TECHNISCHE UNIVERSITÄT WIEN
Vienna | Austria

DIPLOMARBEIT

Didaktische Aufbereitung der Kinematik für den Unterricht in Darstellender Geometrie

zur Erlangung des akademischen Grades

Magistra der Naturwissenschaften (Mag. rer.nat)

im Rahmen des Diplomstudiums

Lehramtsstudium UF Mathematik und UF Darstellende Geometrie

eingereicht von

Theresa Trnka
Matrikelnummer: 0825484

ausgeführt am
Institut für Diskrete Mathematik und Geometrie
der Fakultät für Mathematik und Geoinformation
der Technischen Universität Wien

unter der Anleitung von
Priv.-Doz. Dr.techn. Mag.rer.nat. Georg Nawratil

Wien, 3. April 2020

Theresa Trnka | Dr. Georg Nawratil

Danksagung

Weil meine Studienjahre nun vorbei sind, will ich auf diesem Wege jenen Menschen meinen Respekt und Dank aussprechen, die mich in diesen Jahren stets begleitet, beeinflusst, motiviert und gestärkt haben.

Die Schule prägt ausnahmslos jeden Menschen in Österreich, sie ist soviel mehr als nur Bildungseinrichtung. Viel Turbulentes prallt in dieser Institution aufeinander, sie bietet Komödien und Tragödien, schallendes Gelächter und bittere Tränen. Deshalb gebührt allen voran mein Respekt all jenen Personen, die mit Engagement, Kraft und Motivation in diesem komplexen System ihr Bestes geben. Dabei denke ich vor allem an Frau Mag. Ulrike Guttenbrunner, meiner Klassenvorständin für 8 lange Jahre, die für mich und meinen mit Steinen gepflasterten Weg stets Kompass und Stütze war. Ihr verdanke ich meine ersten Schritte im selbstständigen Unterrichten in ihren Einheiten, sie hat mich als erste stets dazu ermutigt. Der gesamte Lehrkörper, den ich als Schülerin kennen lernen durfte, verdient meinen Dank, da ich durch ihn besondere Unterstützung auch in nicht schulischen Bereichen erfahren durfte. So wurde mir gezeigt, wie wertvoll diese Institution sein kann und dass es schlussendlich der Mensch in ihr ist, auf den es ankommt. Ihnen allen habe ich meinen Weg in den Lehrberuf zu verdanken und darauf bin ich stolz. Besonders möchte ich noch Herrn Mag. Günther Koschka danken, der mich in Darstellender Geometrie stets gefördert und gefordert hat. Aufgrund meiner grundsätzlichen Faszination für die Geometrie und seines überaus gehaltvollen Unterrichts, kam für mich kein anderes Studium in Frage.

Das Unterrichtsfach Darstellende Geometrie sowie auch Mathematik an der TU zu studieren war und ist für mich auch aufgrund der hervorragenden Lehrenden eine ausgezeichnete Wahl: anspruchsvoll aber herzlich, auf Augenhöhe und kompetent. Einen herzlichen Dank an meinen Diplomarbeitsbetreuer Herrn Dr. Georg Nawratil, von dessen fachlicher Kompetenz ich nicht nur über Jahre profitieren durfte, sondern der mir ebenso die Möglichkeit eröffnete, durch die weitgehend frei gestaltbare Diplomarbeit meine Professionalität zu schulen und endgültig unter Beweis zu stellen. Für seinen sehr stressfreien und geduldigen Zugang zu meiner Abschlussarbeit und die schlussendlich sehr gewissenhafte fachliche Begleitung bin ich überaus dankbar.

Abschließend allerdings gebührt der größte Dank all jenen Personen, die ich liebe und die mich lieben, die all die Jahre an meiner Seite gestanden sind und weiterhin durch dick und dünn mit mir gehen werden. Katharina und Matthias, die wie keine Anderen verstehen und fühlen wie ich. Sebastian, der mit Herz und Seele für unsere Freundschaft einsteht, treu und stark. Julia und Teresa, die mir immer wieder zeigen, dass es sich gemeinsam besser lachen, weinen und kämpfen lässt. Isabella und Familie, die schon so lange auch Familie für mich bedeuten. Zu guter letzt Lukas, mein Herz. Ich danke dir für deine Kraft, deinen Willen, deine Aufopferung, deine Hingabe, deine Verbundenheit. Mit allem was ich habe stehe ich auch hinter dir. So viele wunderbare Menschen an meiner Seite zeigen mir, dass mein Weg für mich der richtige ist.

Danke.

in memoriam
Ingrid

Kurzzusammenfassung

Die vorliegende Diplomarbeit ist eine systematische didaktische Analyse und Aufbereitung der Kinematik für das Unterrichtsfach Darstellende Geometrie in Allgemeinbildenden Höheren Schulen. Die Kinematik und ihre Inhalte werden nach sorgfältig ausgewählten didaktischen Zugängen und Überlegungen und nach aktuellem Stand der Didaktik der Geometrie in geordneter Weise analysiert, bearbeitet und aufbereitet. Ziel der gesamten vorliegenden Diplomarbeit ist es, die Kinematik als Wissenschaft, ihre Grundpfeiler und Inhalte für den Schulunterricht und dadurch für Schülerinnen und Schüler in einfach verständlicher, strukturierter Form zugänglich zu machen.

In einem ersten Schritt werden die fachlichen Inhalte der Kinematik im Hinblick auf ihre schulische Relevanz bewertet, thematisch eingegrenzt und aufbereitet. Darauf aufbauend folgt eine Diskussion der bisherigen Rolle der Kinematik im Schulunterricht. Dafür wird zunächst der aktuelle Lehrplan analysiert und anschließend eine sorgfältige Einbettung der kinematischen Inhalte in den Lehrplan vorgenommen. In einem nächsten Schritt wird das Stoffgebiet nach fundierten fachdidaktischen Zugängen bearbeitet. Dabei wird die Kinematik nach aktuellsten Schulstandards gemäß des Lehrplans und Literatur anwendungsorientiert analysiert. Diese Anwendungsorientierung drückt sich dabei nicht nur in der Besprechung von fachdidaktischen Strategien verbunden mit der Kinematik aus; zusätzlich werden auch ganz konkret passende Beispiele ausgewählt, aufbereitet und besprochen. Etwaige Schwierigkeiten werden aufgezeigt, dazugehörige Lösungsvorschläge angeboten und an geeigneten Stellen Querverweise in andere Gebiete und Themenfelder erbracht. Auf diesen sorgsam aufbereiteten theoretischen Teil der Diplomarbeit folgt schlussendlich ein umfangreicher praktischer Teil, der über sogenannte Module (konkrete Aufgabenstellungen) alle gewonnenen Erkenntnisse auf leicht verständliche Weise einführt und zur direkten Anwendung bringt. Dieser Teil richtet sich direkt an Lehrpersonen, denen es durch diese Modulaufbereitung möglich werden soll, anhand passender Beispiele einen guten Einstieg in den kinematischen Schulunterricht realisieren zu können.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **1**
1.1 Motivation . . . 1
1.2 Adressaten . . . 1

2 Kinematik **2**
2.1 Begriffsbestimmung . . . 2
2.2 Historische Entwicklung . . . 2
2.3 Aktualität . . . 6
2.4 Fachlicher Umriss . . . 6
2.4.1 Stoffauswahl im Sinne didaktischer Reduktion . . . 6
2.4.2 Ebene Kinematik - relevante Grundlagen . . . 7
2.4.3 Ausgewählte kinematische Inhalte . . . 14
2.4.3.1 Trochoidenbewegung . . . 15
2.4.3.2 Das Gelenkviereck und seine Koppelkurven . . . 16
2.4.4 Visuelle Darstellung . . . 21
2.4.5 Online Sammlungen . . . 23
2.5 Relevanz in Fachgebieten und Ausbildungen . . . 23

3 Kinematik im Schulunterricht **25**
3.1 Bewegliches Denken . . . 25
3.2 Einbettung im Lehrplan . . . 25
3.2.1 Fachliche Einbettung . . . 26
3.2.2 Zur Bildungs- und Lehraufgabe . . . 27
3.2.3 Beiträge zu den Bildungsbereichen . . . 27
3.3 Lehrzielformulierungen . . . 28
3.4 Klarstellung . . . 28

4 Analyse kinematischer Inhalte nach ausgewählten didaktischen Zugängen **29**
4.1 Begriffe der Kinematik und ihre Begriffsbildung . . . 31
4.1.1 Der Begriff *Kinematik* . . . 31
4.1.2 Der Begriff *Bewegung* . . . 34
4.1.3 Der Begriff *Momentanpol* . . . 36
4.1.4 Die Begriffe *Getriebe, Gelenke* und *Glieder* . . . 37
4.2 Beweise und Argumentation . . . 37

4.3 Klassifikation ausgewählter Kinematiken . . . 39
4.3.1 Zur Bewegung eines Gelenkvierecks . . . 40
4.3.2 Zur Rollung des Kreises . . . 41
4.4 Kinematisches Problemlösen . . . 41
4.5 Konstruieren in der Kinematik . . . 43
4.5.1 Zur händischen Konstruktion . . . 43
4.5.2 Zur DGS Konstruktion . . . 44
4.5.3 Zur Besonderheit der Verwendung von DGS in Verbindung mit kinematischen Inhalten: die differenzengeometrische Konstruktion von Tangente und Krümmungskreis . . . 45
4.6 Kinematische Modelle und Modellbildung . . . 47
4.6.1 Kinematisches Modellieren . . . 47
4.6.2 Modelle . . . 49

5 Konkrete Modulaufbereitung für den Unterricht 51
5.1 Modul A - der lange Weg zur Wissenschaft . . . 52
5.2 Modul B - die Kunst der Kinematik, die Kinematik in der Kunst . . . 55
5.2.1 Mögliche Aufgabenstellungen . . . 57
5.2.2 Weitere mögliche Aufgabenstellungen . . . 58
5.2.3 Lösungen der Aufgaben . . . 58
5.3 Modul C - Gibt es eine Drehung? . . . 61
5.3.1 Weitere mögliche Aufgabenstellungen . . . 61
5.3.2 Lösungen der Aufgaben . . . 62
5.4 Modul D - eine Behauptung, wer hat recht? . . . 64
5.4.1 Lösungen der Aufgaben . . . 65
5.5 Modul E - Der Fundamentalsatz der ebenen Kinematik . . . 66
5.5.1 Der Beweis *DdD* - Deckung durch Drehung . . . 66
5.5.2 Der Beweis *DdS* - Deckung durch Spiegelung . . . 68
5.5.3 Weitere mögliche Aufgabenstellungen . . . 69
5.5.4 Lösungen der Aufgaben . . . 70
5.6 Modul F - und alles dreht sich! - der Momentanpol . . . 71
5.6.1 Wie man ihn konstruiert . . . 71
5.6.2 Wie er entsteht - der intuitive Grenzübergang . . . 71
5.7 Modul G - Anwendung des Momentanpols . . . 74
5.7.1 Mögliche Aufgabenstellungen . . . 74
5.7.2 Lösungen der Aufgaben . . . 74

5.8 Modul H - tatsächliche Bewegungen in GeoGebra 77
5.8.1 Die Kurbel als Antrieb 77
5.8.2 An der Kurbel hängt alles 78
5.8.3 Mögliche Aufgabenstellungen 80
5.8.4 Lösungen der Aufgaben 80
5.9 Modul I - das viergliedrige Drehgelenkgetriebe und seine Namen 82
5.9.1 Mögliche Aufgabenstellungen 84
5.9.2 Lösungen der Aufgaben 84
5.10 Modul J - passendes Koppelgetriebe finden 86
5.10.1 Mögliche Aufgabenstellungen 87
5.10.2 Weitere mögliche Aufgabenstellungen 88
5.10.3 Lösungen der Aufgaben 88
5.11 Modul K - Geradführungen 90
5.11.1 Mögliche Aufgabenstellungen 92
5.11.2 Lösungen der Aufgaben 92
5.12 Modul L - Differenzengeometrische Konstruktion 93
5.12.1 Mögliche Aufgabenstellungen 93
5.12.2 Lösungen der Aufgaben 95
5.13 Modul M - das Break Dance, von der Maschine zum Modell 96
5.13.1 Mögliche Aufgabenstellungen 97
5.13.2 Lösungen der Aufgaben 98
5.14 Modul N - das Break Dance und seine Bewegung 100
5.14.1 Mögliche Aufgabenstellungen 101
5.14.2 Lösungen der Aufgaben 101
5.15 Modul O - das Break Dance, die Bahnkurve der Gondel 103
5.15.1 Mögliche Aufgabenstellungen 104
5.15.2 Lösungen der Aufgaben 105

6 Schlusswort **108**

A Anhang **a**
A.1 Literaturverzeichnis . . . . . a
A.2 Abbildungsverzeichnis . . . . . d
A.3 Dokumentation . . . . . g

1 Einleitung

1.1 Motivation

Das Leben besteht aus Bewegung. Diese zu erkunden, zu beschreiben und zu nutzen ist seit jeher ein menschliches Anliegen. Angefangen in frühester Zeit durch Nutzbarmachung von Werkzeug hin zu hoch technologisierten Bewegungsautomaten, die Kinematik kann aus dieser Entwicklung nicht weggedacht werden. Sie befasst sich mit Bewegung und ihren Gesetzen. Dabei stehen geometrische Betrachtungen im Vordergrund, denn sie beschreibt Lageänderungen von Objekten ohne vom oder auf das Objekt wirkende Kräfte zu berücksichtigen. So ist sie ebenfalls für die Analyse sämtlicher Mechanismen zuständig. Obwohl kinematische Wissenschaft die Menschen stets umgibt und kinematische Anwendung in praktisch jedem sich bewegenden Gegenstand der heutigen Zeit sichtbar ist, wird sie in der Schule kaum erwähnt. Diese Arbeit beschäftigt sich deshalb mit der ausführlichen didaktischen Aufbereitung kinematischer Inhalte für den Schulunterricht. Die Frage nach der Schultauglichkeit der Kinematik, der daraus folgenden systematischen Einteilung sowie der Auswahl an konkret kinematischen Inhalten wird in dieser Arbeit beantwortet. Etwaig auftretende didaktische Schwierigkeiten werden aufgezeigt, dazugehörige Lösungsvorschläge angeboten und fachdidaktische Strategien diskutiert. Die theoretischen Ergebnisse werden zudem in einem umfangreichen praktischen Teil manifestiert. Motivation zur Verfassung dieser Arbeit ist die Aussicht, den Schülerinnen und Schülern die sie umgebende mechanische Welt und ihre Bewegung mithilfe der Geometrie und der Kinematik näher zu bringen.

1.2 Adressaten

Diese Arbeit richtet sich primär an Lehrerinnen und Lehrer, die ein Interesse an der Kinematik aufweisen, jedoch durch fehlende didaktische Literatur diesem Thema weniger Raum geben können, als sie vermeintlich wollen. Ziel ist, durch diese Aufbereitung den Zugang zu Inhalten der Kinematik unter didaktischen Aspekten für Lehrerinnen und Lehrer zu erleichtern und dadurch größere Anwendung im schulischen Kontext zu fördern.

2 Kinematik

2.1 Begriffsbestimmung

Das Gebiet *Kinematik* beschäftigt sich mit Bewegung und ihrer geometrischen Beschreibung. Die erhaltene Lehre der Bewegung schließt in ihrer Betrachtungsweise die bewegungsverursachenden Kräfte grundsätzlich aus. So beinhalten kinematische Fragestellungen jene Beschreibungen, in denen es um Positionen von Objekten, ihre Lagebeziehungen zueinander, ihren zurückgelegten Weg und ihrer Bewegungszustände wie Ruhelage, Geschwindigkeit und Beschleunigung geht. Diese Beschreibungen sind von mathematischer und auch konstruktiv-geometrischer Natur. Die Kinematik ist ein Gebiet der Mechanik. Sie verkörpert die Basis mechanischer Betrachtung, die sich durch Hinzunahme der von außen und innen wirkenden Kräfte erweitert und in das Gebiet der Dynamik wandelt.

2.2 Historische Entwicklung

Um die Kinematik besser verstehen zu können, empfiehlt es sich einen genaueren Blick auf ihre Entwicklung im historischen Kontext zu werfen. Früh datierte Einzelleistungen, die sich mit Bewegung und vor allem ihrer praktischen Nutzbarkeit auseinandersetzten, waren etwa Archimedes von Syrakus[1], Leodardo da Vinci[2] oder auch Gerolamo Cardano[3]. Weitere interessante Beispiele finden sich im Buch „Technische Mechanik“ von Bruno Assmann und Peter Selke (2004), hier soll nicht weiter darauf eingegangen werden. Erst mit der Entwicklung physikalischer Methoden, der Beschreibung der Naturgesetze durch das Etablieren von Experimenten als Beweise und der dahinterstehenden, immer präziser werdenden Mathematik konnte mehr und mehr Klarheit über die Bewegung und ihre Gesetze geschaffen werden. So entdeckt Galileo Galilei[4] etwa den Zusammenhang von Weg, Zeit und Geschwindigkeit für gleichförmige Bewegungen. Isaac Newton[5]

[1] Archimedes von Syrakus, 287 bis 212 v. Chr., griechischer Mathematiker, Physiker, Ingenieur; von ihm stammt die sogenannte archimedische Schraube, er war mit dem Hebelgesetz vertraut und konstruierte den Flaschenzug.

[2] Leonardo da Vinci, 1452-1519, italienischer Maler, Bildhauer, Ingenieur, Naturphilosoph, ein klassischer Vertreter der Künstler-Ingenieure der Renaissance; seine Ideen ergaben sich zum größten Teil aus technischen Anwendungen, seine maschinellen Erfindungen sind vielseitig, darunter finden sich Flugmaschinen, Panzer und Boote, Erfindungen für Textilindustrie, Küchenwerkzeuge, Getriebeelemente uvm.

[3] Gerolamo Cardano, 1501-1576, italienischer Arzt, Philosoph und Mathematiker; er beschäftigte sich u.a. mit Zykloiden, weshalb eine Sonderform auch die Cardanschen Kreise genannt werden.

[4] Galileo Galilei, 1564-1642, italienischer Mathematiker, Physiker, Ingenieur, Astronom, Philosoph; er erkannte zum Beispiel auch, dass alle Körper gleich schnell fallen.

[5] Isaac Newton, 1642-1727, Philosoph, Naturforscher, Physiker; sein Versuch, die Physik systematisch aufzubauen, hatte große folgenreiche Wirkung, so etwa stellte er das Gravitationsgesetz auf.

konnte die Erforschung der Bewegungen so zuspitzen, dass auf ihn die klassische Mechanik mit ihren drei Bewegungsgesetzen zurückgeht. Damit eröffnete sich eine Wissenschaft, die sich, neben ihrer mit dem Fortschreiten der Mathematik eng verwobenen theoretischen Weiterentwicklung, zunehmend auf die mittlerweile mehr und mehr aufkommende Technik fokussieren konnte. Mit der Industrialisierung im 18. Jahrhundert tritt auch erstmals das systematische Studium von Bewegungsvorgängen auf. Der Einfluss der Maschinenmechanik wuchs, die Bewegungs- und Synthesegesetze der Maschine unterwarfen sich mehr und mehr wissenschaftlicher Herangehensweise. Schon mit der Gründung der ersten polytechnischen Schulen um 1800 vollzog sich eine Abhebung der Bewegungsmechanismenlehre zur allgemeinen Maschinenlehre (vgl. Reuleaux, 1875).

Die Bezeichnung *Kinematik*[6] findet sich zum ersten Mal 1834 in einem Essai des französischen Physikers Ampère[7], und als die kinematische Untersuchung kurz darauf dezidiert in die Analyse von Bewegungsbetrachtungen aufgenommen wurde, genoss die theoretische Kinematik stets Wandlung und Ausbau. Es trat daraufhin ein Spannungsfeld zwischen der Geometrie und der Mechanik ein, welches von mehreren Seiten versucht wurde, zu beseitigen. Der Wunsch nach einer stabilen Grundlagenlehre der Maschine wurde zunehmend größer. Die alleinig geometrische Betrachtungsweise der rein äußeren Bewegungsumwandlungsmöglichkeiten wurde der Maschinenlehre im Sinne ihrer Grundlagenforschung zu wenig. Eine genaue, damals aktuelle Beschreibung dieser Schwierigkeit findet sich in Reuleaux' „Theoretische Kinematik“ (1875), eine moderne Abhandlung dieser Situation kann in Mauersbergers[8] „Franz Reuleaux und die Kinematik“ (2005) nachgelesen werden, die folgenden Gedanken lehnen sich ebenfalls an diese beiden Werke.

An dieser Stelle treffen sich der Exaktifizierungscharakter der Mathematik und Physik und die Entwicklung der Maschine im Allgemeinen. Um zu verstehen, welche Rolle die Maschine und die in ihrer Schaffung inkludierten Denkmuster in der Entwicklung der Kinematik hatten, ist ein kleiner Exkurs in die Situation der damaligen Maschinenwissenschaften von Vorteil. Franz Reuleaux soll in dieser Betrachtungsweise eine zentrale Rolle einnehmen. Der 1829 bei Aachen geborene, selbstständige Ingenieur studierte bei Ferdinand Redtenbacher[9] Maschinenbaukunde in Karlsruhe. In Bonn und Berlin beschäftigte er sich zunehmend mit Philosophie, Mathematik und Mechanik. Neben seiner wissenschaftlichen Laufbahn in Deutschland und der Schweiz

[6] abgeleitet vom altgriechischen Wort $\kappa\iota\nu\eta\mu\alpha$ kinema, heißt bewegen.

[7] André-Marie Ampère, 1775-1836, französischer Mathematiker und Physiker; das Wort Kinematik erscheint in seinem Essai „Philosophie des sciences“, Paris, 1834.

[8] Klaus Mauersberger, *1950 , ehemaliger Direktor der Kustodie am Institut für Geschichte der Technik und Technikwissenschaften der Technischen Universität Dresden.

[9] Ferdinand Redtenbacher, 1809-1863, gilt als Begründer des wissenschaftlichen Maschinenbaus in Deutschland.

im Bereich des Maschineningenieurswesen, verspürte er große Lust am Reisen. Seine Allgemeinbildung und sein Interesse für kulturelle Zusammenhänge waren Grund für einen durchaus erfrischenden Zugang zur Fachwissenschaft. Neben seinen Vorlesungen schrieb er auch Lehrbücher. Er beschäftigte sich zunehmend mit der Kinematik, um daraus die Maschinenkinematik abzuleiten. Sein bahnbrechendes Lehrbuch „Theoretische Kinematik“ erschien 1875 und wurde „richtungsweisend für die Systematik der Getriebelehre“ (Wunderlich, 1970, S. 13). Reuleaux hinterfragt die Maschine und ihre Bauweise von Grund auf, setzt sie in kulturellem Zusammenhang, taucht in die Anfänge der Menschheit um die ersten Anzeichen für Maschinen im weitesten Sinne zu entdecken. Seinem Ansatz nach soll es gelingen, aus den Anfängen der Technik, den ersten Menschenhand erfundenen und verwendeten Maschinen, durch ihre stetige Wandlung und Verbesserung auf den Kern der Wissenschaft zu stoßen. Einzelne Mechanismen und ihre Funktionsweise waren durchaus sehr bekannt, der grundlegende Zusammenhang aber fehlte. Reuleaux interessierte sich daher weniger für die historische Einbettung der Maschine, als vielmehr für die dahinterstehende geistige Entwicklung. Seiner Argumentation nach müsse es ein gemeinsames Bildungsgesetz geben, lassen sich doch ähnliche Konstruktionen in ähnlich entwickelten Völkern beobachten[10]. Er sucht nach der „Entstehung der Maschine im Menschengeist“(Reuleaux, 1875, S. 195). Dabei gelang ihm die Aufschlüsselung innerer Strukturen, demnach eine Maschine von ihren einzelnen Teilen mehr abhängen würde, als vielfach angenommen. So stieß er auf sogenannte kinematische Ketten, welche eine Bewegung *erzwingen* würden - der Begriff *Zwanglauf* geht auf Reuleaux zurück. Dieser Gedanke lässt eine konsequente Strukturanalyse zu, welche zukunftsweisende Früchte tragen sollte. Angelehnt an die mathematischen Denkstrukturen ist sein Ansatz streng axiomatisch. Entgegen der verbreiteten Mehrheitsmeinung, die Erfindung einer Maschine wäre ohne eine Geisteseingebung unmöglich, war Reuleaux davon überzeugt, die kinematische Analyse und die daraus folgenden exakten Erkenntnisse sind eine methodische Anleitung zur Maschinenfindung.

