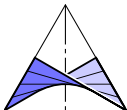


Forme(l)n der Beweglichkeit

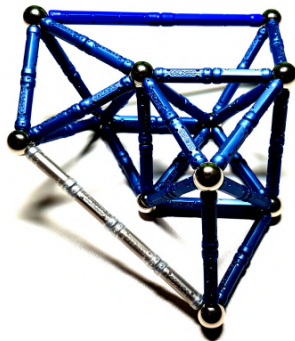
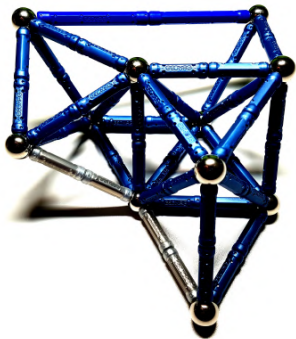
Georg Nawratil^{1,2}

¹Institut für Diskrete Mathematik und Geometrie, TU Wien
www.dmg.tuwien.ac.at/nawratil/

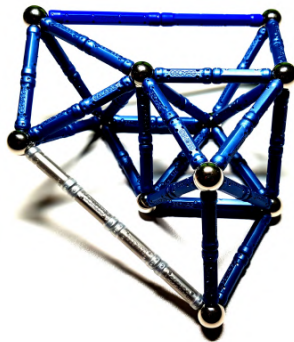
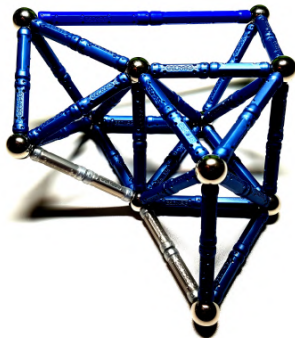
²Center for Geometry and Computational Design, TU Wien



Ein Kinderspiel?

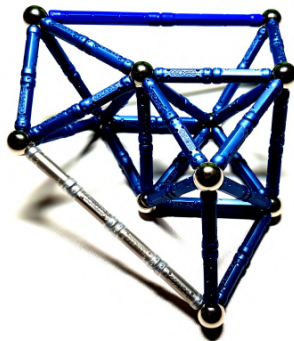
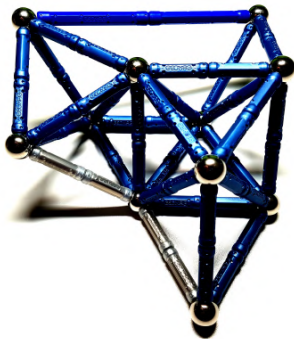


Ein Kinderspiel?



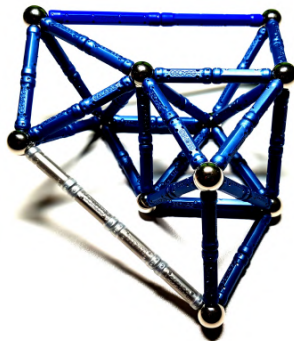
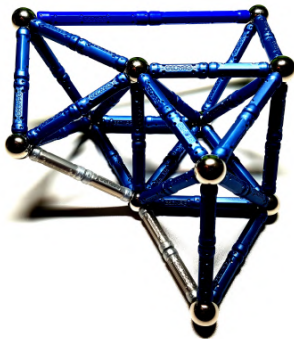
- Sind diese geometrischen Strukturen beweglich oder starr?

Ein Kinderspiel?



- Sind diese geometrischen Strukturen beweglich oder starr?
- Können Stäbe entfernt werden ohne an der Starrheit etwas zu ändern?

Ein Kinderspiel?



- Sind diese geometrischen Strukturen beweglich oder starr?
- Können Stäbe entfernt werden ohne an der Starrheit etwas zu ändern?
- Können Stäbe hinzugefügt werden ohne die Beweglichkeit einzuschränken?

Praktische Anwendungen



Im Alltag begegnen uns derartige Stabwerke in der Form von Brücken, Strommasten, Dachkonstruktionen,

Praktische Anwendungen



Im Alltag begegnen uns derartige Stabwerke in der Form von Brücken, Strommasten, Dachkonstruktionen,

Wir sind nur an der Geometrie der Stabwerke interessiert und vernachlässigen die technische Realisierung der Stäbe und Knoten.

Praktische Anwendungen



Im Alltag begegnen uns derartige Stabwerke in der Form von Brücken, Strommasten, Dachkonstruktionen,

Wir sind nur an der Geometrie der Stabwerke interessiert und vernachlässigen die technische Realisierung der Stäbe und Knoten.

Geometrische Abstraktion

Stäbe = gerade Strecken

Knoten = Punkte



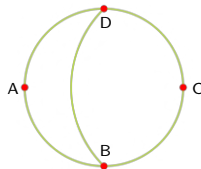
=



Theoretische Grundlagen

Graph eines Stabwerks

Dieser besteht aus einer Menge von Knotenpunkten, die durch Kanten verbunden sind ($\Rightarrow$ kombinatorische Struktur).



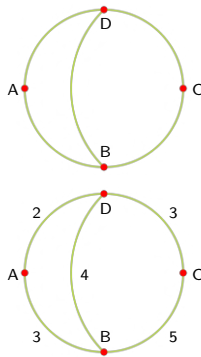
Theoretische Grundlagen

Graph eines Stabwerks

Dieser besteht aus einer Menge von Knotenpunkten, die durch Kanten verbunden sind ($\Rightarrow$ kombinatorische Struktur).

Innere Geometrie

Indem man jeder Kante eine Länge zuweist, ist die sog. **innere Geometrie** des Stabwerks festgelegt.



Theoretische Grundlagen

Graph eines Stabwerks

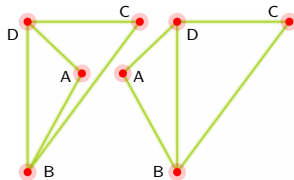
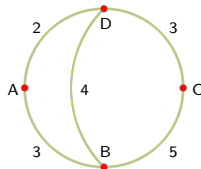
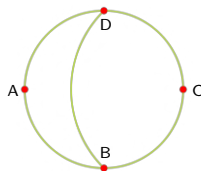
Dieser besteht aus einer Menge von Knotenpunkten, die durch Kanten verbunden sind ($\Rightarrow$ kombinatorische Struktur).

