 2, \ldots$.
Um dieses neue Dilemma zu beseitigen wird in dem vorliegenden Beitrag die folgende Modifikation der von Stachel präzisierten Definition der Sabitov'schen (k,n)-Flexionen vorgeschlagen:

[1] Angenommen der $i$te Knoten und der $j$te Knoten sind mit einem Stab der Länge L_{ij} verbunden, dann würde die entsprechende quadratische Gleichung $\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|^2 - L_{ij}^2 = 0$ lauten.

Definition 2. *Ein Stabwerk, welches nicht kontinuierlich beweglich ist, hat eine 1-parametrische (k,n)-Flexion wenn es für jeden Knoten $\mathbf{x}_i$ eine Polynomfunktion (2) gibt, sodass*

1. *das Ersetzen von $\mathbf{x}_i$ durch $\mathbf{x}_i'$ in den Gleichungen $c_1,\dots,c_e$ der Stablängen stationäre Werte mit einer Vielfachheit $\geq n+1$ zum Zeitpunkt $t=0$ liefert;*
2. *die Vektoren $\mathbf{x}_{1,k},\mathbf{x}_{2,k},\dots,\mathbf{x}_{w,k}$ nicht trivial sind;*
3. *die Gleichung (2) erweitert werden kann zu einer minimalen Parametrisierung eines Zweiges der Ordnung k einer algebraischen Kurve, die bestimmt ist als 1-dimensionale irreduzible Komponente der Varietät eines Ideals, dessen Erzeugenden in der linearen Familie von Quadriken aufgespannt durch $c_1,\dots,c_e$ enthalten sind.*

Es wird also Stachels Irreduzibilitätsbedingung durch Punkt 3 von Definition 2 ersetzt, wodurch das Auftreten von unendlichen Sequenzen an irreduziblen (k,n)-Flexion verhindert wird, denn k kann nicht größer als die Ordnung r der Wackeligkeit[2] des vorliegenden Stabwerks sein.

Wir haben in Definition 2 vorausgesetzt, dass das Stabwerk nicht kontinuierlich beweglich ist, aber es sei bemerkt, dass diese Definition auch für 1-parametrisch bewegliche Mechanismen gilt; wobei dann $n=\infty$ eintritt. Die Bestimmung der minimalen Parametrisierung eines Zweiges einer algebraischen Kurve erfolgt auf Basis der Theorie von Puiseux Reihen. Diese Methode ist wohlbekannt für ebene algebraische Kurven (siehe z.B. [7–9]), kann aber auch auf den nicht planaren Fall erweitert werden [10–12]. Zudem sprechen wir in Definition 2 explizit von "1-parametrischen Flexionen", da auch die Frage nach p-parametrischen Flexionen mit $p>1$ zulässig wäre. Deren Definition könnte analog erfolgen basierend auf der lokalen Parametrisierung von p-Flächen durch eine entsprechende multivariate Puiseux Reihenentwicklung (siehe [13–16]).

Abschließend sei die interessierte Leserschaft hinsichtlich detaillierter Informationen zu dem vorliegenden Beitrag noch auf den zugehörigen Vorabdruck [17] verwiesen.

Literatur

[1] Connelly, R., Servatius, H.: *Higher-order rigidity – What is the proper definition?* Discrete & Computational Geometry **11**:193–200 (1994)

[2] Gaspar, Z., Tarnai, T.: *Finite mechanisms have no higher-order rigidity.* Acta technica Academiae Scientiarum Hungaricae **106**:119–125 (1994)

[3] Stachel, H.: *A proposal for a proper definition of higher-order rigidity. (Vortragsfolien)* Tensegrity Workshop, La Vacquerie, France (2007)

[4] Nawratil, G.: *A global approach for the redefinition of higher-order flexibility and rigidity.* Mechanism and Machine Theory **205**:105853 (2025)

[5] Sabitov, I.Kh.: *Local Theory of Bendings of Surfaces.* Geometry III, 179–250, Springer (1992)

[6] Stachel, H.: *A (3,8)-flexible bar-and-joint framework? (Vortragsfolien)* AIM Workshop on Rigidity and polyhedral combinatorics, Palo Alto/CA, USA (2007)

[7] Semple, J.G., Kneebone, G.T.: *Algebraic Curves.* Oxford University Press (1959)

[8] Burau, W.: *Algebraische Kurven und Flächen I & II.* Walter De Gruyter & Co. (1962)

[9] Walker, R.J.: *Algebraic Curves.* Springer (1978)

[10] Maurer, J.: *Puiseux expansion for space curves.* Manuscripta Mathematica **32**:91–100 (1980)

[11] Alonso, M.W., Mora, T., Niesi, G., Raimondo, M.: *Local Parametrization of Space Curves at Singular Points.* Computer Graphics and Mathematics, 61–90, Springer (1992)

[12] Jensen, A.N., Markwig, H., Markwig, T.: *An algorithm for lifting points in a tropical variety.* Collectanea Mathematica **59**:129–165 (2008)

[13] McDonald, J.: *Fiber polytopes and fractional power series.* Journal of Pure and Applied Algebra **104**:213–233 (1995)

[14] McDonald, J.: *Fractional power series solutions for systems of equations.* Discrete & Computational Geometry **27**:501–529 (2002)

[15] Aroca, F., Ilardi, G., Lopez de Medrano, L.: *Puiseux power series solutions for systems of equations.* International Journal of Mathematics **21**:1439–1459 (2010)

[16] Buchacher, M.: *The Newton-Puiseux algorithm and effective algebraic series.* arXiv 2209.00875 (2022)

[17] Nawratil, G.: *On flexes associated with higher-order flexible bar-joint frameworks.* arXiv 2502.01124 (2025)

[2] Nach [4] entspricht r der Anzahl der zusammenfallenden Stabwerkrealisierungen minus 1; also der um eins verminderten Schnittvielfachheit der Quadriken $c_1,\dots,c_e$.