Reuleaux’ Kinematik stieß auf Zuspruch wie auch auf heftige Kritik. Sein Zugang zur Kinematik bedurfte noch weiteren Ausbaus, in einigen Standpunkten korrigierte sich die Wissenschaft des Maschinenwesens - so etwa vollzog sich die Trennung der geometrischen Beobachtung der Maschinenteile von äußerlich wirkenden Kräften. Die dadurch entstandene Betrachtungsweise inkludiert die Dynamik als eigenständig zu behandelnden Sachverhalt im Maschinenwesen. Vorerst aber blieb auch die wissenschaftliche Konstruktion der Maschine aus, da die realen Probleme

[10]So etwa die Qirl- und Drehbewegung des feuermachenden Stabes wie auch die des Bohrers. Die Spindel - Reuleaux besaß eine beachtliche Sammlung - existierte in verschiedensten Völkern in unterschiedlichen Ausführungen genauso wie der Wagen, der etwa bei den Ägyptern sowie auch den Griechen zu finden ist.

zu komplex waren. Trotz aller Kritik und Anfeindungen, im Bereich der Kinematik war Reuleaux Vorreiter, seine Grundlagen der Bewegungsgeometrie angewendet auf Mechanismen sind wegbereitend.

Auf Reuleaux' „Theoretische Kinematik" folgte bald darauf das erste „Lehrbuch der Kinematik", 1888 erschienen, geschrieben von Ludwig Burmester[11]. In diesem vereinte er die theoretischen Überlegungen mit der praktischen Anwendbarkeit und schaffte es, die Position der Geometrie als geeignetes Darstellungsmittel zu klären (vgl. Luck, 1988). Was die Kinematik nun für das darauffolgende Jahrhundert geleistet hat, entwickelte sich aus dem Prozess der Industrialisierung. Durch die massenhaft maschinelle Umsetzung von eigentlicher Handarbeit, änderte sich der Produktionsprozess. Der Mensch transformierte vom zuvor handwerklich Ausführenden zum Begleitakteur der Maschine. Eine sehr interessante Darlegung des sozialen, ökonomischen, kulturellen und auch technischen Wandels verbunden mit der Mechanisierung des 18. und 19. Jahrhunderts findet sich in Mauersbergers „Maschinenwesen und technische Kultur" (1998). Diese in Mauersbergers Artikel beschriebenen Entwicklungen hatten für das 20. Jahrhundert zur Folge, dass der Anspruch an die Maschinenwissenschaft stetig gestiegen ist. Die Getriebekinematik verhalf dazu, die Maschine besser und akkurater zu verstehen, sie präziser und leichtgängiger funktionieren zu lassen und sie so zu konstruieren, dass sie zuverlässiger, vielseitiger und vor allem sicherer wurde.

Die Kinematik konnte weltweit ihre Wurzeln schlagen, sie wurde und wird seither an allen Technischen Hochschulen gelehrt und gepflegt, wie etwa von Rudolf Mehmke[12], Rudolf Beyer[13], Johannes Volmer[14], sowie von den Österreichern Walter Wunderlich[15], Manfred Husty[16] und Hellmuth Stachel[17].

[11] Ludwig Burmester, 1840-1927, deutscher Ingenieurswissenschaftler, Mathematiker und Erfinder; Professor für Darstellende Geometrie und Kinematik an der TH München;

[12] Rudolf Mehmke, 1857-1944, deutscher Mathematiker, Professor für Darstellende Geometrie und Projektive Geometrie an der Technischen Hochschule in Stuttgart;

[13] Rudolf Beyer, 1892-1960, TH Dresden und TH München;

[14] Johannes Volmer, 1930-2015, deutscher Prof. für Getriebetechnik; Vielzahl an veröffentlichten Lehrbüchern der Getriebetechnik;

[15] Walter Wunderlich, 1910-1998, österreichischer Mathematiker und Geometer, TU Wien; mit rund 60 Publikationen im Gebiet der Kinematik konnte er auch andere Autoren inspirieren. Eine ausführliche Beschreibung seiner Wirkung ist nachzulesen in dem von Hellmuth Stachel formulierten Nachruf (1998).

[16] Manfred Husty, *1954, österreichischer Professor für Geometrie, Universität Innsbruck; „In der Scientific Community gilt Husty als Innovator auf dem Gebiet der Kinematik." (Zitat aus einer Mitteilung der Universität Innsbruck zur Verleihung des Ehrenkreuz an Manfred Husty. (zuletzt eingesehen am 17.02.2020), Zugriff unter https://www.uibk.ac.at/newsroom/ehrenkreuz-fuer-manfred-husty.html.de);

[17] Hellmuth Stachel, *1942, österreichischer Mathematiker und Professor für Geometrie an der TU Wien.

2.3 Aktualität

Johannes Volmer verstarb im Jahr 2015. In seinem Nachruf veröffentlicht auf der Internetseite der Technischen Universität Chemnitz (Berer, 2015) findet sich unter anderem eine Passage, die sehr gut verdeutlicht, in welchen Bereichen die Kinematik im 20. Jahrhundert Einfluss genommen hat: „erkannte und benannte Prof. Volmer die enorme Bedeutung der Industrieroboter für die Automatisierung im Maschinenbau. Bis zum Ende seiner aktiven Berufslaufbahn im Jahr 1995 entwickelte er mit seinen Mitarbeitern Labormuster von Robotern und Handhabungsgeräten, Greifern, Wechseleinrichtungen und Fügemechanismen.“ So sind kinematische Problemstellungen zu den Grundlagen der modernen Robotik zu zählen. Die Frage nach ebener und vor allem auch räumlicher Beweglichkeit, ist in der Robotergeometrie von Bedeutung.

2.4 Fachlicher Umriss

2.4.1 Stoffauswahl im Sinne didaktischer Reduktion

Im Sinne der didaktischen Aufbereitung wurde die Stoffmenge stark reduziert. Eingegangen wird nur auf die absolut notwendigen Grundlagen zum Verständnis der Kinematik. Durch die starke Inhaltsreduzierung ist demnach eine weniger starke Reduktion in Komplexität vonnöten. Weiters wurden Inhalte mit exemplarischem Charakter ausgewählt, die kinematische Untersuchungen und Anwendungen verdeutlichen sollen und ebenso passend zu der in Kapitel 3 aufbereiteten Lehrplaneinbettung sind. Der Faktor *Zeit* beziehungsweise *zeitliche Begrenzung* wurde für die Reduktion nicht extra berücksichtigt. So verstehen sich die nachstehenden geometrischen und mathematischen Grundlagen als eine explizite Auswahl, die keinen Anspruch auf Vollständigkeit erhebt. Es seien nur diejenigen Definitionen und Sätze angeführt, die für das Verständnis der Kinematik und die Bearbeitung der hier relevanten kinematischen Inhalte vonnöten sind.

Die folgend dargelegten geometrischen Grundlagen finden sich in ausführlicher Bearbeitung in „Erlebnis Elementargeometrie“ von Siegfried Krauter und Christine Bescherer (2012, S. 18–35), sowie im Buch „Leitfaden Geometrie“, von Susanne Müller-Philipp und Hans-Joachim Gorski (2008, S. 102–150).

Definition 2.1. *Die* ***Euklidische Ebene*** $\mathbb{E}2$ *oder auch zweidimensionaler euklidischer Raum ist eine affine Ebene auf der eine euklidische Metrik definiert ist.*

Die gesamte Bearbeitung und alle relevanten Themenfelder beschränken sich folgend auf die ebene Kinematik und somit auf Bewegungen innerhalb der euklidischen Ebene $\mathbb{E}_2$. Die räumliche Kinematik ist für die schulrelevante Auswahl ungeeignet, da sie den Rahmen und auch die Komplexität des schulisch Möglichen sprengen würde. Folgend wird nun durchgehend und konsistent die Rede von der ebenen Geometrie und ebenen Kinematik sein, auch wenn dies oft

nicht explizit angeschrieben ist.

2.4.2 Ebene Kinematik - relevante Grundlagen

Es liegt nahe, sich zuerst mit dem Begriff der (ebenen) Kongruenzabbildungen zu beschäftigen.

Definition 2.2. *Gegeben sei eine Gerade a. Die Abbildung σ_a heißt* ***Geradenspiegelung****, wenn gilt:*

$$(I)\ \forall P \in a:\ P' = P \qquad (II)\ \forall P \notin a:\ a \perp \overline{PP'} \quad \textit{und} \quad a \textit{ halbiert } \overline{PP'} \tag{2}$$

Definition 2.3. *Jede Verkettung endlich vieler Geradenspiegelungen σ_{a_n} mit $n \in \mathbb{N}$ heißt* ***Kongruenzabbildung****. Bei einer geraden Anzahl $n = 2 \cdot k$ mit $k \in \mathbb{N}$ spricht man von* ***gleichsinniger Kongruenzabbildung*** *κ^+ oder auch* ***eigentlicher Bewegung****. Bei ungerader Anzahl $n = 2 \cdot k + 1$ von* ***ungleichsinniger Kongruenzabbildung*** *κ^- oder auch* ***uneigentlicher Bewegung****. Die Menge der Kongruenzabbildungen heißt $\mathbb{K}$.*

Satz 2.1. *($\mathbb{K}$;$\circ$) ist eine Gruppe mit $\circ$ als Verkettung/Nacheinanderausführung.*

Beweis. - ($\mathbb{K}$;$\circ$) ist abgeschlossen: seien $\kappa_1, \kappa_2 \in \mathbb{K}$ mit $\kappa_1 = \sigma_{a_m} \circ \cdots \circ \sigma_{a_1}$ und $\kappa_2 = \sigma_{b_n} \circ \cdots \circ \sigma_{b_1}$ mit $m, n \in \mathbb{N}$. Dann gilt: $\kappa_2 \circ \kappa_1 = (\sigma_{a_m} \circ \cdots \circ \sigma_{a_1}) \circ (\sigma_{b_n} \circ \cdots \circ \sigma_{b_1})$. Nach Def. 2.3 gilt: $\kappa_2 \circ \kappa_1 \in \mathbb{K}$;

- $\circ$ ist assoziativ: sei $P \in \mathbb{E}_2$
  für die Verkettung gilt: $\kappa_3 \circ \kappa_2 \circ \kappa_1 : P \xrightarrow{\kappa_1} P^* \xrightarrow{\kappa_2} P^{**} \xrightarrow{\kappa_3} P^{***}$
  es folgt $\kappa_3 \circ (\kappa_2 \circ \kappa_1) : P \xrightarrow{\kappa_2 \circ \kappa_1} P^{**} \xrightarrow{\kappa_3} P^{***}$ und $(\kappa_3 \circ \kappa_2) \circ \kappa_1 : P \xrightarrow{\kappa_1} P^* \xrightarrow{\kappa_3 \circ \kappa_2} P^{***}$
  es gilt also $\kappa_3 \circ (\kappa_2 \circ \kappa_1) = (\kappa_3 \circ \kappa_2) \circ \kappa_1 \quad \Rightarrow \quad \circ$ ist assoziativ;
- Das Neutrale Element ist die Identität (hier ohne Beweis);
- κ ist umkehrbar, d.h, zu jedem κ existiert ein Inverses $\kappa^{(-1)}$, sodass $\kappa^{(-1)} \circ \kappa = id$ (hier ohne Beweis);
  $\Rightarrow$ ($\mathbb{K}$;$\circ$) ist eine Gruppe. □

Satz 2.1 zeigt, dass die Verkettung von Kongruenzabbildungen wiederum Kongruenzabbildungen mit denselben Eigenschaften sind, wie Längen- Winkel- und Flächentreue, Bijektivität und Geradentreue.

In Hinblick auf kinematische Fragestellungen sind nur diejenigen abstandserhaltenden Abbildungen der euklidischen Ebene von Interesse, die gleichsinnig beziehungsweise orientierungstreu sind. Bei Abbildung einer Figur bleibt ihr Umlaufsinn erhalten. Aufgrund dieser Eigenschaft sind gleichsinnigen Kongruenzabbildungen κ^+ diejenigen, die sich zur Beschreibung realer Bewegungen eignen.

Definition 2.4. *Die Verkettung zweier Geradenspiegelungen σ_{a_1} und σ_{a_2} mit $a_1 \cap a_2 = \{S\}$ heißt* ***Rotation*** *κ^r oder* ***Drehung****.*

Definition 2.5. *Die Verkettung zweier Geradenspiegelungen σ_{a_1} und σ_{a_2} mit $a_1 \| a_2$ heißt* ***Translation*** *κ^t oder* ***Schiebung****.*

Nach Definition 2.3 sind Rotation und Translation gleichsinnige Kongruenztransformationen, da sie aus zwei Geradenspiegelungen zusammengesetzt sind.

Satz 2.2. *Gegeben sind 2 Strecken $[AB]$ und $[A'B']$ mit $\overline{AB} = \overline{A'B'}$.*
Dann $\exists!\ \kappa^+ : \kappa^+(A) = A'$ und $\kappa^+(B) = B'$

Beweis. Die Verbindungsgerade $g := (AB)$ sei orientiert von A nach B. So auch die Gerade $g' := (A'B')$. $\mathbb{E}^2$ wird durch g in zwei Halbebenen ε_{li} (linksgelegen von g bezüglich der Orientierung $\overrightarrow{AB}$) und ε_{re} (rechtsgelegen von g) geteilt. g' teilt die Ebene in ε'_{li} und ε'_{re}. κ sei Kongruenzabbildung mit $\kappa(A) = A'$ und $\kappa(B) = B'$. Für die Abbildung eines weiteren Punktes $X \in \mathbb{E}_2$ muss gelten:

$\Delta(ABX) \cong \Delta(A'B'X')$ aufgrund der Längentreue. Es gibt offensichtlich zwei verschiedene Punkt $X'_1 \in \varepsilon'_{re}$ und $X'_2 \in \varepsilon'_{li}$.
für κ^+ : $\kappa^+(\varepsilon_{re}) = \varepsilon'_{re}$ und $\kappa^+(\varepsilon_{li}) = \varepsilon'_{li}$
Wenn $X \in \varepsilon_{re} \Rightarrow \kappa^+(X) = X'_1$ eindeutig, wenn $X \in \varepsilon_{li} \Rightarrow \kappa^+(X) = X'_2$ eindeutig.
$\Longrightarrow \exists!\ \kappa^+ : \kappa(A) = A'$ und $\kappa(B) = B'$ □

Zu je zwei orientierten, gleichlangen Strecken existiert genau eine gleichsinnige Kongruenztransformation κ^+, die diese Strecken aufeinander abbildet.

Satz 2.3. *Die gleichsinnige Kongruenztransformation κ^+ aus Satz 2.2 ist entweder eine Rotation κ^r, oder eine Translation κ^t.*

Beweis. Folgt aus Satz 2.4, in der Literatur auch als *Reduktionssatz* bezeichnet, denn mit wiederholender Anwendung des Satz 2.4 lässt sich jede κ^+ auf ein κ^r oder auch κ^t reduzieren. □

Satz 2.4. *Die Verkettung von vier Geradenspiegelungen lässt sich stets auf eine Verkettung von zwei Geradenspiegelungen reduzieren, das heißt auf eine Translation oder Rotation.*

Beweis. Der ausführliche Beweis ist nachzulesen in (Krauter, Padberg & Bescherer, 2012, S. 35) oder auch in (Müller-Philipp & Gorski, 2008, S. 138) und soll hier nicht behandelt werden. □

Zusammenfassung der bisherigen Ergebnisse
Eine ebene Bewegung ist eine gleichsinnige Kongruenztransformation, auch Rotation oder Translation genannt. Zu je zwei orientierten, gleich langen Strecken existiert genau eine Rotation oder Translation, die diese Strecken aufeinander abbildet.

Kinematische Interpretation

Folgende Überlegungen stützen sich auf Walter Wunderlichs „Ebene Kinematik“ (1970) sowie auf „konstruktive Getriebelehre“ von Leo Hagedorn, Wolfgang Thonfeld und Adrian Rankers (2009). Es wird in dieser Abhandlung bewusst weitestgehend auf analytische Darstellungen verzichtet. Eine gute Symbiose von konstruktiven und analytischen Methoden der Kinematik findet man in „Getriebetechnik“ von Hanfried Kerle, Burkhard Corves und Mathias Hünsing (2011).

Definition 2.6. *Ein Bewegungsvorgang ist eine Menge von gleichsinnigen Kongruenztransformationen. Man nennt diesen* ***Zwanglauf****, wenn er von genau einem Parameter abhängig ist.*

Dieser Parameter wird meist als Zeit τ interpretiert, eine andere geeignete geometrische Größe ist etwa ein Drehwinkel. In weiterer Folge wird in dieser Arbeit nur noch von ebenen, zwangläufigen Bewegungen im Sinne der obigen Definitionen die Rede sein, auch wenn dies nicht explizit erwähnt wird.

Ein Zwanglauf ist eindeutig durch zwei Punkte A und B und deren überstrichene Bahnen b_A und b_B festgelegt. A und B legen dabei ein bewegtes System Σ eindeutig fest. Alle in diesem System Σ enthaltenen Punkte sind in starrer, undeformierbarer Weise mit A und B verbunden, sie bewegen sich also mit. Die auf diese Weise entstehende bewegte Ebene nennt man auch **Gangebene**. Die Bahnen b_A und b_B sind der Bewegung nicht unterworfen, sie befinden sich in einem Ruhesystem Σ^0, in einer sogenannten **Rastebene**. So bewegt sich Σ in Relation zu Σ^0, folgend kurz Σ/Σ^0. Weil mehrere Ebenen unterschiedlichen Bewegungen unterworfen werden können, gibt die Bezeichnung Σ^j an, dass es sich um die j-te bewegte Ebene handelt. Σ_k ist die k-te Lage des Systems, folglich beschreibt Σ_k^j die j-te Ebene in k-ter Lageposition.

Die Aussage folgenden Satzes bildet die Basis der gesamten Kinematik, deshalb nennt man ihn auch den

Satz 2.5 (**Fundamentalsatz der ebenen Kinematik**)**.** *Je zwei Lagen Σ_1 und Σ_2 eines eben bewegten Systems Σ lassen sich stets durch eine Rotation um ein Drehzentrum P_{12} oder auch eine Translation ineinander überführen.*

Beweis. Siehe Gültigkeit Satz 2.3, weitere Beweise finden sich in Modul E in Kapitel 5.5. □

Folgende Situationen sind nun aus dem *Fundametalsatz* herleitbar: Die beiden Punkte A und B seien einem ebenen Zwanglauf Σ/Σ^0 nach der Zeit τ unterworfen. Sei $i = 1, 2, \ldots$; zu den Zeitpunkten τ_i haben die Punkte die Lage A_i und B_i. Die Strecke $[A_iB_i]$ ist laut Fundamentalsatz durch Drehung um ein Drehzentrum $P_{i,i+1}$ in die Strecken $[A_{i+1}B_{i+1}]$ überführbar. Daraus folgt, dass $P_{i,i+1}$ im Schnitt der Streckensymmetralen $s_{A_{i,i+1}}$ und $s_{B_{i,i+1}}$ der Strecken $[A_iA_{i+1}]$ und $[B_iB_{i+1}]$ liegen muss.

Sei nun $i = 1$. Der Abstand $\Delta\tau := \tau_2 - \tau_1$ soll nun immer kleiner werden, τ_2 nähert sich τ_1 an, siehe Abb. 1. Für $\Delta\tau \to 0$ gilt

- Verbindungsgerade $(A_1A_2) \to$ Tangente t_{A_1} in A_1
- Streckensymmetrale $s_{A_{1,2}} \to$ Bahnnormalen n_{A_1} in A_1
- Drehzentrum $P_{1,2} \to$ Momentanpol P_1

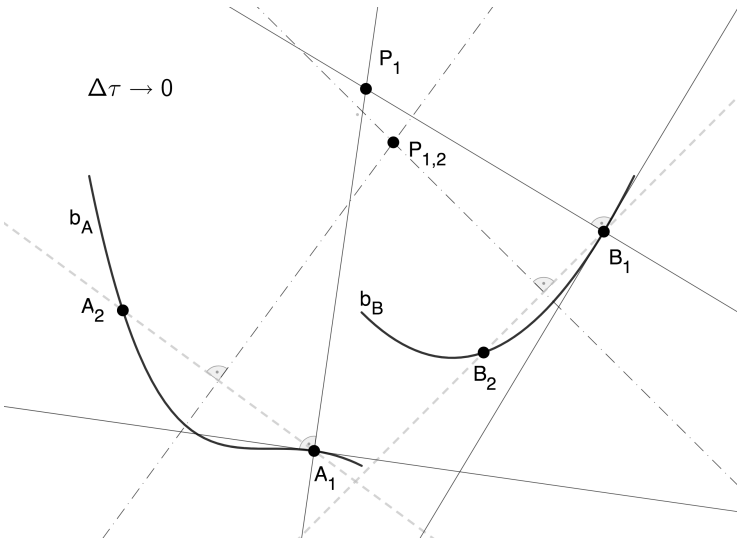


Abb. 1: Grenzübergang

Definition 2.7. *Bei Grenzlage zweier benachbarter Lagen Σ_i und Σ_{i+1} eines eben bewegten Systems unter Σ/Σ^0 erhält man bei Rotation ein eigentliches und bei Translation ein uneigentliches momentanes Drehzentrum P_i mit $P_i = \lim_{\Delta\tau\to 0} P_{i,i+1}$ mit $i = 1, 2, \ldots$. Dieses Drehzentrum wird der **Momentanpol zur Lage i** genannt. Geraden durch den Momentanpol heißen **Polgeraden**. Bei uneigentlichem Momentanpol spricht man auch von einem **Fernpol**.*

Satz 2.6. *Zu jedem Zeitpunkt τ eines Zwanglaufes Σ/Σ^0 verlaufen die Bahnnormalen aller Punkte durch den Momentanpol.*

Beweis. Folgt direkt aus Definition 2.7. Ein analytischer Beweis findet sich im Beweis von Satz 2.10. □

Definition 2.8. *Der überstrichene Weg des Momentanpols unter dem Zwanglauf Σ/Σ^0 nennt man **Polbahn**. Die Polbahn in der Rastebene Σ^0 ist die **Rastpolkurve** p_0, die Polbahn in der Gangebene Σ **Gangpolkurve** p.*

Satz 2.7. *Die Gangpolkurve rollt auf der Rastpolkurve, ohne zu gleiten.*

Beweis. Folgt aus der Definition 2.7. Verbindet man die Drehzentren von benachbarten Lagen $\Sigma_{i-1}, \Sigma_i, \Sigma_{i+1}, \Sigma_{i+2}$, so erhält man ein Polygon $(P_{i-1,i}P_{i,i+1}P_{i+1,i+2})$, bezüglich Σ^0 das Rastpolygon, bezüglich Σ das Gangpolygon. Es gilt Längengleichheit für entsprechende Abschnitte des Rast- und Gangpolygons, diese bleibt beim Grenzübergang erhalten $\Rightarrow$ p rollt auf p_0 ohne zu gleiten. □

Satz 2.8. *Eine Bewegung Σ/Σ^0 ist durch Gang- und Rastpolkurve in einer gegebenen Bewegungslage eindeutig festgelegt.*

Analytische Beschreibung

Die Ergebnisse der Kinematik sind stets auch analytisch fass- und überprüfbar. Die analytische Behandlung jedoch nimmt hier einen geringen Stellenwert ein. Aus mathematischer Sicht ist die angewandte Technik sehr interessant, doch die Relevanz der Theorie für den Unterricht ist untergeordnet. Dennoch wird die analytische Darstellung umrissen, ohne ins Detail zu gehen. Als Nachschlagewerk empfiehlt sich „Ebene Kinematik“ (Wunderlich, 1970).