Innere Geometrie

Indem man jeder Kante eine Länge zuweist, ist die sog. **innere Geometrie** des Stabwerks festgelegt.

Realisierung

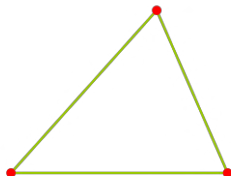
Die Verwirklichung des Stabwerks mit festgelegter innerer Geometrie in der Ebene (bzw. im Raum).



Beweglich vs. starr

Erste Definition von “beweglich” und “starr”

Eine Realisierung heißt **beweglich**, wenn diese einer kontinuierlichen Menge von Realisierungen angehört; sonst **starr**.



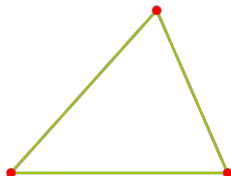
4-Stabgetriebe ist beweglich

Dreieck ist starr (SSS-Satz)

Beweglich vs. starr

Erste Definition von “beweglich” und “starr”

Eine Realisierung heißt **beweglich**, wenn diese einer kontinuierlichen Menge von Realisierungen angehört; sonst **starr**.



4-Stabgetriebe ist beweglich

Dreieck ist starr (SSS-Satz)

Die Grenze zwischen starr und beweglich ist jedoch nicht so strikt, wie es auf den ersten Blick scheint.

Aufbau des Vortrags

1. Forme(l)n der Beweglichkeit
2. Über Zwischenstufen der Beweglichkeit
3. Das Begreiflichmachen durch Modelle

1. Forme(l)n der Beweglichkeit

Abschätzung der Beweglichkeit

Freiheitsgrad F_d *(eben $d = 2$; räumlich $d = 3$)*

Eine Abschätzung der Starrheit/Beweglichkeit liefert der sog. **Freiheitsgrad** $F_2 = 2n - 3 - m$ bzw. $F_3 = 3n - 6 - m$, wobei n und m die Anzahl der Knotenpunkte bzw. Kanten angibt. Im Allgemeinen ist das Stabwerk starr bei $F_d < 1$ und beweglich bei $F_d > 0$.

Abschätzung der Beweglichkeit

Freiheitsgrad F_d *(eben $d = 2$; räumlich $d = 3$)*

Eine Abschätzung der Starrheit/Beweglichkeit liefert der sog. **Freiheitsgrad** $F_2 = 2n - 3 - m$ bzw. $F_3 = 3n - 6 - m$, wobei n und m die Anzahl der Knotenpunkte bzw. Kanten angibt. Im Allgemeinen ist das Stabwerk starr bei $F_d < 1$ und beweglich bei $F_d > 0$.

Gegeben ist die innere Geometrie des Stabwerks.

Abschätzung der Beweglichkeit

Freiheitsgrad F_d *(eben $d = 2$; räumlich $d = 3$)*

Eine Abschätzung der Starrheit/Beweglichkeit liefert der sog. **Freiheitsgrad** $F_2 = 2n - 3 - m$ bzw. $F_3 = 3n - 6 - m$, wobei n und m die Anzahl der Knotenpunkte bzw. Kanten angibt. Im Allgemeinen ist das Stabwerk starr bei $F_d < 1$ und beweglich bei $F_d > 0$.

Gegeben ist die innere Geometrie des Stabwerks.

Gesucht ist die Lage der Knotenpunkte $K_1, \dots, K_n$.

Abschätzung der Beweglichkeit

Freiheitsgrad F_d (eben $d = 2$; räumlich $d = 3$)

Eine Abschätzung der Starrheit/Beweglichkeit liefert der sog. **Freiheitsgrad** $F_2 = 2n - 3 - m$ bzw. $F_3 = 3n - 6 - m$, wobei n und m die Anzahl der Knotenpunkte bzw. Kanten angibt. Im Allgemeinen ist das Stabwerk starr bei $F_d < 1$ und beweglich bei $F_d > 0$.

Gegeben ist die innere Geometrie des Stabwerks.

Gesucht ist die Lage der Knotenpunkte $K_1, \dots, K_n$.

Eine Kante zwischen zwei Knoten K_i und K_j mit bekannter Länge d_{ij} impliziert eine quadratische Gleichung der Form:

$$\|\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_j\|^2 = d_{ij}^2 \quad (\# \text{ Gleichungen} = m)$$

Abschätzung der Beweglichkeit

Freiheitsgrad F_d (eben $d = 2$; räumlich $d = 3$)

Eine Abschätzung der Starrheit/Beweglichkeit liefert der sog. **Freiheitsgrad** $F_2 = 2n - 3 - m$ bzw. $F_3 = 3n - 6 - m$, wobei n und m die Anzahl der Knotenpunkte bzw. Kanten angibt. Im Allgemeinen ist das Stabwerk starr bei $F_d < 1$ und beweglich bei $F_d > 0$.

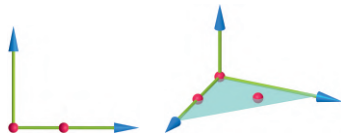
Gegeben ist die innere Geometrie des Stabwerks.

Gesucht ist die Lage der Knotenpunkte $K_1, \dots, K_n$.