Bei einem Zwanglauf Σ/Σ^0 ist es notwendig, die bewegten Punkte bezüglich der Gangebene und bezüglich der Rastebene zu beschreiben. Deshalb bedient man sich zweier Koordinatensysteme, dem **Rastkoordinatensystem** mit den Koordinaten $(x_0, y_0) \in \Sigma^0$ sowie dem **Gangkoordinatensystem** mit den Koordinaten $(x, y) \in \Sigma$, wobei Punkte des einen in das andere umgerechnet werden können.

Besonders geeignet zur Beschreibung bewegter Punkte sind die Komplexen Zahlen[18]. Dabei werden ihre Rechenmethoden und deren geometrische Eigenschaften genützt, so etwa die geometrische Interpretation der Addition als Translation, die Multiplikation als Drehstreckung sowie die Punktdarstellung in Polarkoordinaten. Auf diese Grundlagen soll hier nicht weiter eingegangen werden, sehr anschaulich allerdings nachzulesen in Georg Gläsers „Der Mathematische Werkzeugkasten“ (2014a, S. 418–428).

Satz 2.9. *Seien (x_0, y_0) und (x, y) Koordinaten bezüglich eines kartesischen Rast- bzw. Gangkoordinatensystems. Der Ursprung des Gangkoordinatensystems sei U mit den Rastkoordinaten (a_0, b_0).*

[18] Diese Methode wird Rudolf Bereis (1903-1966, Habilitation an der TH Wien, Professor mit Lehrstuhl Geometrie an der TH Dresden) zugeschrieben, obwohl jedoch Walter Wunderlich (nach eigenen Angaben) Bereis diese Methode nahe gelegt hätte; nachzulesen in Stachels Nachruf an Wunderlich (1998).

Die Umrechnung von Gang- auf Rastkoordinaten in komplexer Zahlenschreibweise lautet:

$$\begin{aligned} v_0 &= ve^{i\varphi} && \varphi \in \mathbb{R} \quad (\textit{für Vektoren}) \\ z_0 &= u_0 + ze^{i\varphi} && u_0 \in \mathbb{C},\ \varphi \in \mathbb{R} \quad (\textit{für Punkte}) \end{aligned} \tag{3}$$

mit $z_0 = x_0 + iy_0$ und $z = x + iy$ und $u_0 = a_0 + ib_0$ und φ als der Winkel zwischen der x_0-Achse und der x-Achse im Bogenmaß.

Mit dieser Umrechnung ist die analytische Darstellung eines Zwanglaufes nach Definition 2.6 nun sehr kompakt fassbar. u_0 und φ sind nun Funktionen vom Parameter der Zeit τ abhängig mit $u_0 : I \to \mathbb{C}$ und $\varphi : I \to \mathbb{R}$ mindestens zweifach differenzierbar. So erhält man die Bahnkurve eines Punktes $Z = (z)$ mit festen kartesischen Koordinaten $(x, y) \in \Sigma$ unter dem Zwanglauf Σ/Σ^0 als

$$z_0(\tau) = u_0(\tau) + ze^{i\varphi(\tau)} \tag{4}$$

Über die erste Ableitung nach der Zeit τ erhält man den momentanen Geschwindigkeitsvektor des Punktes Z

$$_Z\vec{v} = \dot{z}_0(\tau) = \dot{u}_0(\tau) + i\dot{\varphi}(\tau)ze^{i\varphi(\tau)} \tag{5}$$

Satz 2.10. *Bei Ausschluss eines momentanen Stillstandes verhält sich zu jedem Zeitpunkt $\tau \in I$ der Zwanglauf Σ/Σ^0 wie eine momentane Drehung um den Momentanpol mit der momentanen Winkelgeschwindigkeit $\omega(\tau) := \dot{\varphi}(\tau) \neq 0$ oder wie eine momentane Translation orthogonal zu den Polgeraden in Richtung des uneigentlichen Momentanpols.*

Beweis. - Bei $\dot{\varphi}(\tau) = 0$ und $\dot{u}_0(\tau) = 0$ liegt ein momentaner Stillstand vor.

- Ist $\dot{\varphi}(\tau) = 0$ und $\dot{u}_0(\tau) \neq 0$ handelt es sich um eine Translation orthogonal zu den Polgeraden in Richtung des Momentanpols mit Fernpolstellung.
- Für $\dot{\varphi}(\tau) \neq 0$ gibt es genau einen Punkt, für den die Führungsgeschwindigkeit $\dot{p}_0(\tau) = 0$ ist, der Momentanpol P.

$$\begin{aligned} & 0 = \dot{p}_0(\tau) = \dot{u}_0(\tau) + i\dot{\varphi}(\tau)pe^{i\varphi(\tau)} \\ & \Leftrightarrow\ p(\tau) = \frac{i\dot{u}_0(\tau)}{\dot{\varphi}(\tau)}e^{-i\varphi(\tau)} \qquad \text{Gangpolkurve} \\ \text{in (4) einsetzen} \quad & \Leftrightarrow\ p_0(\tau) = u_0(\tau) + \frac{i\dot{u}_0(\tau)}{\dot{\varphi}(\tau)} \qquad \text{Rastpolkurve} \end{aligned} \tag{6}$$

Stellt man den Vektor ${}_Z\vec{v}$ der Führungsgeschwindigkeit anders da:

$$\begin{aligned} \dot{z}_0(\tau) - 0 = \dot{z}_0(\tau) - \dot{p}_0(\tau) =& i\dot{\varphi}(\tau)(z-p)e^{i\varphi(\tau)} \\ \text{und substituiere mit} \qquad z_0(\tau) - p_0(\tau) =& (z-p)e^{i\varphi(\tau)} \\ \Rightarrow \dot{z}_0(\tau) =& i\dot{\varphi}(\tau)(z_0(\tau) - p_0(\tau)) \end{aligned} \tag{7}$$

$(z_0(\tau) - p_0(\tau))$ gibt den Vektor $\overrightarrow{PZ}$ in Rastkoordinaten an. Geometrisch interpretiert wird dieser durch die Multiplikation von i um 90° gedreht und gibt somit die Richtung des Führungsgeschwindigkeitsvektors an. Damit stehen die Führungsgeschwindigkeitsvektoren zu jedem Zeitpunkt τ normal auf die Polgeraden und die Bewegung Σ/Σ^0 verhält sich wie eine momentane Drehung um den Pol. (Bemerkung: Dies ist auch ein analytischer Beweis für Satz 2.6, denn damit ist gezeigt, dass die Bahnnormalen momentan durch den Pol gehen.)

□

Satz 2.11. *Die Länge des Führungsgeschwindigkeitsvektors im Punkt $Z \in \Sigma$ ist die Führungsgeschwindigkeit ${}_Z\mathrm{v} = \|{}_Z\vec{v}\| = |\omega| \cdot \overline{PZ}$*

Beweis.

$$\|{}_Z\vec{v}\| = \|i\dot{\varphi}(\tau)(z_0(\tau) - p_0(\tau)\| = |i| \cdot |\dot{\varphi}(\tau)| \cdot \|\overrightarrow{PZ}\| = |\omega| \cdot \overline{PZ} \tag{8}$$

□

Zusammenfassung der bisherigen Ergebnisse
In jedem Moment einer ebenen Bewegung existiert eine infinitesimale Drehung um einen eigentlichen Momentanpol oder eine infinitesimale Schiebung orthogonal zur Fernpolrichtung. Alle momentanen Bahnnormalen der Punkte des Objekts laufen durch diesen Pol. Die überstrichene Bahn des Pols in Σ ist die Gangpolkurve, in Σ^0 die Rastpolkurve.

Üblicherweise bestehen Bewegungen aus mehreren bewegten Systemen, weshalb hier zu guter Letzt noch die **Relativbewegung** beleuchtet werden soll. Drei Systeme Σ^0, Σ^1, und Σ^2 sind zwangläufigen Bewegungen unterworfen. Bei der Bewegung Σ^1/Σ^0 ist der Pol P_{01}, die momentane Winkelgeschwindigkeit sei ω_{01}. Bei einer weiteren Bewegung Σ^2/Σ^0 ist der Pol P_{02} und die momentane Winkelgeschwindigkeit ω_{02}.
Vertauscht man die Betrachtungsweise, anstelle der Bewegung von Σ^1/Σ^0 betrachte man Σ^0/Σ^1. Der Momentanpol bleibt derselbe, also $P_{01} = P_{10}$, jedoch die momentane Drehung ändert ihre Richtung $\omega_{01} = -\omega_{10}$.

Der Momentanpol P_{12} der Bewegung Σ^2/Σ^1 ist der einzige Punkt bezüglich Σ^1, der in Σ^2 augenblicklich in Ruhe ist. Von Σ^0 aus betrachtet sind das jene beiden Punkte $\in \Sigma^1$ und $\in \Sigma^2$,

die sich decken und dieselbe Bahngeschwindigkeit in Betrag und Richtung haben. So ist der Relativpol P_{12} folglich bestimmbar:

Die relative Winkelgeschwindigkeit ergibt sich aus $\omega_{12} = \omega_{02} - \omega_{01}$. Seien $D_1 \in \Sigma^1$ und $D_2 \in \Sigma^2$. Von Σ^0 aus betrachtet sind D_1 und D_2 augenblicklich in Deckung.
Es gilt nach Satz 2.11 und 2.6

$$\begin{aligned} {}_{D_1}\vec{v}_{01} \perp \overrightarrow{P_{01}D_1} \qquad &\text{und} \qquad {}_{D_2}\vec{v}_{02} \perp \overrightarrow{P_{02}D_2} \\ {}_{D_1}\mathrm{v}_{01} = ||{}_{D_1}\vec{v}_{01}|| = |\omega_{01}| \cdot \overline{P_{01}D_1} \qquad &\text{und} \qquad {}_{D_2}\mathrm{v}_{02} = ||{}_{D_2}\vec{v}_{02}|| = |\omega_{02}| \cdot \overline{P_{02}D_2} \end{aligned} \tag{9}$$

Damit die Richtungen übereinstimmen, muss gelten $D_1 = D_2$ und sie müssen auf einer gemeinsamen Polgeraden $(P_{01}P_{02})$ liegen. Aufgrund gleicher Beträge gilt $|\omega_{01}| \cdot \overline{P_{01}D_1} = |\omega_{02}| \cdot \overline{P_{02}D_2}$.

Dieses Ergebnis wird zusammengefasst im

Satz 2.12 (**Dreipolsatz von Aronhold[19]-Kennedy[20]**). *Drei Systeme Σ^0, Σ^1, und Σ^2 sind gegeneinander zwangläufig in Bewegung. Zu jedem Zeitpunkt τ gilt für die Pole P_{01} P_{02} und P_{12} aller Relativbewegungen Σ^1/Σ^0, Σ^2/Σ^0 und Σ^2/Σ^1:*
Die Momentanpole liegen auf einer Geraden in folgendem Verhältnis

$$\overline{P_{01}P_{12}} : \overline{P_{02}P_{12}} = |\omega_{02}| : |\omega_{01}| \tag{10}$$

Auf weitere, detaillierte Ergebnisse und Konsequenzen dieses Satzes wird hier weiters nicht mehr eingegangen. Damit sind die notwendigen allgemeinen Grundlagen der Kinematik für die Arbeit abgehandelt. Weiters folgen noch anwendungsorientierte kinematische Themen.

2.4.3 Ausgewählte kinematische Inhalte

Im Sinne der didaktischen Aufbereitung kinematischer Inhalte werden folgend zwei Anwendungen im Überblick besprochen: zum einen die Trochoidenbewegung, zum anderen das Gelenkviereck. Die folgende Aufbereitung versteht sich ebenfalls als keine fachlich vollständige Schrift, vielmehr als eine Grundlagenaufbereitung, die sich vorbehält, nur diejenigen für diese Abhandlung relevanten Themen zu beleuchten.

[19] Siegfried Heinrich Aronhold, 1819-1884, deutscher Mathematiker; entdeckte im Jahr 1872 diesen Satz, unabhängig von Kennedy.

[20] Alexander Blackie William Kennedy, 1847-1928, englischer Ingenieur; übersetzte Reuleaux' Werk ins Englische.

2.4.3.1 Trochoidenbewegung

Die Trochoidenbewegung ist von schulischem Interesse, weil sie genug Potential zur Kurvendiskussion von kinematisch erzeugten Kurven liefert.

Definition 2.9. *Eine Bewegung Σ/Σ^0, deren Polkurven Kreise sind, nennt man* ***Trochoidenbewegung****. Man spricht auch von* ***Gang- und Rastpolkreis*** *k und k_0.*

Das Abrollen vom Gangpolkreis auf dem Rastpolkreis kann als eine Überlagerung der folgenden zwei Bewegungen interpretiert werden. Zum einen eine Rotation aller Punkte um den Mittelpunkt M_0 des Rastpolkreises, folglich mit Σ^1/Σ^0 bezeichnet, zum anderen eine Rotation der Punkte der Gangebene um den Mittelpunkt M des Gangpolkreises welche Σ^2/Σ^1 sein soll. Die Verkettung dieser beiden Relativbewegungen ergibt die Absolutbewegung Σ^2/Σ^0, deren Pol P der Berührpunkt von k und k_0 ist.

Satz 2.13. *Sei Σ^2/Σ^0 eine Trochoidenbewegung, $k = (M, r) \in \Sigma^2$, $k_0 = (M_0, r_0) \in \Sigma^0$ mit $r_0 > 0$ und $[M_0M] \in \Sigma^1$. Dann gilt:*

$$\frac{r_0}{r} = 1 - \frac{\omega_{02}}{\omega_{01}} \tag{11}$$

Bei $r > 0$ ($r < 0$) liegen k und k_0 auf derselben (verschiedenen) Seite(n) der Poltangente.

Beweis. Aufgrund der Bewegungen gilt: $P_{01} = M_0$, $P_{12} = M$, $P_{02} = P$
Aus dem Dreipolsatz 2.12 folgt

$$\frac{r_0}{r} = \frac{\overline{M_0P}}{\overline{MP}} = \frac{\overline{P_{01}P_{02}}}{\overline{P_{12}P_{02}}} = \frac{\omega_{12}}{\omega_{10}} = \frac{\omega_{02} - \omega_{01}}{\omega_{10}} = 1 - \frac{\omega_{02}}{\omega_{01}} \tag{12}$$

□

Nach diesem Satz lässt sich die Bewegung auch folgendermaßen beschreiben:
Der Punkt M_0 sei fest verankert. Um M_0 rotiert ein Punkt M mit der Winkelgeschwindigkeit ω_{01} während gleichzeitig um M ein beliebiger Punkt Z mit einer zu ω_{01} proportionalen, gegenüber der ruhenden Ebene Σ^0 gemessenen Winkelgeschwindigkeit ω_{02} rotiert.

Definition 2.10. *Die Bahnkurve eines beliebigen Punktes $Z \in \Sigma^2$ unter einer Trochoidenbewegung nennt man* ***Radlinie*** *oder auch* ***Trochoiden****.*

- *bei $\frac{r_0}{r} > 1$ liegt k innerhalb von k_0; die Bahnkurve heißt* ***Hypotrochoide*** *oder* ***Inradlinie***
- *bei $\frac{r_0}{r} < 1$ liegt k außerhalb von k_0; die Bahnkurve heißt* ***Epitrochoide*** *ober* ***Aufradlinie***

Satz 2.14. *Sei Σ^2/Σ^0 eine Trochoidenbewegung. Ist $\frac{r_0}{r} = \frac{n_0}{n}$ mit $n_0, n \in \mathbb{N}$ und $\mathrm{ggT}(n_0, n) = 1$, so schließt sich die Trochoide nach $|n|$ Umläufen.*

Beweis. Vollzieht die Gangpolkreismitte M eine ganze Umdrehung ($\gamma_{01} = 2\pi$) um M_0, folgt nach Satz 2.13 die Proportionalität der Winkel. Das heißt eine Drehung von $Z \in \Sigma^2$ um den Winkel $\gamma_{02} = 2\pi(1 - \frac{n_0}{n})$ ergibt eine Position von Z, die ebenso beschrieben werden kann, als Rotation um M_1 um den Winkel $(-2\pi\frac{n_0}{n})$. Dies wiederholt sich nach jeder Umdrehung. Für $|n|$ Umdrehungen gilt demnach für den Winkel $\gamma_{02} = 2\pi n(1 - \frac{n_0}{n}) = 2\pi(n - n_0)$. Nach $|n|$ Umläufen ist γ_{02} ein Vielfaches von 2π, weshalb sich die Trochoide schließt. □

Es gibt noch eine Fülle von weiteren Erkenntnissen über Trochoide und ihre Eigenschaften, die hier jedoch nicht mehr behandelt werden.

2.4.3.2 Das Gelenkviereck und seine Koppelkurven

Hinsichtlich der zahlreichen technischen Einsatzmöglichkeiten der Koppelgetriebe soll hier auf ihre Wichtigkeit in der Getriebelehre verwiesen werden. Gerade wegen ihrer einfachen Umsetzung und die gleichzeitig sehr große Bandbreite an Möglichkeiten der Bewegungs- und Kraftübertragung gehören die Koppelgetriebe zu den am häufigst verwendeten mechanischen Getrieben. Die folgenden dargelegten Begriffe zur Getriebetechnik sind aus den Werken „Getriebetechnik“ (Kerle, Corves & Hüsing, 2011) und „Konstruktive Getriebelehre“ (Hagedorn, Thonfeld & Rankers, 2009) sinngemäß entnommen. In diesen Werken finden sich ausführliche Darstellungen und weitere Vertiefungen, auf die in dieser Abhandlung nicht eingegangen wird.

Sind starre Bauteile, sogenannte **Glieder**, beweglich über **Gelenke** miteinander verbunden, spricht man von einer **kinematischen Kette**[21], diese kann offen oder geschlossen sein. Ein, gegenüber dem als ruhend geltenden Raum, festgehaltenes Glied ist das **Gestell**, die geschlossene kinematische Kette wird dadurch zum **Mechanismus**. Wird nun bei einem solchen Mechanismus ein Glied angetrieben, dann erhält man folgende Definition:

Definition 2.11. *Eine Vorrichtung, die zum einen Kräfte und oder auch Bewegungen überträgt und oder umwandelt, zum anderen Punkte auf bestimmten Bahnen führt, nennt man ein* ***Getriebe****. Im ersten Fall spricht man von einem* ***Übertragungsgetriebe****, im zweiten Fall von einem* ***Führungsgetriebe****.*

Ein **ebenes Getriebe** liegt vor, wenn die während der Bewegung überstrichenen Punktbahnen aller Gliederpunkte in zueinander parallelen Ebenen liegen. Diese Bahnkurven können mittels Normalprojektion in einer einzigen Ebene dargestellt werden, weshalb sich ebene Getriebe und ihre Bahnkurven elegant in der euklidischen Ebene $\mathbb{E}^2$ analysieren lassen.

[21] Der Begriff stammt von Reuleaux, vgl. (1875, S. 44).

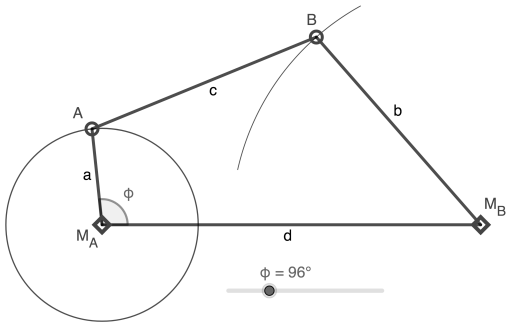


Abb. 2: Gelenkviereck

Kinematisch betrachtet repräsentiert jedes Glied einer kinematischen Kette eine sich bewegende Ebene Σ. Das Gestell repräsentiert die Rastebene Σ^0. Jedes Gelenk, das zwei Ebenen Σ^1 und Σ^2 miteinander verbindet, beeinflusst die Bewegung von Σ^2/Σ^1.

Das viergliedrige Drehgelenkgetriebe oder kurz Gelenkviereck[22]

Unter **ebene Koppelgetriebe** versteht man nun jene Getriebe, deren Glieder durch Dreh- oder Schubgelenke miteinander verbunden sind und sich in zueinander parallelen Ebenen bewegen. Aus dieser Fülle von existierenden Koppelgetrieben ist das einfachste das viergliedrige Drehgelenkgetriebe, bestehend aus vier Gliedern Σ^0 bis Σ^3, die durch Drehgelenke miteinander verbunden sind. Da seine Bewegung von einem einzigen Parameter ϕ abhängig ist, liegt ein Zwanglauf vor. Das Viereck M_AABM_B mit den festen Seitenlängen a, b, c, d sei ein **Gelenkviereck**, in Abb. 2 dargestellt.

- $\Sigma^0 = [M_AM_B] = d$ die Rastebene, Gestell oder auch **Steg**.
- $\Sigma^1 = [M_AA] = a$ und $\Sigma^2 = [M_BB] = b$ sind die Arme. Ihre Bezeichnung ist abhängig von ihrer Umlauffähigkeit. Ist ein Arm zur ganzen Umdrehung fähig, nennt man ihn **Kurbel**, ansonsten **Schwinge**. Sie sind Antriebs- und Abtriebsarme der Übertragung.
- $\Sigma^3 = [AB] = c$ heißt **Koppel**.

Die Beweglichkeit des Gelenkvierecks ist abhängig von seinen Abmessungen a, b, c, d.

[22]Streng genommen ist ein Gelenkviereck noch kein Getriebe, erst wenn eine Seite des Vierecks als ruhend angesehen wir und es einen Antriebs- und Abtriebsarm aufweist, kann von Getriebe gesprochen werden. Hier soll der Einfachheit halber aber kein Unterschied gemacht werden. Auch wenn von Gelenkviereck gesprochen wird, gemeint ist damit ein Getriebe.

Satz 2.15 (**Satz von Grashof**[23]). *Gilt in einem viergliedrigen Drehgelenkgetriebe die Gleichung*

$$l_{min} + l_{max} < l' + l'' \tag{13}$$

mit l_{min} als kürzestes, l_{max} als längstes und l' und l'' als die übrigen Glieder, so ist mindestens ein Glied voll umlauffähig.

Für jene Abmessungen, für die die Grashof'sche Umlaufbedingung nicht gilt, folgt

- für $l_{min} + l_{max} > l' + l''$: keines der Glieder ist voll umlauffähig
- für $l_{min} + l_{max} = l' + l''$: es durchläuft Verzweigungslagen, dies sind Stellungen, in denen alle Glieder auf einer Gerade liegen. Man spricht vom **durchschlagenden Gelenkviereck**. Der Pol der Koppelebene Σ^3 ist in dieser Stellung nicht eindeutig, weil sich das Gelenkviereck von zwei Seiten an die Verzweigungslage nähern kann. So ist es möglich, dass es in dieser Lage in die andere Stellung durchschlägt.

Die Bewegung schwingender Gelenke ist berenzt, diese Begrenzung äußert sich in den sogenannten **Tot**- oder **Umkehrlagen**. In diesen Lagen entartet das Gelenkviereck kurzfristig in ein Dreieck. Durch einfache Trigonometrie können diese Stellungen auch berechnet werden. Die zahlreichen Variationen von viergliedrigen Drehgelenkgetrieben sind in Abb. 3 dargestellt. Anwendungen der Koppelgetriebe sind immens vielseitig. So findet man den viergliedrigen Drehgelenkmechanismus in allen möglichen Öffnungsmechanismen wie etwa beim Autodach eines Cabrios, oder auch in Hebebühnenmechanismen. Klassische Beispiele sind ebenfalls unterschiedliche Scheibenwischermechanismen, oder auch Werkzeuge wie Zangen. Zwei Anwendungsbereiche sind hier gesondert hervorzuheben.