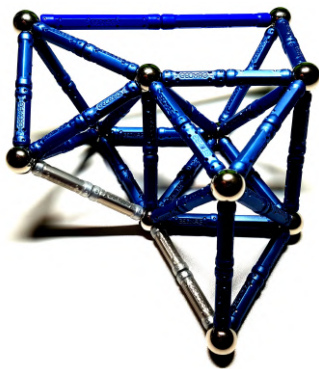
Eine Kante zwischen zwei Knoten K_i und K_j mit bekannter Länge d_{ij} impliziert eine quadratische Gleichung der Form:

$$\|\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_j\|^2 = d_{ij}^2 \quad (\# \text{ Gleichungen} = m)$$

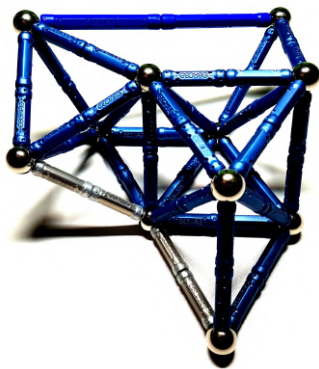
$$\# \text{ Variablen} = \begin{cases} 2n - 3 & \text{für } d = 2 \\ 3n - 6 & \text{für } d = 3 \end{cases}$$



Formel der Beweglichkeit: $F_3 = 3n - 6 - m$



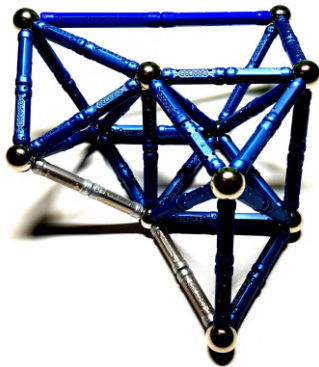
Formel der Beweglichkeit: $F_3 = 3n - 6 - m$



Beispiel: $n = 11$, $m = 27$

$F_3 = 0 \Rightarrow$ starr

Formel der Beweglichkeit: $F_3 = 3n - 6 - m$



Beispiel: $n = 11$, $m = 27$

$F_3 = 0 \Rightarrow$ starr



Beispiel: $n = 11$, $m = 26$

$F_3 = 1 \Rightarrow$ beweglich

Formeln der Beweglichkeit

Jedoch ist der Freiheitsgrad mit Vorsicht zu genießen wie folgende ebene Beispiele ($\Rightarrow F_2 = 2n - 3 - m$) zeigen.

Formeln der Beweglichkeit

Jedoch ist der Freiheitsgrad mit Vorsicht zu genießen wie folgende ebene Beispiele ($\Rightarrow F_2 = 2n - 3 - m$) zeigen.

Beispiel: 4-Stabgetriebe



$$n = 4, m = 4 \Rightarrow F_2 = 1$$

$\exists!$ Realisierung

Formeln der Beweglichkeit

Jedoch ist der Freiheitsgrad mit Vorsicht zu genießen wie folgende ebene Beispiele ($\Rightarrow F_2 = 2n - 3 - m$) zeigen.

Beispiel: 4-Stabgetriebe



$$n = 4, m = 4 \Rightarrow F_2 = 1$$

$\exists!$ Realisierung

Beispiel: Ebener Parallelmechanismus

Formeln der Beweglichkeit

Jedoch ist der Freiheitsgrad mit Vorsicht zu genießen wie folgende ebene Beispiele ($\Rightarrow F_2 = 2n - 3 - m$) zeigen.

Beispiel: 4-Stabgetriebe



$$n = 4, m = 4 \Rightarrow F_2 = 1$$

$\exists!$ Realisierung

Beispiel: Ebener Parallelmechanismus

$$n = 6, m = 9 \Rightarrow F_2 = 0$$

$\exists$ bewegliche Realisierung

Formeln der Beweglichkeit

Jedoch ist der Freiheitsgrad mit Vorsicht zu genießen wie folgende ebene Beispiele ($\Rightarrow F_2 = 2n - 3 - m$) zeigen.

Beispiel: 4-Stabgetriebe



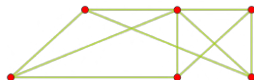
$$n = 4, m = 4 \Rightarrow F_2 = 1$$

$\exists!$ Realisierung

Beispiel: Ebener Parallelmechanismus

$$n = 6, m = 9 \Rightarrow F_2 = 0$$

$\exists$ bewegliche Realisierung



Starre Realisierung

Formen der Beweglichkeit

Für eine genaue Analyse muss das nichtlineare Gleichungssystem

$$m \begin{cases} \|\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_j\|^2 = d_{ij}^2 \\ \vdots \\ \|\mathbf{k}_u - \mathbf{k}_v\|^2 = d_{uv}^2 \end{cases}$$

gelöst werden. Basierend auf dessen reellen Lösungen ($\Leftrightarrow$ Realisierung) kann man folgende Formen der Beweglichkeit unterscheiden:

Formen der Beweglichkeit

Für eine genaue Analyse muss das nichtlineare Gleichungssystem

$$m \begin{cases} \| \mathbf{k}_i - \mathbf{k}_j \|^2 = d_{ij}^2 \\ \vdots \\ \| \mathbf{k}_u - \mathbf{k}_v \|^2 = d_{uv}^2 \end{cases}$$

gelöst werden. Basierend auf dessen reellen Lösungen ($\Leftrightarrow$ Realisierung) kann man folgende Formen der Beweglichkeit unterscheiden:

Def.: Eine Realisierung heißt **beweglich**

wenn diese einer kontinuierlichen Lösungsmenge angehört.

Spezialfall: Bei $F_d < 1$ nennt man die Bewegung **paradox**.



Def.: Eine Realisierung heißt *starr*

wenn diese der einzigen Lösung entspricht (global) oder andere Lösungen “weit genug” von dieser entfernt liegen (lokal).



Def.: Eine Realisierung heißt *starr*

wenn diese der einzigen Lösung entspricht (global) oder andere Lösungen “weit genug” von dieser entfernt liegen (lokal).



Def.: Eine Realisierung heißt *kippend*

wenn eine zweite Lösung “nahe genug” existiert, sodass die Realisierung in diese umspringen kann*.



Def.: Eine Realisierung heißt *starr*

wenn diese der einzigen Lösung entspricht (global) oder andere Lösungen “weit genug” von dieser entfernt liegen (lokal).



Def.: Eine Realisierung heißt *kippend*

wenn eine zweite Lösung “nahe genug” existiert, sodass die Realisierung in diese umspringen kann*.



*aufgrund von reversibler Materialverformung und Gelenkspielräumen

Def.: Eine Realisierung heißt *starr*

wenn diese der einzigen Lösung entspricht (global) oder andere Lösungen “weit genug” von dieser entfernt liegen (lokal).