Die angenäherte Geradführung

Die angenäherte Geradführung ist von getriebetechnischer Bedeutung. Die Frage ist, wie es gelingen kann, einen Punkt geradlinig zu führen, ohne ihn in einer geradlinigen Führung laufen zu lassen. Es sind einige Mechanismen, darunter auch Koppelmechanismen bekannt, die einen Punkt der Koppelebene annähernd geradlinig führen, wie etwa der in Abb. 4 ersichtliche *Tschebyschefflenker*[24] oder auch die *Watt'sche Geradführung*[25] (siehe Modul K in Kapitel 5.11 sowie

[23] Franz Grashof, 1826-1893, deutscher Maschinen-Ingenieur;

[24] Čebyšev Pafnutij L., 1821-1894, russischer Mathematiker, Vertreter der Geradführung; (Anm. der Name weist unterschiedlichste Schreibweisen auf)

[25] James Watt, 1736-1819, englischer Ingenieur und Erfinder

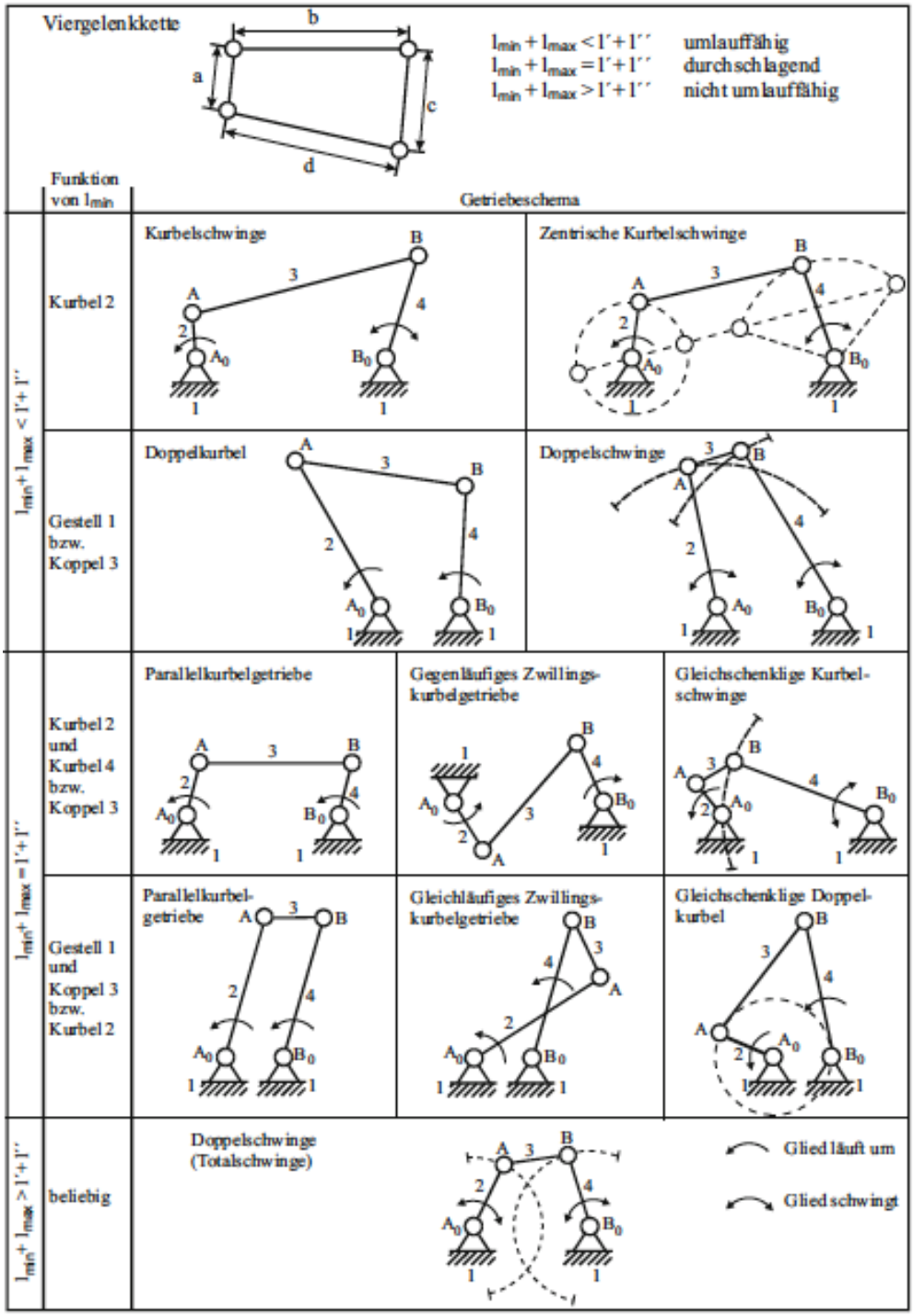


Abb. 3: Drehgelenkgetriebe Quelle: (Kerle, Corves & Hüsing, 2011, S. 41)

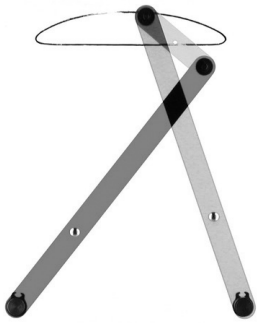


Abb. 4: Tschebyschefflenker
Quelle: DMG.lib[26]

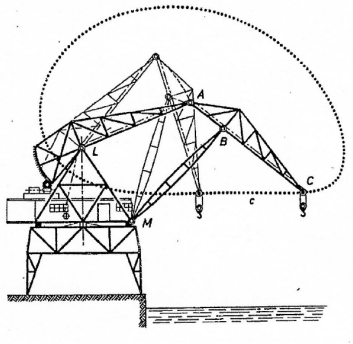


Abb. 5: Wippkran Quelle: (Wunderlich, 1970, S. 83)

Abb. 56 in Modul J, Kapitel 5.10). Ein sehr typisches Beispiel für eine angewandte angenäherte Geradführung ist die der Punktführung eines Wippkrans, siehe Abb. 5. Der Künstler Theo Jansen hat im Schritt seiner Strandbeests ebenfalls eine angenäherte geradlinige Bewegung realisiert (siehe Modul B in Kapitel 5.2). Neben den angenäherten Geradführungen gibt es auch *exakte Geradführungen* von Koppelgetrieben. Darauf wird aber nicht näher eingegangen.

Als Bemerkung wird hier allerdings die exakte Geradführung der Trochoidenbewegung genannt. Die Hypotrochoide für Punkte auf dem Rand des Gangpolkreises mit $r = \frac{r_0}{2}$ ist eine Strecke.

Die graphische Lagensynthese eines viergliedrigen Drehgelenkgetriebes

Eine weitere getriebetechnisch wichtige Anwendung ist die sogenannte **Getriebesynthese**. Darunter versteht man für ein spezielles definiertes Problem die Suche nach einem geeignet passenden Getriebe. So wird über den Typ des Getriebes entschieden, eine geeignete Bemaßung gefunden und schließlich die Getriebeglieder und Gelenke unter Berücksichtingung der Belastung des Materials konstruiert.

Eine **Lagensynthese** ist nun die Findung der Gliedlängen eines im vorhinein festgelegten Getriebes, während einer Bewegung, von der nur bestimmte Lagen bekannt sind. Diese kann graphisch, sowie auch numerisch erfolgen. Ist sie nicht exakt durchführbar, etwa bei Überbestimmung, so kann sie numerisch optimiert werden.

Die graphische Lagensynthese eines viergliedrigen Drehgelenkgetriebes $\Sigma^0\Sigma^1\Sigma^2\Sigma^3$ erfolgt nun

[26]Zugriff unter dem Link https://www.dmg-lib.org/dmglib/main/portal.jsp?mainNaviState=browsen.mecdesc.viewer&id=114025

bei Vorgabe von $i = 2, 3, 4$ unterschiedlichen Lagen zweier Punkte A, B der Koppelebene Σ^3. :

- i=2: $\Sigma_1^3 \to \Sigma_2^3$ mit $[A_1B_1] \to [A_2B_2]$ mittels Drehung um das Drehzentrum P_{12}. Die Wahl der Drehmittelpunkte M_A und M_B kann frei auf der jeweiligen Mittelsenkrechten $m_{[A_1A_2]}$ bzw. $m_{[B_1B_2]}$ erfolgen.
- i=3: $\Sigma_1^3 \to \Sigma_2^3 \to \Sigma_3^3$ mit $[A_1B_1] \to [A_2B_2] \to [A_3B_3]$. Weil $A_1A_2A_3$ sowie $B_1B_2B_3$ auf einem Kreis liegen, sind die Drehpunkte M_A sowie M_B bereits eindeutig bestimmt als Mittelpunkte der Umkreise.
- i=4: Die graphisch exakte Ermittlung ist möglich, jedoch sehr aufwendig und wird hier nicht behandelt.

Wie oben ersichtlich, kann für $i = 2, 3$ ohne Einschränkung angenommen werden, dass die Verbindungsstrecke $[AB]$ auch gleichzeitig die Koppel des Getriebes ist. Für $i = 4$ kann dies im Allgemeinen nicht mehr angenommen werden. In der Praxis werden die Koppelpunkte oftmals unabhängig von A und B gewählt. Diese bilden mit der Strecke $[AB]$ ein starres Koppelglied. Wichtig bei der Lagensynthese ist die Angabe der Reihenfolge der einzelnen Lagen.

Die für die Arbeit didaktisch relevanten fachlichen Grundlagen sind hiermit im Überblick besprochen worden. Neben Wunderlich (1970), Kerle (2011) und Hagedorn (2009) wird hier das Buch „Geometrie in Kunst, Natur und Technik“ von Georg Gläser (2014b) empfohlen. Zwei Kapitel widmen sich kinematischen Inhalten, gefüllt mit vielen Themenfeldern der ebenen sowie auch räumlichen Bewegungsgeometrie, die interessant, modern und anschaulich aufbereitet sind. Somit fungiert es als Inspiration für weitere Themenfelder der Kinematik.

2.4.4 Visuelle Darstellung

Eine große Komponente der Kinematik als Wissenschaft und auch als Anwendungsbereich ist die der adäquaten Darstellung. Die Methoden der Darstellenden Geometrie eignen sich und werden früh eingesetzt. Dennoch waren die Möglichkeiten der Handzeichnung begrenzt. Um die Fülle an kinematisch erzeugten Kurven besser fassbar zu machen, gab es sogenannte Kurvenatlanten. Der Koppelkurvenatlas des Vierstabgetriebes von Hrones (Verweis auf Hrones & Nelson, 1951) etwa hat über 700 Seiten und fasst mehr als 7000 Koppelkurven. In modernen Zeiten allerdings erweist sich die Darstellung und Auffindung passender Getriebe und ihre Kurven als wesentlich einfacher. Im Buch „Konstruktive Kinematik“ (Hagedorn et al., 2009) wird mit der Sofware

SAM[27], Synthesis and Analysis of Mechanismus, gearbeitet. Diese interaktive PC-Sofware ist nicht nur für den Entwurf sondern auch für Bewegungs- und Kraftanalysen von Getrieben nutzbar. Dynamische Geometrie Software, kurz DGS, ist ebenfalls hilfreich und brauchbar, bewegliche Mechanismen darzustellen. Der Fokus liegt hier auf der geometrischen Konstruktion. So wird etwa im Buch „Getriebetechnik“ (Kerle et al., 2011) mit der DGS *Cinderella*[28] gearbeitet.

In dieser Arbeit wird in der theoretischen didaktischen Aufbereitung im Allgemeinen von DGS gesprochen. In der praktischen Umsetzung jedoch wird konkret die DGS *GeoGebra* verwendet. GeoGebra ist eine starke dynamische Mathematiksoftware, die Algebra, Tabellen, Statistik, CAS, Analysis und vor allem Geometrie verbindet. Die Geometrie Rubrik von GeoGebra ist umfangreich und sehr leicht bedienbar. Über die GeoGebra Homepage[29] ist es online und vor allem auch gratis nutzbar. So bedarf es keine Installation auf einem eigenen Rechner. Daher gibt es auch online Angebote, wie etwa die *GeoGebra Bücher*, online erstellte GeoGebra Dateien die öffentlich zur Verfügung gestellt werden. So bietet GeoGebra auch einen regen Austausch von erstelltem Material.

Üblicherweise wird in der Getriebelehre in einer Abbildung eines Getriebes das Gestell mit einer Schraffur gekennzeichnet (siehe Abb. 3). In dieser Arbeit wird auf diese Schraffur verzichtet. Stattdessen sind diejenigen Punkte, die verbunden mit der Rastebene als fest gelten, nicht kreisförmig, sondern rautenförmig markiert, zu sehen in Abb. 6.

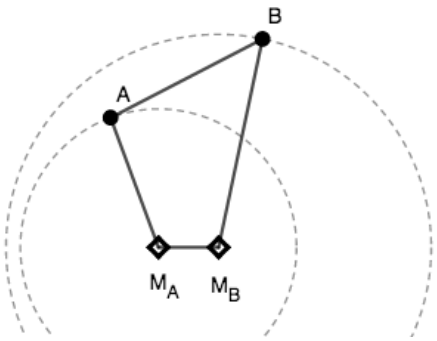


Abb. 6: Punkte der Rastebene als Rauten

[27]Mehr Informationen über SAM auf der Homepage Artas-Engineering Software unter diesem Link https://www.artas.nl/de/downloads

[28]Cinderella Homepage unter dem Link https://www.cinderella.de/tiki-index.php

[29]GeoGebra unter dem Link https://www.geogebra.org/

2.4.5 Online Sammlungen

Neben der eigenständigen Verwendung geeigneter Software gibt es noch zahlreiche Mechanismensammlungen, die online öffentlich zugänglich sind. So wird hier auf die Hompage[30] „Digitale Mechanismen- und Getriebebibliothek“ verwiesen. In ihrer Sammlung findet man neben interaktiven Animationen, Bildern und Mechanismenbeschreibungen auch Informationen bezüglich wichtiger Personen des Faches sowie Fachliteratur. DMG-lib vernetzt Benutzer überdies mit ähnlichen Projekten dieser Art weltweit. Weiters betreut das Institut für Diskrete Mathematik und Geometrie der TU Wien zwei ausführliche Onlinekataloge mit zahlreichen ebenen und räumlichen kinematischen Modellen[31].

2.5 Relevanz in Fachgebieten und Ausbildungen

Die historische Entwicklung der Kinematik, ihrer Wandlung in die Moderne und ihre dadurch enge Verknüpfung mit der Getriebelehre im Maschinenbau dominiert ihre Inhalte, jedoch reichen kinematisches Gedankengut und Fragestellungen über das engmaschige Feld des Maschinenbaus hinaus. Kinematische Fragestellungen finden sich in vielen unterschiedlichen Bereichen, wie etwa in der modernen Bewegungsanalyse, die eine große Rolle in Fachgebieten wie Medizin, Physiotherapie, Biomechanik, Veterinärmedizin uvm. spielt. Die Erschließung der Gelenkskinematik etwa beim Pferd fällt in dieses Gebiet, in dem die Movement Science Group[32] in Wien der Veterinärmedizinischen Universität forscht. Weitere Anwendungen kinematischer Messverfahren werden etwa in der Kieferheilkunde und im Sportmedizinischen Bereich realisiert. Erwähnt werden soll ebenfalls noch die Plattenkinematik, die in der Geodäsie und Geophysik die Kontinentalverschiebungen beschreibt.

Ein moderner und blühender Bereich der Anwendung kinematischer Inhalte ist die bewegliche Architektur. Innovative architektonische Vorstellungen und Anforderungen werden von kinematischen Ideen beeinflusst. Die 2014 am Lehrstuhl für Tragwerksplanung der Technischen Universität München abgeschlossene Dissertation von Zoran Novacki etwa beschäftigt sich mit Beweglichen Tragwerken[33]. Deren Anwendungsbereiche sind vielseitig, unter anderem auch diejenige des mobilen Einsatzbereiches durch ihre Packbarkeit. Realisierte bewegliche Architektur

[30] Digitale Mechanismen- und Getriebebibliothek unter dem Link https://www.dmg-lib.org

[31] Onlinekatalog der TU Wien unter dem Link https://www.geometrie.tuwien.ac.at/kinmodelle/

[32] Nachzulesen auf der Hompepage der Veterinärmedizinischen Universität Wien unter folgendem Link: https://www.vetmeduni.ac.at/de/pferde/forschung/bewegungsanalyse-movement-science-group/

[33] Nachzulesen auf der Homepage der Fakultät für Architektur der TU München unter folgendem Link https://www.ar.tum.de/lt/forschung/abgeschlossene-forschungsprojekte/bewegliche-tragwerke/

(a)

(b)

Abb. 7: Genfer Fußgängerbrücke
Quelle: INGENI Homepage

findet sich in ganzen Gebäudeteilen oder auch Brücken, so etwa die 2015-2016 erbaute Fußgängerbrücke in Genf der Architekten MID architecture, INGENI[34], zu sehen in Abb. 7.

Die künstlerische Auseinandersetzung mit Bewegung erfolgt in der Kinetischen Kunst. Die niederländischen Künstler Willem van Weeghel[35] und Theo Jansen[36] beschäftigen sich beide intensiv mit Bewegung in ihrem Werk. Während Willem van Weeghel mit seinen „Dynamic Structures“ die Bewegung und seine Wirkung ins Zentrum seiner Kunstwerke stellt, ist sie für Theo Jansen eher Zweck zur Umsetzung seiner Vision, ein sich autonom bewegendes Tier zu erschaffen.

Im Hinblick auf diese unterschiedlichsten Anwendungsbereiche sind kinematische Betrachtungsweisen ebenfalls in vielen Aus- und Bildungsstätten zu finden. In fast allen technischen Bereichen finden sich die Grundlagen der Kinematik, so auch in Sport- und Heilmedizinischen Ausbildungen. So liegt der Versuch nahe, kinematische Grundlagen auch im Schulunterricht zu fördern.

[34]Nachzulesen auf der Homepage von INGENI unter dem Link https://www.ingeni.ch/de/projects/jet-d-eau-mobile-fussgangerbrucke/

[35]Homepage von Willem van Weeghel unter dem Link http://www.willemvanweeghel.nl/work/en

[36]Homepage Theo Jansens Werk unter dem Link https://www.strandbeest.com/

3 Kinematik im Schulunterricht

3.1 Bewegliches Denken

Bewegliches Denken als eine spezielle Art der Vortstellungsfähigkeit wird in unterschiedlichsten Bereichen des Schulunterrichts bewusst und auch unbewusst verwendet und geschult. So soll hier kurz auf bewegliches Denken im Mathematikunterricht eingegangen werden. Jürgen Roth schreibt in seiner Dissertation (2005) bezüglich dieses Themas: „Bewegliches Denken manifestiert sich demnach zunächst in der Fähigkeit, in ein scheinbar statisches Phänomen eine Bewegung hineinsehen und damit argumentieren zu können“. So beschreibt er, schon die Griechen hätten im Durchmesser des Kreises eine Bewegung festgehalten, indem dieser den Kreis halbiert, weil sich die eine Hälfte auf die andere legen lässt. Deutlicher werden Bewegungsvorgänge bei Flächendefinitionen, so etwa der Zylinder als überstrichene Fläche einer zu einer Achse parallelen rotierenden Strecke aufgefasst wird. Eine große Komponente der in der Geometrie so wichtigen *Raumvorstellung* ist die Fähigkeit, sich Bewegungen von Objekten vorstellen zu können, so etwa die mentale Rotation von Objekten um Raumachsen, wie in diversen Beispielen zur Lage eines Objekts im Raum. So finden sich auch zahlreiche kinematische Interpretationen in mathematischen und geometrischen Themenbereichen. So etwa sind Begriffe der Kurvendiskussion kinematisch interpretierbar. Stellt man sich vor, eine Kurve mit einem Auto zu durchfahren, so beschreibt intuitiv der Einschlag des Lenkrades die Krümmung der Kurve. Der Krümmungskreis wäre jene Kurve, die durchfahren würde, ließe man das Lenkrad momentan in der Kurve blockieren. Der Wendepunkt wäre jener Punkt der Kurve, in dem das Lenkrad beim Wechsel von einer Kurve in eine entgegengesetzte Kurve, momentan nicht lenkt.

Auf weiterer solcher Beispiele soll hier nicht mehr eingegangen werden, denn diese Arbeit handelt nicht von kinematisch geprägten Erklärungen anderer Themenkomplexe, die Kinematik selbst soll betrachtet werden. Für weitere nützliche und sehr spannende Informationen über *bewegliches Denken* sei Jürgen Roths Dissertation (2005) empfohlen.

3.2 Einbettung im Lehrplan

Um die Kinematik als die geometrische Lehre der Bewegung im Schulunterricht auf breiter Ebene fassbar zu machen, wird hier auf die Rücksichtnahme spezieller Lehrpläne von einschlägigen Berufsbildenden höheren Schulen wie etwa den Technischen Fachschulen verzichtet. Stattdessen wird der Fokus auf die Allgemeinbildenden Höheren Schulen gelegt, um die Grundlagen der Kinematik aufzubereiten. Die adäquate Einbettung kinematischer Inhalte in den Lehrplan der Allgemeinbildenden Höheren Schulen im Unterrichtsfach der Darstellenden Geometrie, folgend kurz DG, orientiert sich in erster Linie natürlich nach fachlichen Bereichen, allerdings wird

folgend ebenso auf den möglichen Beitrag kinematischer Inhalte zur Bildungs- und Lehraufgabe eingegangen, sowie auf ihre Beiträge zu den Bildungsbereichen.

3.2.1 Fachliche Einbettung

Nach §34 Abschnitt II des Schulorganisationsgesetzes haben die Allgemeinbildenden Höheren Schulen die „Aufgabe, den Schülern eine umfassende und vertiefte Allgemeinbildung zu vermitteln und sie zugleich zur Universitätsreife zu führen.“ Unter der Annahme, dass der Lehrplan einen Querschnitt der wichtigsten, allgemeinbildenden Themen widerspiegelt, so ist es verblüffend, dass die theoretische Kinematik - trotz ihrer Bedeutung für die technische Entwicklungsgeschichte - mit keinem Wort in keinem der Pflichtgegenstände, auch nicht im Fach der DG, angemessen erwähnt wird. Lediglich in Form des Wahlpflicht-Unterrichts wird sie als Vorschlag zur „Vertiefung von fächerübergreifenden und anwendungsorientierten Aspekten der Geometrie“(BMBWF, 2019, S. 238) genannt. Auch wenn die Kinematik keine signifikante namentliche Nennung im Lehrplan erfährt, so sind zahlreiche ihrer Themen und Anwendungen vertreten. Natürlich findet sich ihr Stoff kombiniert in der allgemeinen Bewegungslehre im Physikunterricht der Unterstufe (vgl. BMBWF, 2019, S. 98), kinematische Themen, wie etwa die Kreisbewegung und die Relativität von Bewegungen, werden aber auch in der Oberstufe behandelt.

Im Lehrplan der DG finden sich einige Themen, die mit der Kinematik stoffliche Gemeinsamkeiten bergen, in denen sie durchaus komplikationslos eingebettet werden kann. In der 7. Klasse, im Kompetenzmodul 6, findet sich in der Unterkategorie „geometrische Objekte und deren Eigenschaften“ das Arbeiten mit Kurven, wobei explizit die Erzeugung ebenjener Kurven mit passenden Medien formuliert wird. Weiters sind in dieser Bearbeitung der Kurven noch Parameterdarstellungen und Tangenten, deren Eigenschaften und deren Verwendungsmöglichkeiten miteingeschlossen (vgl. BMBWF, 2019, S. 190). Ausgewählte Inhalte der Kinematik, wie die Trochoidenbewegung, finden sich in diesen Formulierungen. Die geometrischen Grundlagen, das Fundament der Kinematik sind zum einen das „Arbeiten mit Konguenztransformationen“(BMBWF, 2019, S. 189), das sich im Lehrplan in der 7. Klasse im Kompetenzmodul 5 finden lässt und somit der Einbettung des Themas Kinematik in das 6. Semester als schon erworbene Kenntnis und Fähigkeit dienlich ist. Zum anderen findet sich die „Relation zwischen Objekten und Transformationen“(BMBWF, 2019, S. 190) wiederum im Kompetenzmodul 6 im Lehrplan. In geometrischen Bewegungsaufgaben sind die Relationen zwischen Objekten und die Analyse ihre Lagebeziehungen von zentraler Bedeutung.