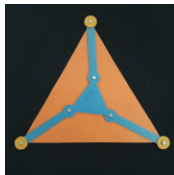
Def.: Eine Realisierung heißt *kippend*

wenn eine zweite Lösung “nahe genug” existiert, sodass die Realisierung in diese umspringen kann*.



Def.: Eine Realisierung heißt *wackelig*

wenn diese mindestens einer Doppellösung entspricht. In einem begrenzten Rahmen ist die Realisierung flexibel*.



*aufgrund von reversibler Materialverformung und Gelenkspielräumen

2. Über Zwischenstufen der Beweglichkeit

Konstruktion von Zwischenstufen

4-Stabgetriebe mit Koppelstange

Konstruktion von Zwischenstufen

4-Stabgetriebe mit Koppelstange

4-Stabgetriebe mit Koppeldreieck

Konstruktion von Zwischenstufen

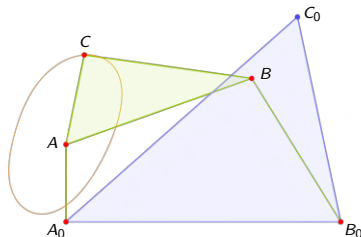
4-Stabgetriebe mit Koppelstange

Koppeldreieck ABC

Basisdreieck $A_0B_0C_0$

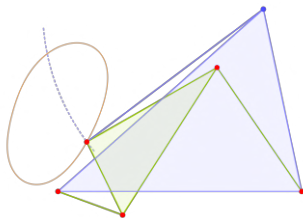
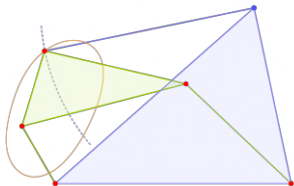
Indem man zwischen den Punkten C und C_0 einen Stab einfügt, erhält man einen **ebenen Parallelmechanismus**.

4-Stabgetriebe mit Koppeldreieck



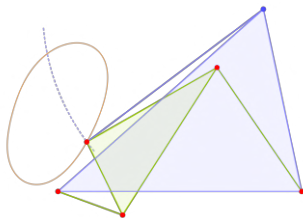
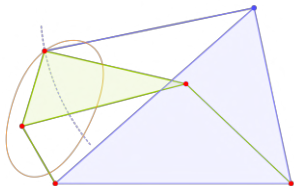
Konstruktion von Zwischenstufen

Starre Realisierungen

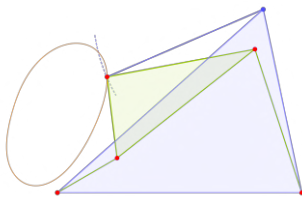
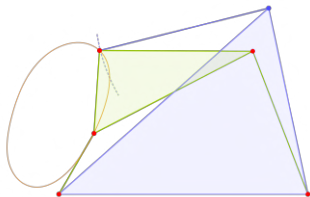


Konstruktion von Zwischenstufen

Starre Realisierungen



Kippende Realisierungen



Konstruktion von Zwischenstufen

Kippbewegung

Konstruktion von Zwischenstufen

Kippbewegung

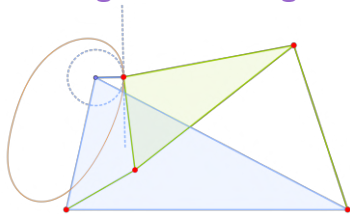
Grenzübergang zur Wackeligkeit

Konstruktion von Zwischenstufen

Kippbewegung

Grenzübergang zur Wackeligkeit

Wackelige Realisierung der Ordnung 1

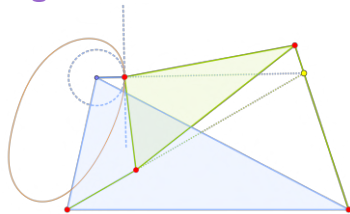
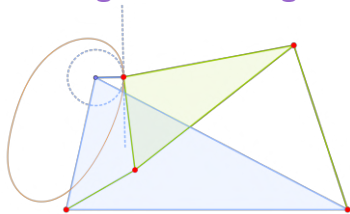


Konstruktion von Zwischenstufen

Kippbewegung

Grenzübergang zur Wackeligkeit

Wackelige Realisierung der Ordnung 1

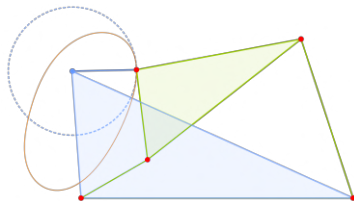


Konstruktion von Zwischenstufen

Wackelige Realisierung der Ordnung 2

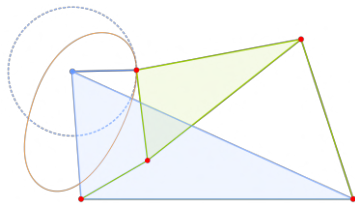
Konstruktion von Zwischenstufen

Wackelige Realisierung der Ordnung 2



Konstruktion von Zwischenstufen

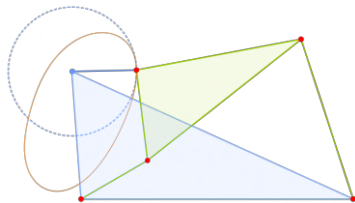
Wackelige Realisierung der Ordnung 2



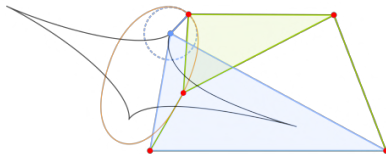
Wackelige Realisierung der Ordnung 3

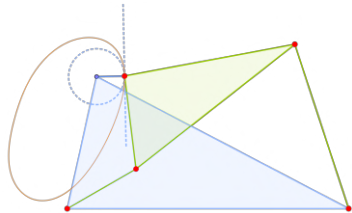
Konstruktion von Zwischenstufen

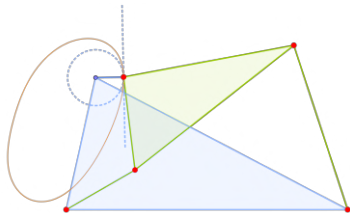
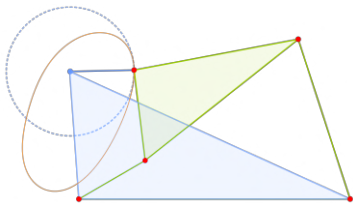
Wackelige Realisierung der Ordnung 2

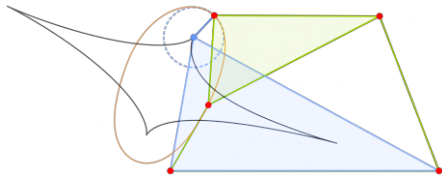
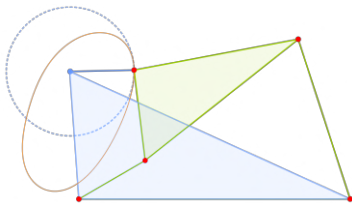
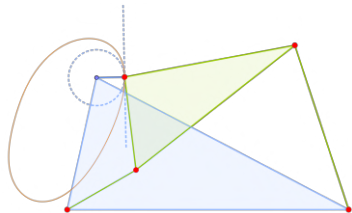


Wackelige Realisierung der Ordnung 3









Je höher die Ordnung der Wackeligkeit

desto größer ist der Rahmen, in welchem die Realisierung aufgrund von Materialverformung und Gelenkspielräumen flexibel ist.

Beziehung zwischen den Bewegungsformen

Beziehung zwischen den Bewegungsformen

“Mitteln” (Averaging)

Aus zwei Realisierungen mit derselben inneren Geometrie erhält man durch “Mitteln” ein wackeliges Stabwerk.

Beziehung zwischen den Bewegungsformen

“Mitteln” (Averaging)

Aus zwei Realisierungen mit derselben inneren Geometrie erhält man durch “Mitteln” ein wackeliges Stabwerk.

Beziehung zwischen den Bewegungsformen

“Mitteln” (Averaging)

Aus zwei Realisierungen mit **derselben inneren Geometrie** erhält man durch “Mitteln” ein **wackeliges Stabwerk**.

“Entmitteln” (Deaveraging)

Aus einem **wackeligen Stabwerk** erhält man durch “Entmitteln” zwei Realisierungen mit **derselben inneren Geometrie**.

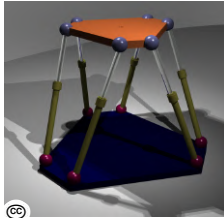
Beziehung zwischen den Bewegungsformen

Die Kippbewegung beinhaltet eine wackelige Stellung

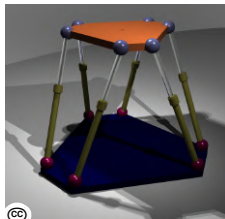
wenn durch Anwendung der minimal nötigen Deformationsenergie ein Stabwerk mit $F_d = 0$ zum Kippen zwischen zwei Realisierungen gebracht wird.

Anwendung in der Robotik

Anwendung in der Robotik



Anwendung in der Robotik



Anwendung in der Robotik



Bewegungsplattformen

Wackelige und kippende Konfigurationen sind aufgrund des resultierenden Kontrollverlustes zu vermeiden.

3. Das Begreiflichmachen durch Modelle

Sammlung kinematischer Modelle

am Institut für Diskrete Mathematik und Geometrie umfasst über 230 Modelle (siehe www.geometrie.tuwien.ac.at/kinmodelle/).

Besonderen Anteil an diesem umfangreichen Bestand hat **Walter Wunderlich**, der die Beweglichkeit geometrischer Strukturen erforschte und diesbezügliche Modelle ansammelte zum Zwecke der

- Demonstration von Resultaten
- Vermittlung von Wissen



Walter Wunderlich
1910*–1998[†]

Sammlung kinematischer Modelle

am Institut für Diskrete Mathematik und Geometrie umfasst über 230 Modelle (siehe www.geometrie.tuwien.ac.at/kinmodelle/).

Besonderen Anteil an diesem umfangreichen Bestand hat **Walter Wunderlich**, der die Beweglichkeit geometrischer Strukturen erforschte und diesbezügliche Modelle ansammelte zum Zwecke der

- Demonstration von Resultaten
- Vermittlung von Wissen



Begreiflichmachen von Bewegungsformen

Modelle ermöglichen eine haptische Wahrnehmung (körperliche Erfahrung vs. Computersimulation).

Begreiflichmachen von Bewegungsformen

Modelle ermöglichen eine haptische Wahrnehmung (körperliche Erfahrung vs. Computersimulation).

Z.B. des Widerstands, den man überwinden muss, um von einer Realisierung in eine andere zu kippen.



Kippendes Antiprisma*

*W. Wunderlich: Snapping and shaky antiprisms (1979)

Starre, kippende, wackelige und bewegliche Achtfläche (1965)

Begreiflichmachen von Bewegungsformen

Modelle ermöglichen eine haptische Wahrnehmung (körperliche Erfahrung vs. Computersimulation).

Z.B. des Widerstands, den man überwinden muss, um von einer Realisierung in eine andere zu kippen.



Kippendes Antiprisma*

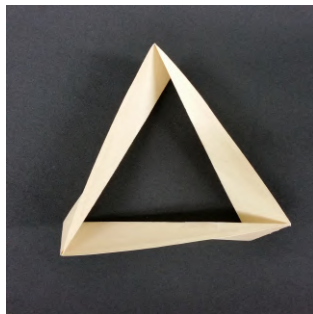
*W. Wunderlich: Snapping and shaky antiprisms (1979)

Starre, kippende, wackelige und bewegliche Achtfläche (1965)

Begreiflichmachen von Bewegungsformen

Modelle ermöglichen eine haptische Wahrnehmung (körperliche Erfahrung vs. Computersimulation).

Z.B. des Widerstands, den man überwinden muss, um von einer Realisierung in eine andere zu kippen.



Kippendes Oktaeder*

*W. Wunderlich: Snapping and shaky antiprisms (1979)

Starre, kippende, wackelige und bewegliche Achtfläche (1965)

Begreiflichmachen von Bewegungsformen

Modelle ermöglichen eine haptische Wahrnehmung (körperliche Erfahrung vs. Computersimulation).