Mit dieser Lehrplaneinbettung ist die Rechtfertigung der schulischen Bearbeitung ausgewählter kinematischer Inhalte aus fachlicher Sicht vollbracht. Weiters stellt sich die Frage, welchen Beitrag sie zu den formulierten Bildungs- und Lehraufgaben der DG leisten kann.

3.2.2 Zur Bildungs- und Lehraufgabe

Im Lehrplan wird die DG als Schlüsselqualifikation bezeichnet, da sie universal, zeitlos, unveränderlich und vielseitig anwendbar ist (vgl. BMBWF, 2019, S. 185). Diese vielseitige Anwendbarkeit manifestiert sich in der theoretischen Kinematik. Ihrer Entwicklungsgeschichte und ebenfalls ihre fundamentale Rolle in der heutigen Robotik zeigt nur einmal mehr, welche gesellschaftsprägende Wichtigkeit sie in der Entwicklung heutiger Technik besitzt. Damit ist sie nicht nur Zeugnis, in welchen Anwendungsgebieten die DG deutlich brauchbar ist, ihr Wesen an sich bildet einen Brückenschlag zwischen realer Umwelt und idealisierten geometrischen Objekten. Ihre Bearbeitung fördert zudem das räumliche Vorstellungsvermögen, denn, auch wenn viele Mechanismen eben behandelt werden, ihre mechanische Umsetzung zwingt zur räumlichen Vorstellung.

Die Fähigkeit der „Anwendung geometrischer Grundkenntnisse auf Naturwissenschaften und technische Problemstellungen“(BMBWF, 2019, S. 186) wird erweitert durch die Hinzunahme von Beweglichkeit. Die Wahrnehmung geometrisch fassbare Bewegungskonzepte ist eine neue Art der Anschauung. Sie öffnet neue Wege im Schulunterricht. Im Bereich der Konstruktion mit DGS etwa öffnet sich die statische Konstruktionstechnik der üblichen geometrischen Probleme für bewegungsfokussierte Konstruktionen von kinematisch motivierten Fragestellungen. Somit erweitern kinematische Problemstellungen die, für Schülerinnen und Schüler anzustrebenden, geometrischen Kompetenzen wie das „Bearbeiten und Lösen räumlicher Aufgaben mit adäquaten geometrischen Verfahren“ sowie das „Bearbeiten und Lösen neuer geometrischer Aufgabenstellungen“(BMBWF, 2019, S. 186).

3.2.3 Beiträge zu den Bildungsbereichen

Genauso wie die DG vielfältige Beiträge zu den Bildungsbereichen leistet, so unterstützen kinematische Inhalte der DG diese Beiträge erheblich. In *Sprache und Kommunikation* versteht sich die Darstellung der kinematischen Sachverhalte in ebenso hohem Maße als interkulturell und sprachunabhängiges Kommunikationsmittel. Ihre Zeichensprache, ihre Mechanismendarstellungen und ihre Bewegungsbeschreibung haben hohen Anschauungscharakter und sind auf intuitive Weise leicht verständlich. Nicht weniger wichtig ist ihr Beitrag für *Mensch und Gesellschaft*, durch ihre Rolle in der technischen Entwicklung und der dadurch aufkommenden Präsenz in Berufs- und Ausbildungswegen. In der Kinematik werden technische Objekte, deren Beziehung und Bewegung analysiert, so ist ihr Beitrag zu *Natur und Technik* ebenfalls durch die Schulung der mit ihr einhergehenden technischen Raumvorstellung spürbar. Ein besonderer Beitrag zu *Kreativität und Gestaltung* sei hier noch explizit beschrieben. Nicht nur, dass Neugierde, kreativer Schaffensgeist und Erfindertum kinematischer Wissenschaft Leben eingehaucht hat, sie hat

eine ebenso erhebliche Aktualität in Kunst und Design.

3.3 Lehrzielformulierungen

Die allgemeinen Lehrziele der Kinematik im DG Unterricht sind mit der Einbettung in den Lehrplan beantwortet. Konkretere Lehrziele sehen wie folgt aus:

- Die Kinematik als Teilgebiet der Mechanik und Wissenschaft der reinen Bewegungsgeometrie darstellen sowie ihre Rolle im Maschinenbau als Getriebekinematik aufzeigen. Unterschiedliche Begriffe verwenden und einsetzen.
- Das Wesen einer allgemeinen Bewegung als momentane Rotation oder Translation sichtbar machen.
- Die Bedeutung der Kinematik in der Analyse, Auffindung und Erstellung von Bahnkurven vermitteln. Die Fülle und Möglichkeiten dieser Kurven fassbar machen.
- Verschiedene Getriebe anschaulich darstellen, interaktiv und individuell erkundbar machen.
- Den Einfluss der Kinematik in unterschiedlichsten Gebieten sichtbar machen, unterschiedliche Aspekte ihres Mitwirkens veranschaulichen, wie etwa Fragestellungen der Automatisierung in der Fertigungstechnik oder der Umsetzungen individueller Ideen in der Kunst.

3.4 Klarstellung

Obwohl diese Arbeit die schulische Eignung der Grundlagen der Kinematik ins Auge fasst und dadurch ganz gezielt Lehrerinnen und Lehrer anspricht, die diese Analyse und Aufbereitung nutzen wollen, so versteht sich der Inhalt dieser Arbeit nicht als eine Art Rezept, das ohne Abwandlung und Reflexion übernommen werden kann. Der stoffliche Umfang etwa wurde stark reduziert, es obliegt aber der Anwenderin und dem Anwender eventuell noch weitere Reduktionen vorzunehmen. Die Lehrziele verstehen sich als universale Ziele der gesamten hier getätigten didaktischen Analyse kinematischer Inhalte. Die speziellen Lehrziele bei tatsächlicher Durchführung etwaiger Gebiete sind gesondert zu formulieren und haben nur überschneidenden, keinen deckenden Charakter mit den in dieser Arbeit formulierten Zielen.

Es ist überdies auch verständlich, dass die in dieser Arbeit analysierten Inhalte im Unterricht nicht gänzlich in einem Stück verarbeitet werden können. Der Zweck dieser Aufbereitung ist vielmehr die systematische, didaktische Gesamtanalyse der schulorientierten Kinematik, die individuell und zugeschnitten angewendet werden kann.

4 Analyse kinematischer Inhalte nach ausgewählten didaktischen Zugängen

Nachdem nun wesentliche Aspekte rund um die Kinematik geklärt sind, kann die konkrete didaktische Analyse der Inhalte für den Unterricht der DG beginnen, um sie für Schülerinnen und Schüler zugänglich zu machen. Diese Analyse erhält durch die im Lehrplan formulierten, allgemeinen (BMBWF, 2019, S. 12–16) und weiters noch fachlich spezifizierten (BMBWF, 2019, S. 186–187) didaktischen Grundsätze eine grundlegende Richtungsweisung. Diese äußert sich etwa in der Berücksichtung, Lernen als Prozess wahrzunehmen, der durch vielfältige Zugänge zu Wissen, genügend Freiraum für Handlungen und den Einsatz unterschiedlicher Medien, von Papier und Bleistift bis hin zu Websites unterstützt wird. Lebensnahe Bezüge werden berücksichtigt und eingebaut. Ein besonderes Augenmerk liegt auf der verwendeten Sprache in den in Kapitel 5 aufbereiteten, anzuwendenden Modulen, die die Lernenden persönlich in Höflichkeitsform anspricht. Auch wird in der sprachlichen Aufbereitung auf die Unterstützung kommunikativer Kompetenz Wert gelegt. Neben großzügig ausformulierten Fragestellungen und Leseauszügen finden sich Formulierungen wie *Diskutieren Sie* oder *Erklären Sie in eigenen Worten.* Sprachlich kommen ebenfalls individuelle Leistungspotentiale zur Geltung, da immer wieder von der Formulierung *Versuchen Sie* Gebrauch gemacht wird. Die fachlich spezifizierten didaktischen Grundsätze wurden ebenso berücksichtigt, diese erkennt man etwa in der ausgewogenen Aufteilung von klassisch konstruktiven zu computerunterstützten Methoden. Es werden Begriffe der Naturwissenschaften und Mathematik verwendet, Problemstellungen aus Technik, Architektur, Design und Kunst vorgestellt, und grundsätzlich aus der geometrischen Vorstellungswelt der Schülerinnen und Schüler geometrische Begriffe und Gesetzmäßigkeiten erarbeitet.

Dabei lehnt sich die Arbeit in der Struktur der didaktischen Analyse an das Buch „Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe I“ aus dem Jahr 2018 von Weigand et al.[37]. Dieses Buch versteht sich als Einführung in die didaktischen und methodischen Grundlagen des Geometrieunterrichts. Obwohl es sich auf die Sekundarstufe I beschränkt, sind seine Konzepte weitgreifender und ist deshalb hier als Referenzwerk angeführt.

In den nächsten Unterkapiteln werden folgende Zugänge herangezogen, um die in Kapitel 2.4 ausgewählten Themen und Inhalte in strukturierter Weise für den Unterricht der DG zu analysieren:

- *Begriffe und Begriffsbildung*

[37]Die Autoren sind Hans-Georg Weigand, Andreas Filler, Reinhard Hölzl, Sebastian Kuntze, Matthias Ludwig, Jürgen Roth, Barbara Schmidt-Thieme und Gerald Wittmann.

- *Beweise und Argumentieren*
- *Klassifikation*
- *Problemlösen*
- *Konstruieren*
- *Modelle und Modellbildung*

Hier steht die theoretische, literaturgestützte didaktische Bearbeitung kinematischer Themen im Vordergrund, die zugehörigen praktischen Umsetzungen als anwendungsorientierte Aufgabenstellungen zu jedem dieser Zugänge finden sich in den Modulen A bis N im Kapitel 5. Die folgende Modulzuweisung in Abb. 8 zeigt die Vernetzung der Module mit den einzelnen Zugängen, diese hat aber keinen Anspruch auf Vollständigkeit. So etwa erfolgt in den meisten Modulen eine Form von Begriffsbildung, diese Verbindung wird aber nicht extra hervorgehoben. Die Grafik dient Hauptsächlich der Navigation innerhalb der Arbeit, um die konkreten Umsetzungen der einzelnen Zugänge leicht zu finden.

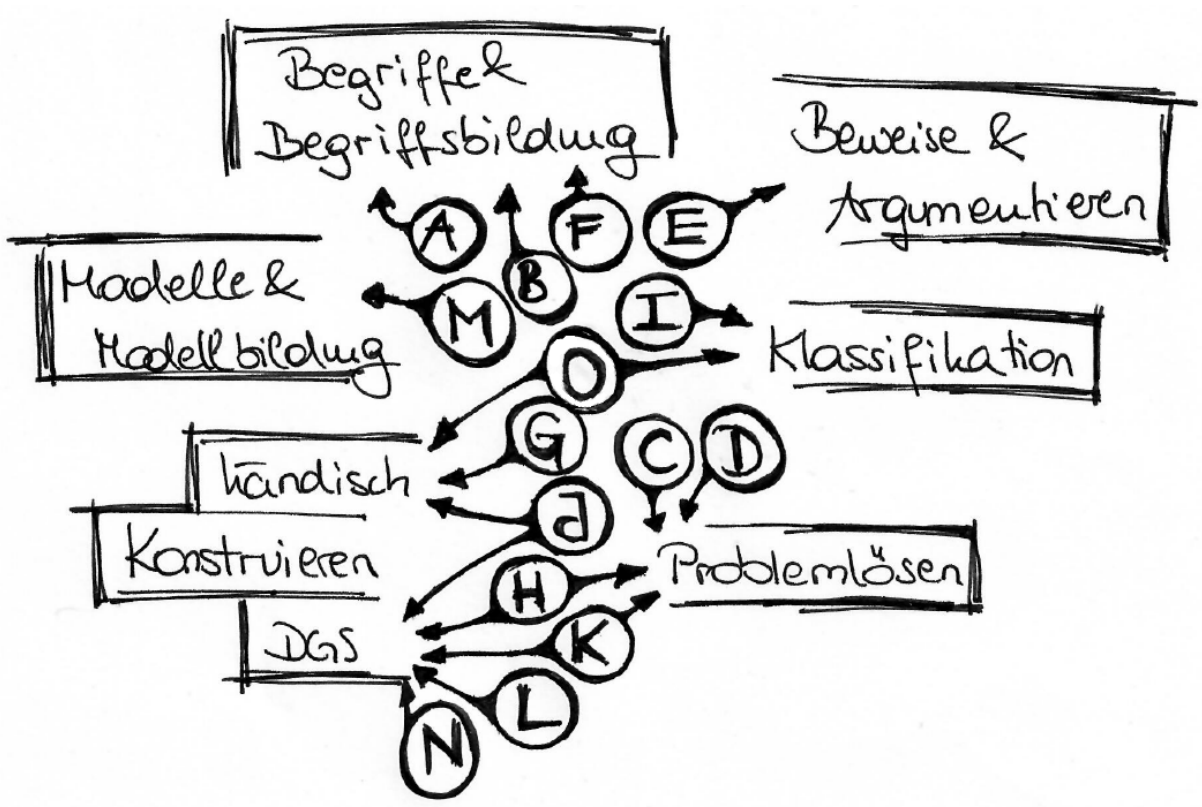


Abb. 8: Vernetzung von Modulen mit den Inhalten der didaktischen Analyse

4.1 Begriffe der Kinematik und ihre Begriffsbildung

Für eine theoretische Aufarbeitung der allgemeinen Begriffsbildung wird hier auf das Buch „Zwölf Grundformen des Lehrens“ von Hans Aebli (1983, S. 245–273), verwiesen, sowie auf „Grundlagen des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe“ von Hans-Joachim Vollrath und Jürgen Roth (2011, S. 227–246). Über die geometrische Begriffsbildung findet sich wie oben erwähnt einiges in Weigand (2018, S. 85–106). Da die hier besprochene ebene Kinematik als eigenständiges Gebiet normalerweise nicht im Unterricht als solches behandelt wird, sind auch die ihrer Anwendungen typischen Begriffe den Schülerinnen und Schülern gänzlich unbekannt. Der folgende Zugang stellt die Begriffsbildung sowie Begriffsverwendung der Kinematik in den Vordergrund. Schon das Wort *Kinematik* selbst bedarf einer sofortigen Klärung für die Lernenden.

Um Begriffe lernen zu können, müssen sie verstanden werden. Dafür ist die Ausbildung mentaler Modelle notwendig. Diese repräsentieren den Begriff, beschreiben ihn geistig in einer Art und Weise, die, nach Weigand (2018, S. 86) „sprachliche, bildliche, und handlungsbezogene Komponenten umfassen“. Bei der Begriffsbildung handelt es sich also um einen Prozess, der durch die Lehrperson bewusst in Gang gesetzt und geleitet werden muss, wofür eine qualitative Auseinandersetzung mit dem Begriff selbst vonnöten ist. Die Erarbeitung des Begriffs und der dadurch initiierte Aufbau von Vorstellungen richten sich nach bestimmten Fragestellungen, wie etwa um welche Art von Begriff es sich handelt, welche Rolle der Begriff spielen soll, wie oft dieser im schulischen Kontext verwendet werden wird, welche Lernstrategien dadurch von Vorteil sind oder welche didaktische Funktion der Begriff inne hat (vgl. Vollrath & Roth, 2011).

4.1.1 Der Begriff *Kinematik*

Wie in Fußnote 6 bereits erwähnt, leitet sich Kinematik vom altgriechischen Wort $\kappa\iota\nu\eta\mu\alpha$ kinema, *Bewegung* ab. Im Duden findet sich zum Wort Kinematik die „[...] Teil der Mechanik; Bewegungslehre; Phoronomie“ sowie zum Wort kinematisch „[...] sich aus der Bewegung ergebend“. Damit Schülerinnen und Schüler geeignete mentale Modelle dieses Begriffs aufbauen können, ist eine weitaus tiefere Konfrontation als die der Wortbedeutung vonnöten. Der Begriff Kinematik kann im Unterricht eine leitende oder auch untergeordnete Rolle spielen. Es ist sogar möglich, kinematische Inhalte zu transportieren ohne den Begriff Kinematik je im Unterricht erwähnt haben zu müssen. Allein die Bearbeitung von einzelnen kinematischen Beispielen und Themen werden zur Ausbildung gewisser Vorstellungen der Kinematik führen. Durch die Hinführung und Herausarbeitung des Begriffs *Kinematik* sollen nicht nur diese Vorstellungen verdeutlicht werden, auch seine beschreibende und zusammenfassende Natur eines spezifisch definierten Fachgebietes werden unterstrichen. Für diesen Zweck werden zwei unterschiedliche Zugänge beleuchtet. Kinematik als Unterkategorie der Mechanik ist eine Begriffseinbettung und knüpft an schon vor-

handenem Wissen an. Der historisch genetische Zugang betrachtet die Entwicklungsgeschichte des Fachgebietes und das tatsächliche Aufkommen des Begriffs.

Kinematik als Unterkategorie der Mechanik

Kinematik als Unterkategorie der mächtigen Disziplin Mechanik, bettet den Begriff beim Lernenden in ein schon vorhandenes Begriffsnetz. Ein solches Netz veranschaulicht in einfachster Weise Beziehungen von unterschiedlichen Begriffen. Es visualisiert Gedächtnisinhalte nicht als lineare Kettenmuster, vielmehr sind Inhalte in ein Bedeutungs- und Bezeichnungsgeflecht eingebettet. Dieses Netz hilft Schülerinnen und Schülern den neu gehörten Begriff einzuordnen. Weil diese die Mechanik, Bewegungen im Allgemeinen und ihre Gesetze aus dem Physikunterricht kennen (vgl. BMBWF, 2019, S. 109, 184 f.), gilt es nun den Begriff *Kinematik* in dieses Begriffsnetz zu verankern. Dies ist vor allem auch deshalb von Vorteil, weil Verbindungen zu anderen Bezeichnungen und Themen auch in unterschiedlichen Fächern grundlegend zum Verständnisaufbau beitragen. Kinematik, als Oberbegriff einer ganzen Klasse an Bewegungsanalysen aufgefasst, ist ihrerseits ebenso Unterkategorie. Das Wissen über Ober- Unter- oder Nachbarbegriffe integriert den Begriff, es kann eine „beziehungshaltige oder integrierte Vorstellung“ (Weigand et al., 2018, S. 101) gewonnen werden. Dies unterstützt die Bildung mentaler Modelle auf vielseitige Weise. So ist in Abb. 9 ein mögliches Begriffsnetz für die Kinematik als Unterbegriff der Mechanik dargestellt. Dieses soll die Erweiterung der Inhalte der Kinematik durch Hinzunahme der Masse darstellen. Damit bewegt man sich nicht mehr nur in der reinen Kinematik, sie erweitert sich auf die Mechanik. Eine andere Begriffsnetzdarstellung ist in Abb. 10 ersichtlich. In dieser wird vielmehr auf das Gebiet der Kinematik selbst eingegangen. Viele schulrelevante Begriffe und deren Beziehung zueinander sind dabei berücksichtigt. Den Schülerinnen und Schülern sind in so einem Begriffsnetz viele der Inhalte aus mehreren Schulfächern bekannt, weshalb dieses Netz eine sehr breit gefächerte Begriffsvorstellung unterstützt. Grundsätzlich gilt, dass solche Begriffsnetze nicht vollständig sein können. Ihr Umfang und ihre Gestalt ist immer vom speziellen Fokus und von der erstellenden Person abhängig. Vorhandene Grundvorstellungen sind entscheidende Faktoren für das Aussehen eines Netzes. So können Begriffsnetze von Schülerinnen und Schülern zu einem Thema grundlegend unterschiedlich zu jenen sein, die von Lehrpersonen kreiert worden sind. Gerade bei Einführung eines neuen Begriffs muss sich die Lehrperson um die Beziehung der einzelnen Begriffe untereinander stets im Klaren sein.

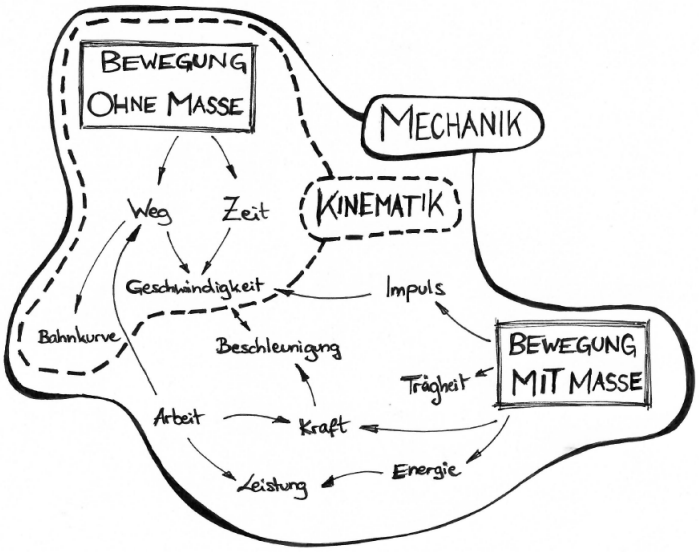


Abb. 9: Mögliches Begriffsnetz - Kinematik als Unterbegriff

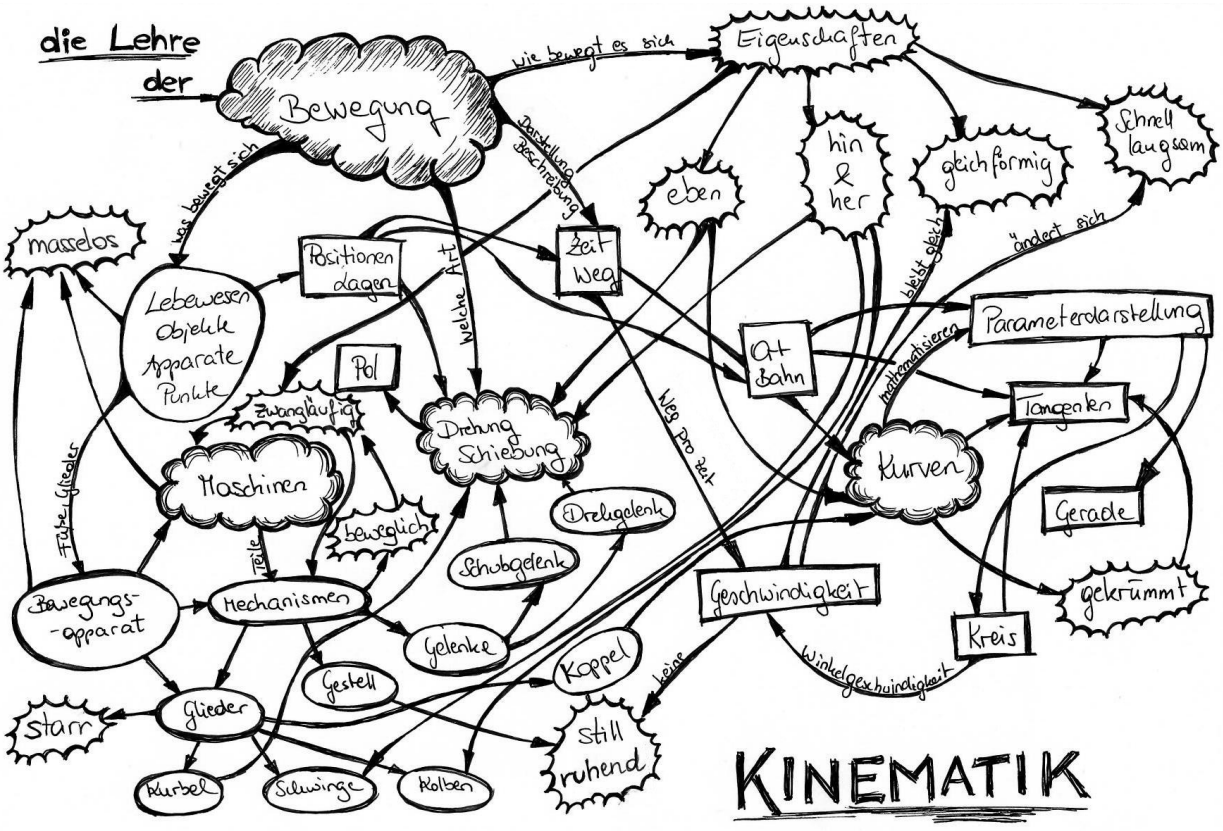


Abb. 10: Mögliches Begriffsnetz - Kinematik als Oberbegriff

Begriffserklärung mittels historisch genetischem Prinzip

Otto Toeplitz[38] beschrieb 1927 im Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung die Schwierigkeiten der Universitätsvorlesungen über die Infinitesimalrechnung. In diesem schrieb er

> und sagte mir: all diese Gegenstände der Infinitesimalrechnung [...] das bestimmte Integral, der Differentialquotient [...] bei denen nirgends die Frage berührt wird: warum so? wie kommt man zu ihnen? alle diese Requisiten müssen doch einmal Objekte eines spannenden Suchens, einer aufregenden Handlung gewesen sein, nämlich damals als sie geschaffen wurden.
>
> (Toeplitz, 1927, S. 92 f.)

Dies beschreibt die Natur des von ihm in dieser Schrift vorgestellten genetischen Prinzips sehr gut. Es wird nicht nur das entstandene Produkt, sondern ebenfalls der dahinterstehende Prozess seiner Entstehung in die Erarbeitung miteinbezogen. Additiv historisch betrachtet können oftmals die notwendigen Entwicklungsschritte noch besser nachvollzogen und der Begriff dadurch besser verstanden werden. Hier ist wichtig klarzustellen, mit *historisch* ist nicht die Geschichte eines Begriffes gemeint, als vielmehr seine Genese. Nur die wirklich wichtigen, entscheidenden Momente in seiner Entstehungsgeschichte sind dabei von Relevanz. Den Schülerinnen und Schülern einen historischen Abriss der Begriffsentwicklung der Kinematik zu geben, versetzt sie in den damaligen Zeitgeist der Erfinder und der maschinellen Revolution. Der Kern, das Wesen der Kinematik kann durch die historisch-genetische Betrachtungsweise aus anderen Blickwinkeln wahrgenommen werden, was wiederum zum Aufbau des Begriffsverständnisses beiträgt.

Die mentalen Modelle zum Begriff Kinematik werden weiters im Laufe der Bearbeitung kinematischer Themen ausgebaut und gesichert werden. Durch wiederholtes Handeln, Wahrnehmen und Verbalisieren in diesem Themenbereich werden Kenntnisse erworben und Fähigkeiten angeeignet, dadurch passende Vorstellungen der Kinematik erworben (vgl. Weigand et al., 2018).

4.1.2 Der Begriff *Bewegung*

Die Bewegung, ihre Beschreibungen und ihre Gesetze sind *die Essenz* der Kinematik. Bewegungen sind den Schülerinnen und Schülern längst aus unterschiedlichen Gegenständen bekannt. Ihre Formen, ihre Eigenschaften und ihre unterschiedlichen Vorkommen konnten bereits vielfach

[38] Otto Toeplitz, 1881-1940, deutscher Mathematiker.

bearbeitet und studiert werden. Dadurch existiert bereits ein Begriffsnetz rund um Bewegung. Ob in Biologie, in der über den Bewegungsapparat zu hören war, im Sportunterricht, in dem sich Schülerinnen und Schüler mit Gliedern und Gelenken auseinandersetzen konnten, über den physikalischen Zugang zur Bewegung oder auch in unterschiedlichen Beispielen der Mathematik, Schülerinnen und Schüler bekamen bereits viel Gelegenheit, um zum Begriff *Bewegung* unterschiedliche mentale Modelle auszubilden. Diese Vorstellungen können nun über die Verbindung zur Kinematik erweitert, modifiziert und gesichert werden, weshalb hier eine hervorragende, langfristige Lernstrategie zu tragen kommt. *Bewegung* ist *zentraler Begriff* der Kinematik, nimmt aufgefasst als Abbildung ebenso die Rolle eines *Leitbegriffs* innerhalb der Mathematik und Geometrie ein, der immer wieder in unterschiedlichsten Zusammenhängen vorkommt und sich über mehrere Jahrgangsstufen erstreckt. Der Begriff Kongruenzabbildung in Verbindung mit dem Begriff Bewegung kann aber didaktisch gesehen Schwierigkeiten bereiten. So schreibt etwa Roth in seiner Dissertation (2005):

> In der *Mathematik* tritt der Begriff „Bewegungen“ als Bezeichnung für die Kongruenzabbildungen als Untergruppe der affinen Abbildungen auf. Dieser Bewegungsbegriff ist im Zusammenhang mit dem Beweglichen Denken *nicht* gemeint. Zwar wird gerade auch im Geometrieunterricht zur Erarbeitung der Kongruenzabbildungen auf der intuitiven Ebene gerne mit stetigen Übergängen gearbeitet, aber beim Ziel, dem (geometrischen) Abbildungsbegriff, interessiert nicht die Art des Übergangs vom „Urbild“ zum „Bild“, sondern es kommt im Wesentlichen auf die Zuordnung, im Sinne der Bewegung also nur auf den Anfangs- und Endzustand an.

In der Aufbereitung der Kinematik ist diese Problematik fachlich gesehen beseitigt. In Kapitel 2.4 ist der Weg von der gleichsinnigen Kongruenzabbildung hin zu einer kontinuierlichen, einparametrigen Bewegung oder auch Verlagerung genau nachvollziehbar. Dennoch wird in der Definition der Kongruenzabbildung der Begriff *Bewegung* verwendet. Diesen Unterschied gilt es stets im Auge zu behalten. Hier können sich womöglich Verständnisschwierigkeiten einschleichen, die erst spät oder womöglich nicht entdeckt werden. Diese Problematik kann aber auch genützt werden. Durch das sogenannte *Lernen in Stufen* wird durch Reflexion und Analyse von bereits vorhandenem Wissen eine neue Art von Wissen, eine bessere Qualität von Verstehen erreicht (vgl. Vollrath & Roth, 2011, S. 95). In diesem Zusammenhang etwa eignet sich die Analyse der ebenen Bewegung hinsichtlich Inertialsystemwechsel. Die Relativität von Ruhe und Bewegung spielt in der Kinematik eine zentrale Rolle, weshalb in diesem Kontext die Begriffe *Gang- und Rastebene* das Verständnis der Schülerinnen und Schüler für ebene Bewegungen auf eine weitere Stufe heben kann. Die Bewegung als etwas wahrzunehmen, das mechanisch erzeugbar, steuerbar, veränderbar und anwendbar ist, kann als weiteres Beispiel eines solchen Lernens in Stufen

gedeutet werden. Den Ansatz der konkreten Bewegungserzeugung durch das Zusammenfügen schon bekannter Bewegungen über Mechanismen betrachtet das Thema von einem weiteren, bislang unbekannten Standpunkt, was nach Aebli (1983) eine essentielle Methodik zum Durcharbeiten eines Begriffs darstellt. Es gibt noch viele andere solcher Beispiele, die hier keine weitere Erwähnung finden werden.

4.1.3 Der Begriff *Momentanpol*

Der Pol oder auch Momentanpol in der Kinematik ist ein zentrales Objekt. Doch nicht nur kinematisch betrachtet nimmt dieser eine wichtige Stellung ein, seine Behandlung birgt didaktische Schwierigkeiten, denn bei der Bearbeitung des momentanen Drehzentrums befindet man sich mitten in Denkweisen und Begriffsverwendungen der Differentialrechnung. Grenzwertüberlegungen sind aus der 6. Klasse in Verbindung mit Folgen bekannt (BMBWF, 2019, S. 169), in der 7. Klasse ist für die Differentialrechnung vorgesehen „*Grundlagen der Diffenrentialrechnung [...] -Den Differenzen- und Differentialquotienten als Sekanten- bzw. Tangentensteigung sowie in außermathematischen Bereichen deuten können*“ (BMBWF, 2019, S. 170). Deshalb können unter Umständen notwendige Begriffe und Grundvorstellungen noch gänzlich unbekannt sein. Je nachdem in welchem Stadium sich die Erarbeitung der Differentialrechnung im Mathematikunterricht befindet, sieht man sich hier mit unterschiedlichen Begriffsnetzen konfrontiert, weshalb aufgrund didaktischer Überlegungen in der Aufbereitung des Begriffs Momentanpol Vereinfachungen gemacht werden müssen. Mehrere Lösungsvorschläge zu diesem Problem bieten sich an:

- Mittels genetischer Definition des Momentanpols wird auf die Ausarbeitung des Grenzwertprozesses verzichtet.
- Aufbereitung über intuitiven Zugang zum Grenzübergang und den dadurch resultierenden Momentanpol. Ganz im Sinne der didaktische Reduktion (Lehner, 2012) muss hier, je nach Wissenstand der Schülerinnen und Schüler, die inhaltliche Komplexität vereinfacht werden.
- Mithilfe des Mathematikunterrichts wird angestrebt, fächerübergreifend zu agieren, damit der Momentanpol exakt erarbeitet werden kann.
  Somit wird der Unterricht der DG und Mathematik in ihren Inhalten verbunden.
- Sollten die Schülerinnen und Schüler in der Differentialrechnung im Mathematikunterricht schon eine Basis der notwendigen Grundvorstellungen momentaner Änderung erarbeitet haben, wird wohl die Begriffsbildung des Momentanpols weniger Schwierigkeit aufweisen. In diesem Falle wird er in ein bestehendes Begriffsnetz eingebettet, das durch den Begriff des Momentanpols erweitert werden kann.

Unabhängig der oben genannten Lösungen zur Erarbeitung des Begriffs folgt eine stetige Auseinandersetzung mit der momentanen Drehung. Ziel ist es, den Momentanpol ebener Bewegungen als zentrales Objekt der Kinematik zu erfahren.

4.1.4 Die Begriffe *Getriebe, Gelenke* und *Glieder*

Weil ebene Bewegungen mechanisch realisiert werden, befindet man sich in ihrer Bearbeitung mitten in der Getriebekinematik, wodurch die Begriffe Getriebe, Gelenke und Glieder fester Bestandteil der Behandlung der ebenen Kinematik werden. Die Erweiterung der Analyse auf die konkrete Erzeugung und Umwandlung von Bewegungen durch Mechanismen ebnet den Weg in ein Feld, das ohne diese, wenn auch nur kurzfristig und intuitiv gelernten Begriffe, nicht auskommen wird. Spezielle Mechanismen bedienen sich speziellem Vokabular, wie etwa die Koppelgetriebe. Sie sind keine rein geometrischen Begriffe, ihre Erarbeitungsphase kann kurz gehalten werden. Es genügt sie kurzfristig und intuitiv zu lernen, sie dienen hauptsächlich als Arbeitsbegriffe (Vollrath & Roth, 2011), sie werden für eine präzise, mißverständnisfreie Kommunikation gebraucht. Ziel ist auch, die notwendigen Begriffe der Getriebekinematik in das vorhandene Begriffsnetz der Schülerinnen und Schüler sinnhaft einzugliedern.

4.2 Beweise und Argumentation

Weil die Kinematik auf einem Satz fußt, der in seiner Aussage als auch seiner Beweisführung durchaus schultauglich ist, soll hier darauf näher eingegangen werden. Für eine umfassende Beleuchtung dieser allgemeinen Thematik im Mathematikunterricht wird hier auf das Buch „Mathematisches Argumentieren, Begründen und Beweisen; Grundlagen, Befunde und Kozepte“ von Esther Brunner 2014 verwiesen.

Die Mathematik und auch ebenso die Geometrie sind Wissenschaften, deren Theoriegebäude auf Beweisen und Argumentationen aufgebaut ist. Die logisch strenge Schlussfolgerung ausgehend von einer Axiomatik sind ihre Grundpfeiler. Im Vergleich zum Alter mathematischer Anwendung ist aber jener Zugang der Hintergrundforschung, gar der logisch deduktiven Schlussfolgerung, noch relativ jung (vgl. Müller-Philipp & Gorski, 2008, S. 64 ff.). Die Mathematik und Geometrie fanden ihre Wege in die Welt vorerst über ihren Anwendungscharakter, so galt es lange Zeit aus sehr praktischen Gründen konkrete Rechenprobleme zu lösen oder Land und Himmel zu vermessen. Erst mit der klassischen Antike zog allmälich auch die Ursachenforschung in diese Disziplinen mit ein. Mittlerweile kann die Geometrie und Mathematik auf verschiedenste Beweisarten, -findungen und -techniken zurückgreifen. Beweise müssen lückenlos und vollständig sein, um als solche zu gelten. Üblicherweise werden auch noch Minimalität und ein gewisser Formalismus in Struktur, Form und Sprache von ihnen verlangt (vgl. Wittmann in Weigand

et al., 2018, S. 21–42).

Ein Blick in den Lehrplan sowie in aktuelle Schulbücher offenbart, dass Beweise in dieser strengen, formal-deduktiven Durchführung in der Schule, nicht zuletzt wegen ihrer oftmals hohen Komplexität, wenig Platz finden. Für Schülerinnen und Schüler müssen deshalb sinnvoll anwendbare Formen des Beweisens gefunden werden. Dieser Zugang schlägt sich in den kompetenzorientierten Bildungsstandards nieder, in welchen nicht von Beweisführung sondern von Argumentieren und Begründen die Rede ist. Somit bewegt sich das Beweisbedürfnis in der Schule auf einem weniger formalen Level. Strenge Beweisführung wird sprachlich und technisch gelockert, Ungenauigkeiten dürfen zugunsten des Verständnisses vorkommen. Die logische Struktur allerdings darf keine Einbuße erfahren. Denn nach Brunner (2014, S. 9) kann „ein Zusammenhang [..] auch verstanden und logisch kohärent begründet werden, ohne dass dies bereits in einer formal-deduktiven Weise zu erfolgen hat."

Der Beweis schlechthin- der Fundamentalsatz der ebenen Kinematik

Sich mit der ebenen Kinematik qualitativ auseinanderzusetzen bedeutet ebenfalls zu erkennen, auf welchem Fundament ihre gesamte Theorie gebaut ist. So gründet sich ihr Theoriegebäude letztendlich auf dem Fundamentalsatz der ebenen Kinematik: *Zwei Lagen gleichsinnig kongruenter Figuren der Ebene lassen sich stets durch Drehung oder Schiebung ineinander überführen.* Aufgrund seiner auf der einen Seite tiefgründigen Aussage und gleichzeitig einfachen Beweisgrundlage eignet er sich für die Bearbeitung mit Schülerinnen und Schülern besonders gut. Es werden zwei verschiedenartige Argumentationsweisen angeboten:

- Deckung durch Spiegelung, folgend kurz: *DdS*
- Deckung durch Drehung, folgend kurz: *DdD*

In Ausgangslage und Beweisvorraussetzungen sind sie ident, obwohl sie in ihrer Argumentationskette nur leicht unterschiedlich sind, ergeben sich dadurch didaktische Konsequenzen: Im Falle der *DdS* wird mit der Verwendung und Argumentation mittels Spiegelungen an Vorwissen der Schülerinnen und Schüler angeknüpft bzw. jenes vorausgesetzt. Es handelt sich um einen inhaltlich-anschaulichen Beweis, in welchem die visuelle Darstellung der Argumentationskette im Vordergrund steht. Wittmann (in Weigand et al., 2018, S. 39) charakterisiert inhaltlich-anschauliche Beweise wie folgt:

> Jede Handlung und jeder relevante Aspekt der Zeichnung entsprechen hierbei einem korrekten mathematischen Argument. [...] [Anm. der Autorin: Die inhaltlich anschaulichen Beweise] geben den 'mathematischen Kern' des Sachverhalts korrekt wieder und lassen sich deshalb stets formalisieren und zu einem exakten Beweis weiterentwickeln.

Bei der *DdD* wird direkt mit Rotationen gearbeitet, setzt weniger Vorwissen der Lernenden voraus, dadurch ergibt sich aber eine leicht zu übersehende Beweislücke (vgl. Wunderlich, 1963), die in jedem Fall durch geeignete Argumentation geschlossen werden muss. Zu beachten ist, dass hier Verwirrungspotential besteht. Der erforderte indirekte Beweisschluss der Lücke regt zwar zur Diskussion an, ist Übung zum Erlernen einer Beweisführung bzw. -findung, jedoch kann die Schülerin bzw. der Schüler von der eigentlichen Beweisaussage leicht abgelenkt sein.

An dieser Stelle muss reflektiert werden, welche Funktion der Beweis des Fundamentalsatzes für Schülerinnen und Schüler bekleiden soll. Natürlich haben diese Beweise eine verifizierende Funktion, wichtiger aber noch ist ihre Erklärende. Die Aussage des Satzes als fundamentale Grundlage der ebenen Kinematik soll verstanden werden. „Beweise dienen also einerseits der *Sicherung* mathematischen Wissens, andererseits aber auch dem *Verstehen*." (Wittmann in Weigand et al., 2018, S. 24) Der Vorteil der *DdS* ist klar die inhaltliche Anschaulichkeit, wobei diese keineswegs den Erfolg des Verständnisses der Kernaussage garantiert. Etwaige Schwierigkeiten können sich gerade aus dieser Anschaulichkeit ergeben. Schülerinnen und Schüler laufen Gefahr, diesen Beweis als solchen nicht zu erkennen und dadurch die Aussage zu verkennen. Angeleitete konstruktive Darstellung in Verbindung mit guter Beweisdokumentation ist hilfreich. Der Einsatz von DGS bietet sich hier ebenfalls an. Der Vorteil der *DdD* liegt klar in seiner prototypischen[39] Aufbereitung. Die bewusste Lückenschließung der Argumentationskette ist dem Verständnis der Kernaussage des Satzes nicht dienlich. Der Zugang der *DdD* hat Verifikationscharakter, weniger Erklärungscharakter.

Weitere Beweise innerhalb der Kinematik

Die Kinematik bietet einige weitere Beweismöglichkeiten innerhalb unterschiedlicher Teilbereiche, wie etwa das Abrollen der Gang- auf der Rastpolkurve. Gerade in den speziellen, beispielhaften Anwendungsbereichen wie der Trochoidenbewegung finden sich Möglichkeiten, Beweise schulgerecht aufzubereiten. Da die Kinematik allerdings sehr anwendungsorientiert arbeitet, steht das formal-deduktive Beweisbedürfnis eher im Hintergrund. Hier wird deshalb auf weitere didaktisch aufbereitete Beweise verzichtet.

4.3 Klassifikation ausgewählter Kinematiken

In bestimmten Bewegungen finden sich wichtige Gesetzmäßigkeiten und Erkenntnisse, welche für die heutige Welt und Technik von äußerster Bedeutung sind. Daher ist es durchaus sinnvoll,

[39] im Sinne exemplarischer, formal-deduktiver Beweisstruktur mit Fallunterscheidung und Lückenschließung

zwei relevante Bewegungsmechanismen didaktisch näher zu beleuchten und sie zu klassifizieren:

- Die Bewegung eines Gelenkvierecks, auch Koppelgetriebe genannt.
- Die Rollung eines Kreises mit ihrer Rollkurve, auch Trochoide genannt.

4.3.1 Zur Bewegung eines Gelenkvierecks

Zuerst müssen hier einige Begrifflichkeiten beachtet werden. Der Ausdruck *Gelenkviereck* muss sorgfältig ins Begriffsnetz der Vierecke eingegliedert werden, wobei aber leicht Verständnisschwierigkeiten entstehen können. Begrifflich sehr ähnlich, muss klar herausgearbeitet werden, dass Gelenkvierecke keine Vierecke im eigentlichen Sinn sind. Das Objekt *ebenes Gelenkviereck*, definiert als Viereck mit bekannten Seitenlängen und variablen Innenwinkeln, unterscheidet sich grundlegend vom Objekt *ebenes Viereck*. Im Haus der Vierecke werden diese wegen ihrer Objekteigenschaften wie Symmetrie oder Winkel klassifiziert (vgl. Roth und Wittmann in Weigand et al., 2018, S. 122–125), diese Klassifikation kann auf Gelenkvierecke nicht zutreffen. Da das *Gelenkviereck* kinematisch entsteht, ist eine kinematische Klassifikation vonnöten. Diese richtet sich nach der vollen Drehbarkeit der bewegten Eckpunkte. Die Frage, ob ein Eckpunkt eine volle Umdrehung ausführen kann oder nicht ist eine Frage der Beweglichkeit, also ebenfalls, wie bei den Vierecken, eine Klassifikation nach einer Eigenschaft. Diese Objekteigenschaft ist es demnach auch, die direkt von der geometrischen hin zu einer technischen Klassifikation führt. Daher lassen sich die Gelenkvierecke auch anwendungsorientiert in die Welt der Technik einbinden, womit man den Bereich der Koppelgetriebe als Übertragungs- bzw. Führungsgetriebe betritt, einem der häufigsten und wichtigsten, anwendungsorientierten Bereiche der Kinematik.

Viergelenkgetriebe erlauben vielseitige maschinelle Betriebsmöglichkeit. Es bietet sich zwar eine weitere Klassifikation innerhalb der Koppelgetriebe an, so ist etwa das oben definierte Gelenkviereck ein viergliedriges Drehgelenkgetriebe, wobei der Austausch eines Drehgelenks mit einem Schubgelenk zur Änderung der Seitenlängen Vierecks führt. Es liegt dann zwar noch ein Koppelgetriebe vor, allerdings eine andere Form, so können hier weitere Einteilungen und Spezifikationen gemacht werden. Die didaktische Frage nach dem Lernziel der technischen Einbettung allerdings führt weniger hin zur strengen Klassifikation der Koppelgetriebe, als vielmehr zur exemplarischen, handlungsorientierten Veranschaulichung verschiedener Getriebe und deren tatsächlicher Einsatz. Damit erweitert sich der Anschauungsraum, wodurch die Beziehung zwischen Geometrie und Wirklichkeit ersichtlich wird.

Mit Koppelgetrieben und deren technischen Einsatz können sich anschauliche Vorstellungen bei den Schülerinnen und Schülern entwickeln, das „geometrische Auge“ (Weigand et al., 2018, S. 5) wird geschult und diese technische Errungenschaft durch die Lernenden erschlossen.

4.3.2 Zur Rollung des Kreises

Die Rollbewegung des Kreises ist ein im Unterricht durchführbares sehr eindrucksvolles Anwendungsbeispiel der Kinematik. Es gibt zahlreiche unterschiedliche Aspekte dieser Bewegung, hier soll eine besondere Klassifikation, die der Trochoide, Zentrum der Betrachtung sein. Bei den Gelenkvierecken war durch ihre bewegliche Natur die Notwendigkeit einer kinematischen Klassifizierung unumgänglich. Im Fall der Rollbewegung eines Kreises auf einem anderen braucht es keine Klassifizierung des bewegten Objekts wie vorher, hier handelt es sich um die Einteilung spezieller Kurven, die durch diese Bewegung erzeugt werden können. Die Klassifikation stützt sich auf die gegenseitige Lage des Gang- und Rastkreises, *innen rollend* und *außen rollend*, sowie auf den Vergleich ihrer Radien. Diese Einteilung setzt zwar zwei Kreise in Relation zueinander, sie bezieht sich aber nicht auf diese, sondern auf Bahnkurven von Punkten der sich bewegenden Ebene.

Weil diese Klassifikation auch sehr anschaulich mittels DGS betrieben werden kann, befindet man sich mitten in einer experimentellen Kurvendiskussion. Durch die Einfachheit dieser Einteilung ist eine Eigenschaftserkundung dieser besonderen Kurven und deren Vergleich sehr abwechslungsreich.