Z.B. des Widerstands, den man überwinden muss, um von einer Realisierung in eine andere zu kippen.



Kippendes Oktaeder*

*W. Wunderlich: Snapping and shaky antiprisms (1979)

Starre, kippende, wackelige und bewegliche Achtfläche (1965)

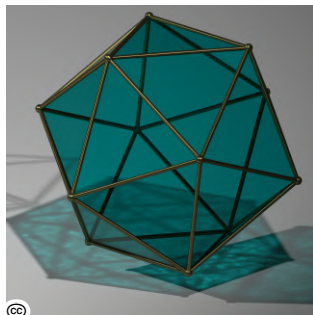
Polyedermodelle

Die in Folge präsentierten Beispiele beschränken sich auf Modelle von **geschlossenen polyedrischen Flächen** (= Polyeder), welche durch Dreiecke begrenzt sind.

Polyedermodelle

Die in Folge präsentierten Beispiele beschränken sich auf Modelle von **geschlossenen polyedrischen Flächen** (= Polyeder), welche durch Dreiecke begrenzt sind.

Somit sind diese direkt als Stabwerke interpretierbar.

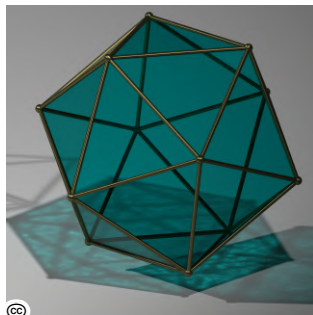


Polyedermodelle

Die in Folge präsentierten Beispiele beschränken sich auf Modelle von **geschlossenen polyedrischen Flächen** (= Polyeder), welche durch Dreiecke begrenzt sind.

Somit sind diese direkt als Stabwerke interpretierbar.

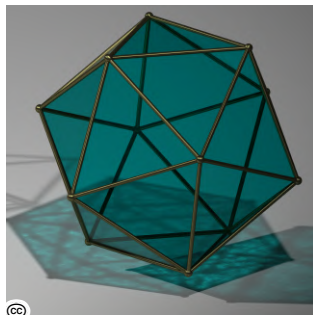
Für derartige Flächen gilt $F_3 = 0$.



Polyedermodelle

Die in Folge präsentierten Beispiele beschränken sich auf Modelle von **geschlossenen polyedrischen Flächen** (= Polyeder), welche durch Dreiecke begrenzt sind.

Somit sind diese direkt als Stabwerke interpretierbar.



Für derartige Flächen gilt $F_3 = 0$.

Beweis: Mit Hilfe der Eulerschen Polyederformel

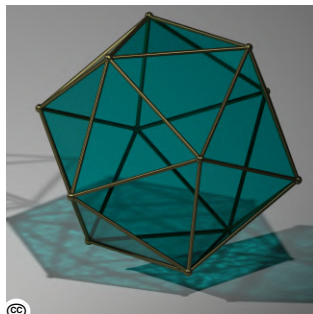
$$\text{Ecken} + \text{Flächen} - \text{Kanten} = 2 \quad (n + f - m = 2)$$

erhalten wir aus $F_3 = 3n - 6 - m$ durch Einsetzen von $n = m - f + 2$ den Ausdruck $F_3 = 2m - 3f = 0$.

Polyedermodelle

Die in Folge präsentierten Beispiele beschränken sich auf Modelle von **geschlossenen polyedrischen Flächen** (= Polyeder), welche durch Dreiecke begrenzt sind.

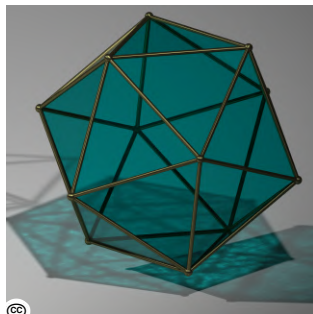
Somit sind diese direkt als Stabwerke interpretierbar.



Polyedermodelle

Die in Folge präsentierten Beispiele beschränken sich auf Modelle von **geschlossenen polyedrischen Flächen** (= Polyeder), welche durch Dreiecke begrenzt sind.

Somit sind diese direkt als Stabwerke interpretierbar.



Augustin-Lois Cauchy* (1789^{*}–1857[†])

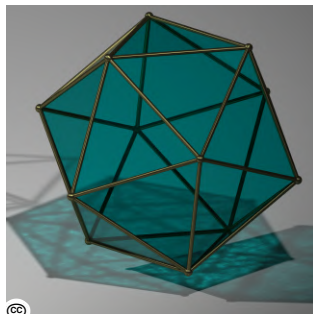
Jedes konvexe Polyeder ist lokal starr.

*A.L. Cauchy: Recherches sur les (polygones et les) polyèdres (1813)

Polyedermodelle

Die in Folge präsentierten Beispiele beschränken sich auf Modelle von **geschlossenen polyedrischen Flächen** (= Polyeder), welche durch Dreiecke begrenzt sind.

Somit sind diese direkt als Stabwerke interpretierbar.



Augustin-Lois Cauchy* (1789^{*}–1857[†])

Jedes konvexe Polyeder ist lokal starr.

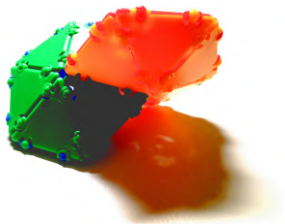
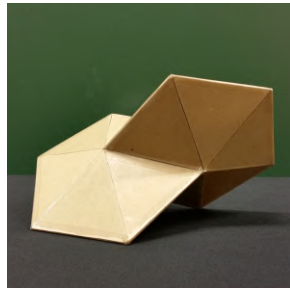
Folgerung: Konvexe Polyeder können nicht beweglich sein.

*A.L. Cauchy: *Recherches sur les (polygones et les) polyèdres* (1813)

Siamesische Doppelpyramide

Michael Goldberg* (1902^{*}–1990[†]):

Das Polyeder besteht aus 20 gleichseitigen Dreiecken und hat 12 Ecken und 30 Kanten.



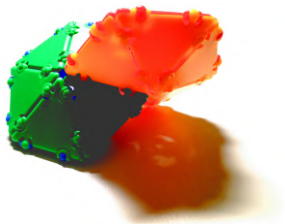
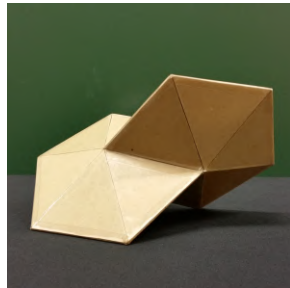
*M. Goldberg: Unstable polyhedral structures (1978)

Siamesische Doppelpyramide

Michael Goldberg* (1902^{*}–1990[†]):

Das Polyeder besteht aus 20 gleichseitigen Dreiecken und hat 12 Ecken und 30 Kanten.

Trotz $F_3 = 0$ scheint das Modell “beweglich” zu sein.



*M. Goldberg: Unstable polyhedral structures (1978)

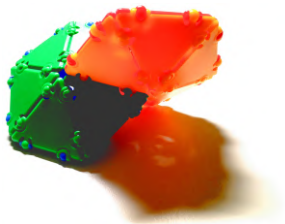
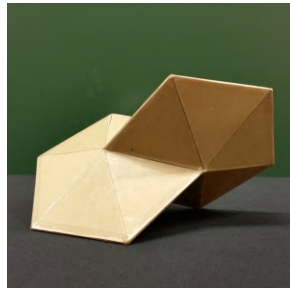
Siamesische Doppelpyramide

Michael Goldberg* (1902^{*}–1990[†]):

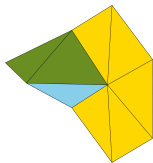
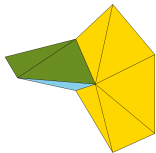
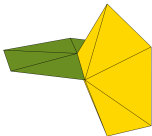
Das Polyeder besteht aus 20 gleichseitigen Dreiecken und hat 12 Ecken und 30 Kanten.

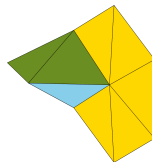
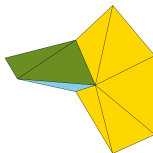
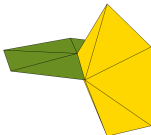
Trotz $F_3 = 0$ scheint das Modell “beweglich” zu sein.

Beweglich, kippend oder wackelig?



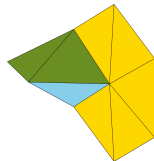
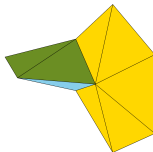
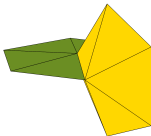
*M. Goldberg: Unstable polyhedral structures (1978)





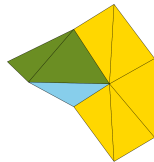
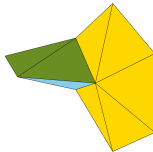
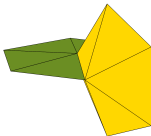
Modellflexibilität

Tatsächlich kippt dieses Polyeder nur zwischen drei Realisierungen hin und her.



Modellflexibilität

Tatsächlich kippt dieses Polyeder nur zwischen drei Realisierungen hin und her.



Modellflexibilität

Tatsächlich kippt dieses Polyeder nur zwischen drei Realisierungen hin und her.

Die maximale Längenänderung einer Kante beträgt ca. **3mm** wenn die Dreiecke eine Kantenlänge von **1m** aufweisen.

Vierhorn

Dieses Polyeder besteht aus 16 gleichschenkeligen Dreiecken und hat 10 Ecken und 24 Kanten.



Vierhorn

Dieses Polyeder besteht aus 16 gleichschenkeligen Dreiecken und hat 10 Ecken und 24 Kanten.

Auf der Schweizer Wissenschaftsausstellung *Phänomene* 1984 wurde es von **Casper Schwabe** als **bewegliches Polyeder** präsentiert.



Vierhorn

Dieses Polyeder besteht aus 16 gleichschenkeligen Dreiecken und hat 10 Ecken und 24 Kanten.

Auf der Schweizer Wissenschaftsausstellung *Phänomena* 1984 wurde es von **Casper Schwabe** als **bewegliches Polyeder** präsentiert.

Während der “Bewegung” geht es von einer platten Form über in eine räumliche Form wieder hin zu einer flachen.



Vierhorn

Dieses Polyeder besteht aus 16 gleichschenkeligen Dreiecken und hat 10 Ecken und 24 Kanten.

Auf der Schweizer Wissenschaftsausstellung *Phänomena* 1984 wurde es von **Casper Schwabe** als **bewegliches Polyeder** präsentiert.

Während der “Bewegung” geht es von einer platten Form über in eine räumliche Form wieder hin zu einer flachen.

Somit muss Luft einströmen und entweichen können, weshalb das Modell mit Löchern versehen ist.



Idzhad Sabitov (1996): Beweis der Blasebalg Vermutung

Das Volumen eines beweglichen Polyeders bleibt während der Bewegung unverändert.

Idzhad Sabitov (1996): Beweis der Blasebalg Vermutung

Das Volumen eines beweglichen Polyeders bleibt während der Bewegung unverändert.

Modellflexibilität

Somit kippt das Vierhorn nur zwischen drei Realisierungen hin und her.

Idzhad Sabitov (1996): Beweis der Blasebalg Vermutung

Das Volumen eines beweglichen Polyeders bleibt während der Bewegung unverändert.

Modellflexibilität

Somit kippt das Vierhorn nur zwischen drei Realisierungen hin und her.

Idzhad Sabitov (1996): Beweis der Blasebalg Vermutung

Das Volumen eines beweglichen Polyeders bleibt während der Bewegung unverändert.

Modellflexibilität

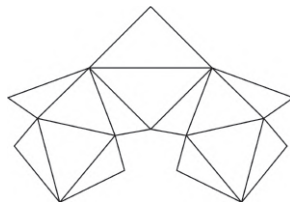
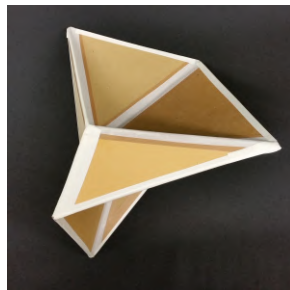
Somit kippt das Vierhorn nur zwischen drei Realisierungen hin und her.