4.4 Kinematisches Problemlösen

Problemlösen und Problemlösekompetenz genießt in der Geometrie sowie auch Mathematik hohen Stellenwert. Aufgabenstellungen und deren oftmals kreative und vielschichtige Lösungsfindung sind zentrale Aspekte, deren Erarbeitung in keinem Unterricht fehlen darf. Unter einem *Problem* versteht man eine mathematische oder auch geometrische Fragestellung, deren Antwort nicht klar ersichtlich ist und die zu intensiven mathematischen Denkstrategien motiviert (vgl. Vollrath & Roth, 2011). Um Probleme erfolgreich lösen zu können, bedarf es die Ausbildung und Aneignung heuristischer Strategien, mithilfe derer eine Aufgabe in geordneter, zielorientierter Weise bearbeitet werden, es ist, wie Wittmann (in Weigand et al., 2018, S. 69) formuliert, „weder ein planloses Probieren [...] noch das Warten auf einen genialen Einfall [...].“ Durch Übung lassen sich mathematische und heuristische Fähigkeiten kombinieren und anwenden, wodurch neues Wissen, ausgebildet und gefestigt werden kann. Neben diesem Aspekt ist Problemlösen noch eng verbunden mit dem Aspekt der Anwendungsorientierung und die damit einhergehende Modellbildung (vgl. Wittmann in Weigand et al., 2018). Gerade auch deswegen eignet sich die Kinematik hervorragend für geometrische und mathematische Wissensanwendung zur Lösung von konkreten Problemen. Das Wesen der Kinematik ist, wie aus ihrer Historie ersichtlich, sehr praktisch veranlagt. Ihre Entstehungsgeschichte wurzelt im kreativen Erfindungsgeist ausgelöst durch sehr konkrete technische Wunschvorstellungen. Problemlösen ist also sozusagen die Essenz

der heute auch systematisch betriebenen Kinematik, weshalb sie immer noch zur Realisierung von technischen Herausforderungen unersetzbar ist.

Die Lagensynthese exakt und experimentell

Die zur Grundlagenforschung der Getriebe- und Mechanismentechnik gehörende Lagensynthese von Koppelgetrieben ist ein Beispiel zur möglichen didaktischen Aufbereitung mittels konstruktiv exakten oder auch experimentellen Lösungsverfahren. Unter Lagensynthese versteht man vorgegebene Positionen eines Objekts, die mittels eines Getriebes ineinander überführt werden sollen. Hier und auch in der klassischen Anwendung der Lagensynthese handelt es sich um viergliedrige Drehgelenkgetriebe mit deren Hilfe man ein Objekt, repräsentiert als Strecke $[AB]$, in unterschiedliche, vorgegebene Lagen bewegen kann. Minimal dafür sind Anfangs- und Endlage, jedoch können Zwischenpositionen ebenso überstrichen werden. Die exakte Ermittlung der Lösungen erfolgt über verschiedene kinematische Methoden und Berechnungen, welche jedoch ab der Angabe von mehr als drei Positionen den schulischen Rahmen sprengen würde. Deshalb gilt es diese Schwierigkeit didaktisch zu umgehen indem man die Lagensynthese durch geeignete Vereinfachung und DGS auch auf schülerinnen- und schülergerechte Weise zugänglich macht.

Für die Ermittlung eines geeigneten Viergelenksgetriebes zur Überführung eines Objekts von einer Lage in eine Zweite beziehungsweise eine dritte Lage bietet sich die exakte Problemlösungsermittlung mithilfe konstruktiver Techniken an. Die Frage wie sich zwei Lagen ineinander konkret überführen lassen bietet viel Raum für innergeometrische Überlegungen. In dieser Aufbereitung ist stets zu beachten, dass die Schülerinnen und Schüler das notwendige fachliche Vorwissen schon erlangt haben oder bereitgestellt bekommen.

Ein weiterer Zugang zum Problemlösen sind die Vorgaben von mehr als 3 Lagen, die das Objekt überstreichen soll. Die exakten Lösungsstrategien sind sehr aufwendig, bedürfen auch etwaig einiger Berechnungsarbeit (vgl. Hagedorn et al., 2009, S. 173) und sind somit nicht geeignet für den Unterricht. Deshalb ist die schülerinnen- und schülergerechte Lösungsstrategie hier von konkret-experimenteller Natur. Mittels Vorgabe, um welches Führungsgetriebe es sich handeln soll und welche Lagen überstrichen werden sollen, ist die Lösung der gestellten Aufgabe dabei experimentell mit geeignetem DGS zu ermitteln. Probleme können unterschiedlich lösbar sein, in diesem Fall gibt es mehrere Varianten, die als Lösung gelten können, das heißt exakte Lösungen gibt es hier nicht. Das Ziel jedoch dieses Aufgabentypus soll nicht sein, exakte Lösungen zu finden, sondern eine typische Anwendung der Kinematik in der Realisierung bestimmter Fragestellung zu erleben und dadurch die Vorstellung zu erweitern, welche Aufgabe die Kinematik in der Welt der Technik inne hat, auch wenn die schulische Lösungsfindung unterschiedlich zur herkömmlichen Methodik ist.

Weitere Problemstellungen

Die Kinematik und ihre Anwendungen bietet eine Vielzahl an geeigneten Problemstellungen, die mittels unterschiedlichster Techniken gelöst werden können. Da wären zum Beispiel weitere Konstruktionsprobleme wie die Tangentenermittlung an kinematisch erzeugten ebenen Kurven, Berechnungsprobleme wie die Berechnung des Übersetzungsverhältnisses eines Getriebes oder auch Modellierungsprobleme wie die Erkennung von Mechanismen die bestimmte Bewegungen erzeugen. Grundsätzlich könnte man sagen, aus Problemen ergeben sich Probleme, so initiiert die Bearbeitung kinematischer Aufgaben das Erscheinen weiterer Fragestellungen ganz von selbst.

4.5 Konstruieren in der Kinematik

Das Konstruieren ist eine der wichtigsten Tätigkeiten in der Geometrie. Es bedient mehrere Zwecke, so schreibt Ludwig (in Weigand et al., 2018, S. 51) über das *Konstruieren* im geometrischen Sinn: „[Anm. der Autorin, Es geht um das] gedankliche Erzeugen ideeller Objekte [...] mit Hilfe idealisierter Operationen [...]. Dies führt dann in der Vorstellung zu theoretisch exakten Ergebnissen;“ Die Stärke der Konstruktion liegt in ihrer, in endlichen Schritten, nach klar definierten Regeln beschreibbaren Eindeutigkeit.

Die tatsächliche Realisierung der Konstruktion im klassischen Sinn mittels Zirkel und Lineal transformiert diese ideellen in reale, im geometrischen Sinne nicht exakte Objekte, man arbeitet mit Annäherungen. Damit gewinnt die Konstruktion starken Anschauungscharakter, der gerade in der Darstellenden Geometrie hohen Stellenwert genießt. Außerdem muss noch erwähnt werden, dass oftmals die Konstruktion aus konkreten Problem- und Fragestellungen erwächst, wodurch sie in der Geometrie maßgeblich zur Entwicklung starker Problemlösekompetenzen beiträgt.

Weiters versteht man unter *Konstruktion* im technischen Sinne die Planung, Ausarbeitung und Erzeugung technischer Objekte und Maschinen (vgl. Ludwig in Weigand et al., 2018), weshalb hier die Kinematik als *das* zentrale Feld der geometrischen Bearbeitung von sich bewegenden Maschinen und Maschinenteilen eine Brücke zwischen dem geometrischen Konstruieren und der technischen Konstruktion schlägt.

4.5.1 Zur händischen Konstruktion

Von besonderer Eignung erweisen sich die Ermittlung von Bahnkurven von Punkten, die einem Zwanglauf unterliegen. Dabei ist die Bandbreite von geeigneten Bewegungen sehr groß.

Die Trochoidenbewegung, aufgefasst als Verkettung zweier Rotationen eines Punktes etwa, eignet sich hervorragend für die punktweise Ermittlung seiner Bahnkurve. Das selbstständige Auffinden der Bahnkurve mithilfe der korrekt interpretierten Winkelgeschwindigkeiten schult

das geometrische Vorstellungsvermögen, um schrittweise die gesuchte Bahnkurve zu ermitteln. Geometrische Argumentation steht im Vordergrund, zum einen für die Auffindung der Bahnkurvenpunkte durch direkte Anwendung der Rotationen, zum anderen durch spezielle Symmetrieeigenschaften der Trochoide. Dabei vernetzen sich auch über den konstruktiven Zugang die Begriffe *Spiegelung* und *Drehung*. Im Falle der Trochoidenbewegung eignet sich nicht nur die punktweise Ermittlung der Bahnkurve eines Punktes, sondern ebenfalls die Tangentenermittlung spezieller Bahnkurvenpunkte durch geeignete Argumentation und Symmetrieeigenschaften. Diese punkt- und tangentenweise Ermittlung der Bahnkurve benötigt konstruktiv-heuristische Problemlösefähigkeit. Ein klar definiertes Anwendungsschema trifft hier nicht zu, wodurch die Schülerinnen und Schüler zur selbstständigen Anwendung heuristischer Strategien gefordert werden. Die konstruktive Ermittlung einer Tangente in einem allgemeinen Punkt muss geeignet über die Verwendung des Momentanpols als Berührpunkt der Rollkreise aufbereitet werden.

Eine weitere Punkt- und Tangentenkonstruktion, die händisch konstruktiv realisiert werden kann, ist diejenige der Koppelkurvenpunkte. Im Zentrum steht nicht die Auffindung der Bahnkurve als solche, welche durchaus möglich und durchführbar ist, hier geht es um das konkrete Anwendungspotential des Momentanpols. Durch das Auffinden des Momentanpols einer Lage des Koppelgetriebes ist die Tangentenermittlung des kurvenerzeugenden Koppelpunktes schnell und einfach durchgeführt. Dies erfordert allerdings genaue Kenntnis der Schülerinnnen und Schüler über Momentanpole, deren Entstehung und deren Eigenschaften. Diese Tangentenkonstruktion fungiert als konkrete, algorithmische Konstruktionsanleitung, die Übung, in Form von wiederkehrender Anwendung benötigt, um gefestigt zu werden. Durch diese Tangentenkonstruktion können natürlich in weiterer Folge solche Koppelkurven auch händisch konstruktiv aufgefunden werden.

Weiters liegen durchzuführenden Konstruktionen mittels Zirkel und Lineal oftmals Problemstellungen zugrunde. Wie in 4.4 schon besprochen, eignet sich zur händischen Konstruktion die Getriebeermittlung zur Überführung eines Objekts einer bestimmten Lage in eine Zweite beziehungsweise Dritte. Der zentrale Aspekt dieser Art von Aufgaben ist eine logisch deduktive Schlussfolgerung über ebene Bewegungsmöglichkeit eines Objekts und deren Einschränkung. Die Lösung des Problems fußt auf Standardkonstruktionen. Im Mittelpunkt einer solchen Aufgabe steht zum Einen die Begründung der Konstruktion sowie das Auffinden geeigneter Getriebe und deren Stellungen für die gesuchte Bewegung.

4.5.2 Zur DGS Konstruktion

Wie in Kapitel 2.4.4 besprochen, ist eine Dynamische Geometrie Software für die Bearbeitung und Visualisierung von Inhalten der Kinematik von größter Bedeutung, da Bewegungen interaktiv schnell modelliert werden können. Die DGS erweitert das Konstruktionspotential um ein

Vielfaches. Für die Ermittlung der Bahnkurve eines sich bewegenden Punktes ist mithilfe der DGS aber ein anderer Schwerpunkt gegeben. Im Mittelpunkt steht hier die Konstruktion eines sich in der Ebene bewegenden Mechanismus, abhängig von einer interaktiv änderbaren Größe, der den Punkt, dessen Bahnkurve man erzeugen möchte, auch tatsächlich in Echtzeit korrekt bewegen lässt. Hat man die Hürde der Konstruktion des Bewegungsmechanismus bewältigt, ist die Erzeugung seiner Bahnkurve mittels Ortslinienbefehls oder auch des Spurbefehls sehr einfach. Im Falle der Trochoidenbewegung sowie auch der Koppelkurven stellt sich die Frage, wie die Konstruktion eines rotierenden Punktes, abhängig vom Rotationswinkel, durchzuführen ist. Dabei eignet sich eine klar detaillierte Konstruktionsbeschreibung, in der grundlegende DGS-Konstruktionen beschrieben sind, die für die Umsetzung einer ebenen Bewegung vonnöten sind. Außerdem empfiehlt es sich bei der Konstruktion von sich bewegenden Mechanismen die Abmessungen und Abstände der Glieder variabel zu halten, da man so mit einer einmaligen Konstruktion des Mechanismus eine ganze Bandbreite an Bahnkurven von Punkten interaktiv erkunden kann.

Die Lösungen in 4.4 besprochenen Lagensynthese mit mehr als drei vorgegebenen Objektlagen genießt in der Verwendung der DGS einen experimentellen Zugang. Verschiedene Getriebearten können ausprobiert werden und die erzeugten Bahnkurven können interaktiv angepasst werden. Die Lösungserwartung ist dadurch sehr vielseitig, wodurch weitere Überlegungen und Fragestellungen, wie etwa die Berücksichtigung einer besonderen Getriebeaufhängung, erdacht werden können. Weil dieser Aspekt der Lagensynthese in Verbindung mit Schulunterricht eine sehr individuell kreative Seite aufweist, die Schülerinnen und Schüler zum eigenständigen *Experimentieren* und *Ausprobieren* angehalten werden, wird hier auf eine konkrete Modulaufbereitung verzichtet.

4.5.3 Zur Besonderheit der Verwendung von DGS in Verbindung mit kinematischen Inhalten: die differenzengeometrische Konstruktion von Tangente und Krümmungskreis

Ein Zugang zum Aufbau von Grundvorstellungen vom Ableitungsbegriff im Mathematikunterricht ist derjenige der Betrachtung einer Sekante an eine Funktion, die in ihrer Grenzlage in die Tangente an einen Punkt der Funktion übergeht (vgl. Greefrath et al., 2016). Diese Überlegung eröffnet eine allgemeine, sehr anschauliche, konstruktive Lösung mithilfe geeigneter DGS zur Findung von Tangenten an kinematisch erzeugte Kurven, die genau an diese Grundvorstellung knüpft. Hier ist die Darstellungsform der Kurve entscheidend. Im Gegensatz zum Mathematikunterricht, in dem mit Funktionen und ihrer Gleichungsdarstellung zur Herleitung der Tangente als Grenzfall der Sekante gearbeitet wird, wird hier die Kurve mithilfe geeigneter DGS kinematisch, als Bahnkurve eines sich zwangläufg bewegenden Punktes, erzeugt. Über diese Darstellung

ist es nun möglich einen zweiten Punkt zu konstruieren, der demselben Zwanglauf unterliegt, ihn jedoch im Vergleich zum ersten Punkt, etwas versetzt durchläuft. Dieser „Abstand“ zwischen den beiden Punkten äußert sich im mathematischen Zugang als Wert h , der dem Argument des ursprünglichen Punktes hinzugefügt wird, um einen zweiten, mittels kleiner werdendem h sich annähernden Punkt zu erzeugen (vgl. Greefrath et al., 2016, S. 155). Hier, im kinematischen Zugang, manifestiert sich h allerdings als Zugabe zum Parameter der den Zwanglauf kontrolliert. Da hier alle vorgestellten Zwangläufe über die Rotation eines Punktes angetrieben werden, ist der Zwanglauf folglich abhängig von einem Winkel ϕ, was bedeutet, dass sich der Wert h hier in einem Winkel $\Delta\phi$ manifestiert. Um diesen Winkel immer kleiner werden zu lassen, muss er variabel, als Schieberegler, konstruiert werden. Strebt nun $\Delta\phi$ gegen 0 so nähert sich der Punkt dem Anderen an. Eine Gerade durch diese beiden Punkte repräsentiert die Sekante. Durch den Schieberegler $\Delta\phi$ ist es möglich, die beiden Punkte so anzunähern, dass augenscheinlich kein Unterschied mehr festzustellen ist. Die Sekante wird optisch zur Tangente.

Sehr wichtig an dieser Stelle ist die Herausarbeitung der alleinig optischen Gleichheit. Würden die zwei Punkte exakt zusammenfallen, dann gäbe es keine Verbindungsgerade mehr und diese Konstruktion würde scheitern. Deshalb ist es sehr wichtig hervorzuheben, dass die Untergrenze des Schiebereglers $\Delta\phi$ minimal größer als 0 sein muss. Die didaktische Schwierigkeit in dieser Konstruktionstechnik liegt in der geometrischen Darstellung des Grenzfalles. Wenn $\Delta\phi \to 0$, nähert es sich *beliebig* an. Diese konstruktive Darstellung des Grenzfalles kann deshalb keine Exaktheitsansprüche erheben, sie ist lediglich augenscheinlich. Trotzdem muss hier hervorgehoben werden, dass diese Technik großen Wirkungscharakter birgt. Der Fehler, der ihr innewohnt ist von minimaler, verschwindender Größe, sodass er zugunsten des Anschauungscharakters durchaus vernachlässgt werden kann. Greefrath formuliert es folgendermaßen: „Man bedient sich eines intuitiven, geometrisch-visuellen Verständnisses des Grenzprozesses“ (2016, S. 156). Damit erreicht man nicht nur die problemlose konstruktive Ermittlung der Tangente in jedem beliebigen Punkt einer kinematisch erzeugten Kurve, es unterstützt ebenfalls den Ausbau der Grundvorstellung von Tangenten als Grenzgeraden von Sekanten.

Als weitere Folge dieser Konstruktionstechnik ergibt sich die Konstruktion des Krümmungskreises in einem beliebigen Kurvenpunkt in gleichender Weise. Als Pendant zur Sekante, einer Verbindungsgerade zweier Kurvenpunkte, arbeitet man mit dem Umkreis dreier Kurvenpunkte. In Grenzlage geht dieser Kreis über in den Krümmungskreis der Kurve, der diese folglich dreipunktig berührt. An dieser Stelle ist zu beachten, dass bei Durchführung dieser Konstruktion die notwendigen Begrifflichkeiten bekannt sind. So ist etwa nicht vorausgesetzt, dass Schülerinnen und Schüler mit dem Begriff des Krümmungskreises vertraut sind. Sollte dies der Fall sein, kann durchaus ein intuitiv erklärender kinematischer Zugang zu diesem Thema gewählt werden, wie er etwa in Kapitel 3.1 erwähnt wird.

Die hier beschriebene Konstruktion im DGS des kurvenerzeugenden Mechanismus wird in dieser Technik wohl den größten zeitlichen Aufwand darstellen. Daher eignet sich in diesem Fall die eigenständige Erzeugung von Makros im DGS. Einzelne Konstruktionsschritte können zusammengefasst werden, sodass die Erzeugung weiterer Punkte der Kurve weniger Zeit in Anspruch nimmt.

4.6 Kinematische Modelle und Modellbildung

Umfassende theoretische Auseinandersetzung zum Thema Modellbildung findet sich in „Anwendungen und Modellieren im Mathematikunterricht“ von Greefrath (2018).

Um für Schülerinnen und Schüler eine geometrische Erfahrung umweltbezogen aufzubereiten, ist die Modellbildung oder auch Modellierung und ihr Kreislauf von zentraler Bedeutung. Eine reale Situation zu betrachten, sie geometrisch zu modellieren, bearbeiten, interpretieren und neue Informationen daraus zu gewinnen, die wiederum rückinterpretiert werden müssen, hat großen Anwendungscharakter und ist Grundlage für das Verständnis von auftretenden Phänomenen der Umwelt, Natur und Technik gleichermaßen.

Die Kinematik, erwachsen aus einer Welt der Beobachtung und des Studiums von Bewegungen, ist nicht allein ihrer Natur wegen sehr geeignet zur Beschreibung, Analyse und Prognose von Umweltphänomenen. Sie ist zudem so anschaulich und praktisch veranlagt, dass ihre Beschreibung nicht nur den Kreislauf der Modellbildung von Phänomenen bedient, haptisch fassbare Modelle von Bewegungen und Bewegungsabläufen sind ebenso wichtiger Bestandteil ihres Daseins. Immerhin entspringt sie einer technischen Erfindungskultur, die über den praktischen Zugang erst zur theoretischen Wissenschaft gefunden hat. Dieser Fakt ist didaktisch gut nutzbar.

4.6.1 Kinematisches Modellieren

So etwa ist die Modellierung eines Karussells geeignet, um Bewegungen und Bewegungsmuster greifbar zu machen. Das Break Dance im Wiener Prater ist hier ein hervorragendes Beispiel, um eine reale Situation in ein geometrisches Modell umzuwandeln. Dafür wird, in Abb. 11 angelehnt an den Modellierungskreislauf von Vollrath & Roth (vgl. 2011, S. 275), von der *realen Situation*, dem Break Dance ausgegangen. Das Break Dance ist ein Karusselltypus, der aus Bewegungen in zueinander parallelen Ebenen besteht, weshalb die Analyse vollständig innerhalb der ebenen Kinematik gemacht werden kann. Die Fragestellungen können unterschiedlich angesetzt sein, hier ist aber diejenige der Bahnkurve des Fahrgastes von Vorteil, da diese über Beobachtung sehr klar ersichtlich wird. Die Analyse der Situation benötigt, im Sinne der Modellierung, sehr viele Vereinfachungen und Idealisierungen, die allerdings erst getroffen werden können, wenn sich die Schülerinnen und Schüler der Komplexität der Situation bewusst sind. Dafür ist eine

ausführliche Besprechung notwendig, etwaige Recherche zum Aufbau wie Grund- und Aufriss des Break Dance, zur Konstruktion, wie tatsächlicher Antrieb, Gondeln, Arme, oder zu seiner Geschichte sind von Vorteil. Erst dann kann eine Vereinfachung getroffen werden, die mit den Schülerinnen und Schülern erarbeitet wird. Dabei entsteht ein *reales Modell*, das in strukturierter, vereinfachter und idealisierter Weise die Situation präzise wiedergibt.

Dann erfolgt die Bildung eines *geometrischen Modells*, das hier die Frage nach der Bahnkurve des Fahrgastes in geometrischen Termini beantwortet. Durch die Vereinfachung der Bewegung des Break Dance überstreicht der Fahrgast eine Trochoide. Mit dieser Erkenntnis bewegt man sich nun mitten im geometrischen Modell der Analyse, innerhalb dieses Modells können nun vielfach weitere Frage- und Problemstellungen, wie die händische Konstruktion, die Mathematisierung oder die Frage nach der möglichen kinematischen Umsetzung, bearbeitet werden. Diese Bearbeitungen ergeben *Resultate*, die im Sinne der Modellbildung wieder eingebettet in die reale Situation sehr viel Diskussionsraum für Interpretation, Anwendung und Validierung benötigt. Wichtig dabei ist, dass wie vorher in der Vereinfachung zum Modell hin, nun eine Komplexifizierung der Ergebnisse stattfinden muss. Die vorherige Vereinfachung der gleichförmigen Bewegung etwa war Grund dafür, zur Trochoide und ihrer Umsetzung über die Kreisrollung zu gelangen. Die Rückinterpretation ist nun verantwortlich dafür, welche Details als realistisch angesehen werden können, etwa die Situation des Fahrgastes an den Kurvenspitzen, und welche Resultate in der realen Situation einfach nicht sinnvoll sind, wie die etwaige Umsetzung der Bewegung im Karussell mittels Planetengetriebe. Um einen erfolgreichen, sinnstiftenden Modellierungskreislauf durchzumachen ist die rückschlüssige Validierung unumgänglich.