Die maximale Längenänderung einer Kante ist ca. **0.3mm** wenn die durchschnittliche Kantenlänge **1m** beträgt.

Steffen-Polyeder

Das Polyeder von **Klaus Steffen*** ist **paradox beweglich**. Es besteht aus 14 Dreiecken, 9 Ecken und 21 Kanten.

Dies ist das einfachste Modell, welches die Eigenschaft eines konstanten eingeschlossenen Volumens demonstriert.



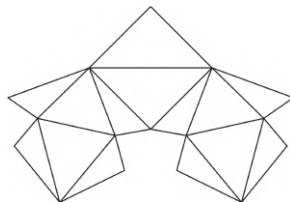
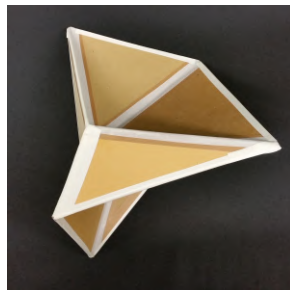
*K. Steffen: A symmetric flexible Connelly sphere with only nine vertices (1978)

Steffen-Polyeder

Das Polyeder von **Klaus Steffen*** ist **paradox beweglich**. Es besteht aus 14 Dreiecken, 9 Ecken und 21 Kanten.

Dies ist das einfachste Modell, welches die Eigenschaft eines konstanten eingeschlossenen Volumens demonstriert.

Das erste Modell dieser Art stammt von **Robert Connelly** (1977).



*K. Steffen: A symmetric flexible Connelly sphere with only nine vertices (1978)

Steffen-Polyeder

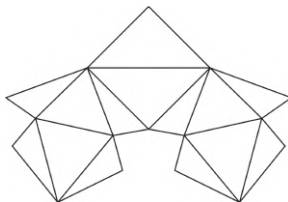
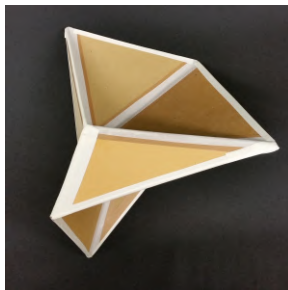
Das Polyeder von **Klaus Steffen*** ist **paradox beweglich**. Es besteht aus 14 Dreiecken, 9 Ecken und 21 Kanten.

Dies ist das einfachste Modell, welches die Eigenschaft eines konstanten eingeschlossenen Volumens demonstriert.

Das erste Modell dieser Art stammt von **Robert Connelly** (1977).

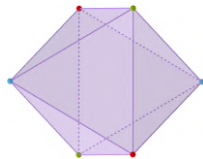
Das Steffen-Polyeder ist aus zwei **Bricard Oktaedern** zusammengesetzt.

*K. Steffen: A symmetric flexible Connelly sphere with only nine vertices (1978)



Bricard Oktaeder

Alle **paradox beweglichen** Oktaeder wurden von **Raoul Bricard*** (1870^{*}–1943[†]) bestimmt. Dabei lassen sich die folgenden drei Typen unterscheiden:



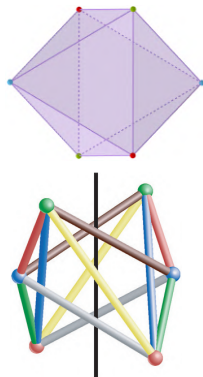
*R. Bricard: Mémoire sur la théorie de l'octaèdre articulé (1897)

Bricard Oktaeder

Alle **paradox beweglichen** Oktaeder wurden von **Raoul Bricard*** (1870*–1943[†]) bestimmt. Dabei lassen sich die folgenden drei Typen unterscheiden:

Typ I:

Alle drei Paare von gegenüberliegenden Ecken (= Gegeneckenpaar) liegen symmetrisch bezüglich einer Geraden.



*R. Bricard: Mémoire sur la théorie de l'octaèdre articulé (1897)

Bricard Oktaeder

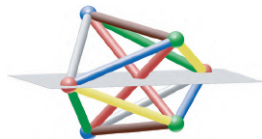
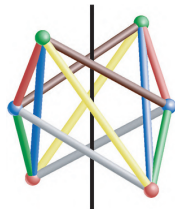
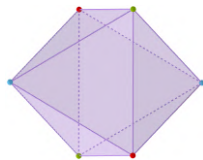
Alle **paradox beweglichen** Oktaeder wurden von **Raoul Bricard*** (1870*–1943[†]) bestimmt. Dabei lassen sich die folgenden drei Typen unterscheiden:

Typ I:

Alle drei Paare von gegenüberliegenden Ecken (= Gegeneckenpaar) liegen symmetrisch bezüglich einer Geraden.

Typ II:

Zwei Gegeneckenpaare liegen symmetrisch bezüglich einer Ebene, welche das verbleibende Gegeneckenpaar enthält.



*R. Bricard: Mémoire sur la théorie de l'octaèdre articulé (1897)

Typ III:

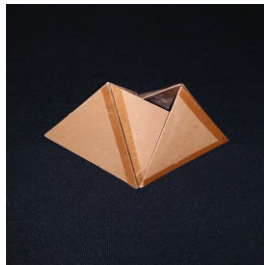
Dieser Typ besitzt zwei Lagen, in denen alle Seitenflächen in eine Ebene zusammenfallen. In einer solchen flachen Stellung kann das Oktaeder wie folgt konstruiert werden:

Bricard Oktaeder

Animationen freundlicherweise zur Verfügung gestellt von Matteo Gallet, Georg Grasegger, Jan Legerský und Josef Schicho.

Bricard Oktaeder

Animationen freundlicherweise zur Verfügung gestellt von Matteo Gallet, Georg Grasegger, Jan Legerský und Josef Schicho.



Danke für Ihr Interesse!

Download der Präsentation als PDF unter:

www.dmg.tuwien.ac.at/nawratil/talks.html