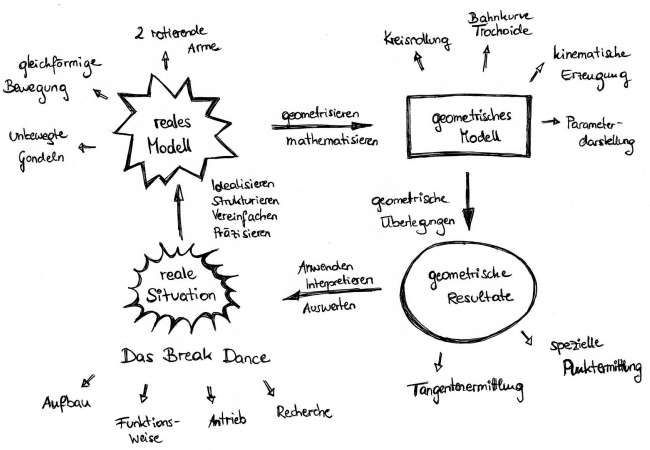


Abb. 11: Modellbildung für eine Bahnkurve des Break Dance im Wiener Prater

4.6.2 Modelle

Entgegen der Modellbildung, die als Prozess verstanden wird, ist das kinematische Modell traditionell als haptisch faßbares Objekt zu verstehen, das spezielle Bewegungsabläufe verdeutlicht. Durch den Einsatz von DGS, siehe Kapitel 2.4.4 ist es zunehmend leichter, Bewegungen auch virtuell zu veranschaulichen, was ebenfalls als kinematisches Modell verstanden werden kann.

Historisch betrachtet ist das kinematische Modell verwurzelt in der Erfindungskultur, aus der viele Inhalte der Kinematik erwachsen sind. Erfinderische Ideen wurden zuerst in Modellen umgesetzt, um sie direkt studieren zu können. Diese Methodik unterstützte die weniger systematisierte als vielmehr experimentelle Herangehensweise an das Studium unterschiedlicher Mechanismen. James Watt schrieb in einem Brief an Boulton 1784, indem er enthusiastisch von seiner Idee erzählt, die später als die Watt'sche Geradführung bekannt werden würde. Darin schreibt er, „Ich habe erst ein kleines Modell versuchsweise ausgeführt, nach welchem noch nicht gebaut werden kann“ (Auszug aus Reuleaux, 1875, S. 7). Diese Ausführung in Modellen ist insofern verständlich, als dass in jener Zeit es weniger um die theoretischen Hintergründe eines Mechanismus als vielmehr um seine Praktikabilität und seine Funktionalität ging, welche anhand von Modellen direkt sichtbar gemacht wurde.

Heute können diese materialisierten Objekte reinen Vorführcharakter besitzen, wie etwa Modelle der bereits in Kapitel 2.4.5 erwähnten kinematischen Modellsammlung der Technischen Universität Wien. Modellcharakter lässt sich allerdings auch bei angewandten Objekten finden, wie das Gelenkparallelogramm in Lampenarmen, ein Beispiel einer solcher Ausführung ist in Abb. 48 dargestellt, oder auch die Nürnberger Schere als Spiegelaufhängung, wie in Abb. 47 ersichtlich. Eine besondere Erwähnung in Verbindung mit Modellen verdient der Künstler Theo Jansen. Dieser veröffentlicht die Funktionsweise derart detailliert, dass der Nachbau seiner Strandbeests sehr einfach vonstatten geht. Seine Vision, ein Wesen zu erschaffen, das sich reproduzieren kann, lässt ihn den Nachbau als eine Art Reproduktion sehen. So gibt es mittlerweile unzählige Strandbeestmodelle, 3D Prints, Selbstbausätze, siehe Abb. 12, oder auch ganze Anleitungen zum vollständigen Selbstbau aus diversen Materialien wie Karton oder Papier[40]. Der vollständige Selbstbau ist aufwendig, weshalb in dieser Abhandlung auf die Aufbereitung verzichtet wird. Dennoch soll erwähnt werden, dass hier durchaus Potential zum fächerübergreifenden Unterricht von DG und Technischem Werken besteht.

[40] Wie etwa im Video von *The Q* mit dem Titel „DIY Walking Robotic Creature Strandbeest“ unter dem Link https://www.youtube.com/watch?v=azixGAjPC1Q. *The Q* ist ein Youtube-Channel in dem es eine Vielzahl an kreativen Eigenbau Videos gibt, insbesondere von mechanischen Objekten.

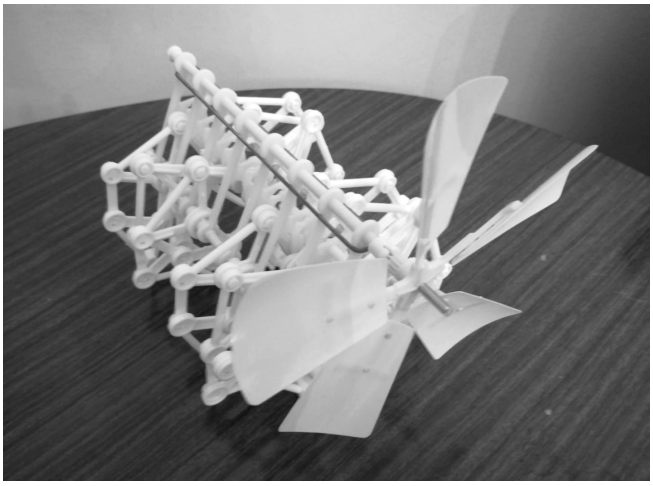


Abb. 12: Jr. Scientist Mini Strandbeest Selbstbausatz

Didaktisch gesehen sind Modelle eine gute Möglichkeit, die Kopfgeometrie[41] zu unterstützen, die Vorstellungskraft zu schulen und Bewegungen erfahrbar zu machen. Es gibt zahlreiche einfache Modelle, die durchaus von Schülerinnen und Schülern selbst gebaut werden können. Außerdem lassen sich viele Gegenstände des Alltags finden, die solchen Modellcharakter aufweisen. Das Auge für solche Gegenstände zu schulen formt schlussendlich den mathematisch und geometrischen Blick auf die Welt.

[41] Als rein gedankliche Ausführung geometrischer Operationen aufgefasst.

5 Konkrete Modulaufbereitung für den Unterricht

Viele didaktische Aspekte sind nun eingehend betrachtet und mit kinematischen Inhalten theoretisch veknüpft und analysiert worden. Die neu gewonnenen Erkenntnisse und Ideen werden nun auch mit praktischem Anspruch umgesetzt und aufbereitet. Die folgenden Unterkapitel sind konkrete Module A bis O, aufbereitet für die weitere Verwendung im Unterricht. Jedes Modul versteht sich in direkter Art und Weise als eine Umsetzung der in Kapitel 4 vorgenommenen didaktischen Analyse kinematischer Inhalte. Die Vernetzung der einzelnen Module mit der didaktischen Analyse sei zum einen in Abb. 8 sichtbar, zum anderen finden sich zu gegebener Stelle Querverweise.

Um die praktische Anwendung im Unterricht so flexibel und anwenderfreundlich wie möglich zu gestalten, verstehen sich die Module als modifizierbare Vorschläge. Ihr jeweiliger Umfang ist unterschiedlich groß, aufgrund der flexiblen Anwendung wurde auch vollends auf eine Abschätzung der notwendigen Durchführungszeit verzichtet. Die Module verstehen sich als Aufgabensammlungen inklusive ihrer Lösungen, die keine Aussage über alle weiteren Überlegungen, die im Zuge einer Unterrichtsplanung angestellt werden müssen, treffen. Alle Module sind somit von der Anwenderin oder dem Anwender auf selbstständige Art und Weise zu behandeln. Sie sind oft individuell kombinierbar, manche Module sind unabhängig bearbeitbar, andere benötigen Vorwissen, das über weitere Module erlangt werden kann. Es gibt welche, die zum selbstständigen Arbeiten anregen, andere brauchen gute und kompetente Führung.

5.1 Modul A - der lange Weg zur Wissenschaft

Die heutige, moderne, hochtechnologisierte Welt basiert auf dem Drang der Menschheit zu *verstehen*, zu *begreifen* und zu *erklären*. Die Nutzbarmachung von Maschinen, Mechanismen, Apparaten und Werkzeugen hat eine sehr lange Tradition. Mit der Industriellen Revolution, Ende 18. und im 19. Jh., zog auch der Drang ein, das Maschinenwesen zu theoretisieren. Die Situation bislang war gestützt auf einen sehr praktischen Zugang des Maschinenbauers. Sah man sich vor ein Problem gestellt, so erfand man eine für genau dieses Problem zugeschnittene Lösung. Die Maschinen wurden *erfunden*. Maschinenbauer und Ingenieure waren *Erfinder*.

Im Jahre 1875 erschien ein Buch des deutschen Ingenieurs Franz Reuleaux. Diesem war es wichtig, die Maschine auf einer theoretischen Ebene zu verstehen und dadurch dem Maschinenbauer ein starkes Werkzeug für die geordnete Konstruktion von Maschinen zu verleihen - *die Kinematik*. Im folgenden finden Sie Auszüge aus diesem 144 Jahre alten Buch. Lesen Sie den Text und bearbeiten Sie folgende Punkte:

1. Markieren Sie im Text all jene Stellen, die sich mit dem damaligen Erfindertum beschäftigen. Beschreiben Sie in Stichworten, welche Position der Autor bezüglich des Erfindens einnimmt.

2. Diskutieren Sie die Beschreibung Ampère's von der Definition einer Maschine im bisherigen Sinne und einer Maschine im neu gefassten Sinne. Beschreiben Sie in eigenen Worten, den Unterschied dieser Auffassungen von Maschinen.

3. Beschreiben Sie die in diesem Auszug beschriebene Kinematik als Wissenschaft. Was soll sie leisten? Was kann ein Kinematiker laut Reuleaux?

Bemerkung 5.1.I. Weil es sich um einen Originaltext handelt, ist die vorliegende Schrift in Grammatik und Rechtschreibung ebenfalls im Original, der Text wurde der heutig gültigen Rechtschreibung nicht angepasst.

Bemerkung 5.1.II. Wie Eingangs in Kapitel 4 beschrieben, soll neben geometrisch mathematischen Kompetenzen ebenso der Ausbau sprachlicher Kompetenz unterstützt werden. Dazu gehört auch, historische Texte mit zeitgetreuen Formulierungen selbstständig in die heutige, moderne Sprachanwendungen zu transferieren.

Aus *Theoretische Kinematik - Grundzüge einer Theorie des Maschinenwesens* von Franz Reuleaux, 1875:

> „In dem gegenwärtigen Werke lege ich dem Publikum eine Frucht langjähriger und umfangreicher Forschung vor. [...] Zwar besitzen und lehren wir die Theorien der einzelnen Maschinen, zwar zeigen wir die Anwendungen der wissenschaftlichen Mechanik auf die Maschine, [...] allein die Grundgesetze, welche allen Maschinen hinsichtlich ihrer Bildung gemeinsam sind, hatte man bisher nicht festgestellt. [...] Wenn ich zu zeigen versuche, dass und wie auf wissenschaftlichem Wege neue Mechanismen und neue Maschinen gebildet werden können, so denke ich nicht daran, dadurch den Werth der Erfindung auf dem Maschinengebiete herabzusetzen. Ich suche nur dem erfinderischen Kopfe neue und wirksame Mittel zu liefern, ich möchte seine geistige Thätigkeit beschleunigen, aber ich setze diese nicht herab. [...] Ich glaube in dem Vorigen bewiesen zu haben, dass in jedem Erfinden eine mehr oder weniger deutliche logische Gedankenfolge enthalten ist. [...]
>
> In früherer Zeit betrachtete man jede Maschine als ein Ganzes, bestehend aus ihm eigenthümlichen Theilen;[...] Sobald aber die erste polytechnische Schule gegründet wird – es ist die Pariser, 1794 – sehen wir die schon angebahnte Sonderung der Bewegungsmechanismenlehre von der allgemeinen Maschinenlehre sich systematisch vollziehen. [...] 1830 trat für die Mechanismenlehre eine bedeutsame Wendung insofern ein, als ihre philosophischen Grundlagen einer kritischen Untersuchung unterworfen wurden; dies geschah durch den grossen Physiker Ampère[42] [...] und sagt u. A.: „Sie (diese Wissenschaft) muss daher eine Maschine nicht, wie man gewöhnlich thut, definiren: als ein Instrument, mit Hilfe dessen man Richtung und Intensität einer gegebenen Kraft verändern kann, sondern als ein Instrument, mit Hilfe dessen man Richtung und Geschwindigkeit einer gegebenen Bewegung verändern kann.“ Er will aus den Untersuchungen, welche die Wissenschaft anstellt, die Kräfte vollständig verbannt wissen, und sagt ferner: „Dieser Wissenschaft, in welcher die Bewegungen an sich betrachtet werden, so wie wir sie an den uns umgebenden Körpern, und insbesondere an den Apparaten beobachten, welche Maschinen genannt werden, habe ich den Namen Kinematik (Cinématique) von $\kappa\iota\nu\eta\mu\alpha$ Bewegung gegeben.“ [...]
>
> In Italien trieb die Ampère'sche Aussaat ebenfalls erfreuliche Blüten. Giulio[43] [...]

[42] André-Marie Ampère französischer Mathematiker und Physiker, 1775-1836; Anm. der Autorin.
[43] Carlo Ignazio Giulio, 1803-1859, italienischer Mathematiker und Professor der Mechanik; Anm. der Autorin.

> knüpft in geistreicher Weise die Kinematik an die Mechanik an [...] So lange sie [die theoretische Kinematik, Anm. der Autorin] nicht auch ohne Erfindungsgeschichte zu den Elementen und Mechanismen der Maschinen zu gelangen vermag, darf sie den Karakter einer Wissenschaft nicht für sich in Anspruch nehmen; [...] Wenn sie aber durch genaues Erschliessen der zu beschreitenden Wege die Mittel erbracht hat, Bewegungen bestimmter Art hervorzubringen, so wird sie anfangen, eine Wissenschaft zu sein. [...] Sind die Denkprozesse, welche zur Bildung der bekannten Mechanismen geleitet, richtig erschlossen, so müssen diese Prozesse noch weiter in ähnlichem Sinne verwendbar sein: sie müssen auch die Mittel enthalten, mittelst deren man zu neuen Mechanismen gelangen kann, müssen also an die Stelle des Erfindens im bisherigen Sinne treten können. [...] Das Erfinden eines Mechanismus wird mit anderen Worten für den wissenschaftlich gerüsteten Kinematiker eine synthetische Aufgabe sein, die er nach geordneten, wenn auch schwierigen Methoden lösen kann."

Bemerkung 5.1.III. Modul A bezieht sich auf Kapitel 4.1, konkret ist dies eine Umsetzung des historisch genetischen Zugangs zur Begriffsbildung des Begriffes *Kinematik*. Die historische Einbettung, der Bezug zu Franz Reuleaux und zur Industriellen Revolution soll den Schülerinnen und Schülern eine Vorstellung geben, welche Überlegungen und Mechanismen hinter der Entwicklung dieser Wissenschaft stecken.

5.2 Modul B - die Kunst der Kinematik, die Kinematik in der Kunst

Der niederländische Künstler Theo Jansen wird zur Verdeutlichung von typischen kinematischen Fragestellungen herangezogen. Theo Jansen erschafft kinetische Kunst; Objekte, deren integraler künstlerischer Bestandteil die Bewegung darstellt.

Bemerkung 5.2.I. Hinter Theo Jansens Kunst steht eine ganze Ideenwelt, eine Philosophie der Kreation. Seine Vision ist die Erschaffung eines Wesens, das autonom überleben, sich sogar reproduzieren kann. Hier gäbe es genügend Diskussionspotential über Schöpfung und Kreation, Evolution, Biologie, Natur und Umwelt. Hier wird aber nur auf diesen möglichen Exkurs verwiesen.

Auf Theo Jansens Homepage unter diesem Link[44] finden Sie Informationen über den Künstler und seine Werke. Zudem gibt es eine Vielzahl an Erklärungsvideos seiner Kunst. Sehen Sie sich das Video der Startseite an, um einen Eindruck zu bekommen, an welchen Kreaturen der Künstler arbeitet. Das herausstechendste Merkmal der Strandbeests ist ihre Fortbewegung. Sein Werk inkludiert ein ausgetüfteltes System an mathematischen, physikalischen, biologischen und auch philosophischen Ideen und Denkstrukturen, die zur Bearbeitung anregen. So ist er ein hervorragendes Beispiel für einen modernen Künstler-Ingenieur.

Bemerkung 5.2.II. Wiederum in Hinblick auf die Unterstützung der Ausbildung sprachlicher Kompetenzen muss hier dennoch festgehalten werden, dass die Homepage in englischer Sprache verfasst ist. Deshalb ist die direkte Verwendung aus didaktischer Sicht genau zu überlegen. Bei größeren Schwierigkeiten gäbe es das Potential zum fächerübergreifenden Unterricht mit dem Unterrichtsfach Englisch. So können die in Bemerkung 5.2.I erwähnten Diskussionsthemen durchaus für den Englischunterricht von Interesse sein.

Bemerkung 5.2.III. Im Zuge der Verbindung der Kinematik mit Kunst werden hier die notwendigen getriebetechnischen Vokabel bearbeitet. Damit bezieht sich das Modul auf Kapitel 4.1. Dieser Zugang dient vor allem der Motivation, deshalb wird hier aus didaktischen Gründen auf penible Korrektheit der Begriffsdefinitionen verzichtet.

Angenommen, Sie wollen ein Strandbeest selbst kreieren.
Dann müssen Sie sich klar werden, dass:

I eine Maschine aus einzelnen Mechanismen besteht, jeder *Mechanismus* besteht aus Einzelteilen, diese heißen *Glieder* und *Gelenke*. Glieder haben unterschiedliche Abmessungen und

[44] https://www.strandbeest.com/

sind über Gelenke miteinander verbunden. Es gibt viele unterschiedliche Arten von Gelenken, wie etwa die *Schub- und Drehgelenke*. Üblicherweise werden die Glieder nummeriert und mit einem Σ_i (*Sigma*) mit $i = 0, 1, 2, \ldots$, bezeichnet.

Theo Jansen verwendet hauptsächlich gelbe Plastikrohre als Glieder, siehe dazu Abb. 13 und meistens Drehgelenke um diese miteinander gelenkig zu Verbinden. Die „Muskeln“ seiner Beests setzt er mit Schubgelenken um.

II die Glieder *starre Objekte* sein müssen. Sie dürfen nicht verformbar sein. Die Form selbst hat allerdings unterschiedlichste Erscheinungen. Weil das Objekt starr ist, sind die verschiedenen Positionen des Objekts während einer Bewegung kongruent, also deckungsgleich.

Abb. 13: Fossilium Ossa Geneticus - III, Bones,
Quelle: Theo Jansen Homepage

III es räumliche und ebene Bewegungen gibt. Wenn ein Objekt eine Bewegung ausführt, dann kommt es darauf an, wie die einzelnen Bahnen aller seiner Punkte aussehen. Liegen diese Bahnen in zueinander parallelen Ebenen, spricht man von ebenen, ansonsten von räumlichen Bewegungen.

Beim Strandbeest sind nicht nur die einzelnen Schrittbewegungen ebene Bewegungen, auch die gesamte Fortbewegung der Beests gilt als ebene Bewegung, da alle Punkte der sich bewegenden Bauteile ihre Bahnkurven in zueinander parallelen Ebenen haben.

IV der Mechanismus so gebaut werden muss, dass seine Bewegung eindeutig ist. Wenn sich ein Glied verstellt, müssen sich ganz automatisch alle anderen mit diesem Glied verbundenen Teile ebenfalls passend mitbewegen, sie werden also dazu gezwungen. Das ganze nennt man einen *Zwanglauf*. So lassen sich die Positionen der Glieder während einer Bewegung bestimmen.

Der Schrittmechanismus eines Beines des Strandbeests ist ein Zwanglauf.

V Bewegungen immer relativ sind. Das bedeutet, für einen Zwanglauf muss verglichen mit seiner Bewegung irgendein Glied *in Ruhe* sein, man nennt dieses Glied *Gestell*. Dieses erkennt man meist durch seine übliche Bezeichnung Σ_0.

Alle Beine des Strandbeests sind über ein Gestell, seinen „Rücken“, miteinander verbunden. Obwohl sich das Strandbeest als Ganzes fortbewegt, ist dieser Rücken verglichen mit den Beinen während der Bewegung in Ruhe.

VI eine Maschine auch angetrieben werden muss. Sobald ein Mechanismus eine Antriebskraft irgendeiner Art aufnimmt und weitergibt, spricht man von einem *Getriebe*. Ein Getriebe ändert Bewegungsgrößen, ist also ein Umwandler.

die Mechanismen des Strandbeest werden zum Getriebe, sobald sie sich durch den Wind in Bewegung setzen. Das Getriebe wandelt schlussendlich Kurbelbewegungen in Schrittbewegungen um.

Überlegungen der Kombination von $I - VI$ sind sogenannte *kinematische Überlegungen*. Damit bewegen Sie sich direkt im Feld der *Kinematik*. Diese beschäftigt sich mit der reinen Bewegung von Objekten, Mechanismen, Getrieben, Maschinen und Körpern. Dabei geht es um Abmessungen, Positionen, Zeitabhängigkeit, Geschwindigkeiten, Beschleunigung, Bahnkurven - kurz: die geometrische Komponente der Bewegung und Bewegungsübertragung.

Wenn Sie sich zusätzlich Gedanken darüber machen, wie der Antrieb vonstatten gehen soll, ob die Bauweise stark genug für die Größe ist, welches Material sie nehmen sollen, wie die Abnutzung der einzelnen Gelenke ist oder welche *Kräfte* ganz allgemein wirken, dann befinden Sie sich mitten in der *Mechanik*.

5.2.1 Mögliche Aufgabenstellungen

a) Die Lebendigkeit erhält das Strandbeest durch seine Art der Fortbewegung. Sehen Sie sich dazu das Video „The Legsystem“ auf Theo Jansens Homepage unter der Rubrik „Explains“ unter diesem Link[45] an. In diesem erkennt man die Funktionsweise des Beines.

   i) Skizzieren Sie das Bein und benennen Sie die Glieder mit Σ_i. Aus wie vielen Gliedern besteht es?

   ii) Welche Glieder sind mit welchen Gelenken mit dem Gestell verbunden?

b) Die Bahnkurve des Fußes beschreibt einen Schritt des Strandbeests. Theo Jansen spricht in diesem Zusammenhang von einer „straight line“.

   i) Beschreiben Sie in eigenen Worten, was diese „straight line“ bei einem Schritt bewirkt. Stöbern Sie weiters selbst auf der Homepage https://www.youtube.com und finden Sie

[45] https://www.strandbeest.com/explains

die Strandbeestmechanismen in unterschiedlichen Kontexten verwendet. Die Symbiose aus Fahrrad und dem Strandbeestmechanismus sticht ins Auge. Beschreiben Sie, warum die „straight line“ hier umso wichtiger ist.

ii) Unter dem Link[46], auch über den QR-Code in Abb. 14 finden Sie ein Beinpaar mit veränderlichen Gliedergrößen[47]. Geben Sie selbst einen, nach Theo Jansen bezeichneten „genetic code“ an, bei dem das Bein keinen einzigen Schritt machen könnte.

Abb. 14: GeoGebra Buch „Theo Jansens Strandbeest Leg“

5.2.2 Weitere mögliche Aufgabenstellungen

c) Ebene Bewegungen lassen Form und Größe eines Objekts gleich. Mathematisch gesprochen, welche Abbildungen beschreiben Bewegungen?

d) Finden Sie zu den Begriffen *Bewegung und ebene Bewegung eines starren Körpers*, *Zwanglauf*, *Gelenke* und *Getriebe* mindestens ein weiteres Beispiel.

e) Diskutieren Sie, ob etwa die Öffnung des Kofferraums eines Autos eine ebene Bewegung darstellt.

f) Finden Sie zwei Beispiele für einen nicht starren Körper.

5.2.3 Lösungen der Aufgaben

a) i) $i = 7$ Mit dem Gestell ergibt dies 8 Glieder, siehe Abb. 15

ii) Σ_1 ist mit Drehgelenk A und Σ_4 sowie Σ_6 mit Drehgelenk E mit dem Gestell verbunden.

b) i) Weil die Bahnkurve des Fußes in dem Abschnitt, in dem er Bodenkontakt hat, eine annähernde Gerade durchläuft, und das für alle Füße gilt, bleibt der „Rücken“ des Strandbeests bei seinem Gang annähernd in derselben Höhe. Konträr dazu bringt der mensch-

[46] https://www.geogebra.org/m/dc6hpqkj
[47] Siehe auch Dokumentation im Anhang.

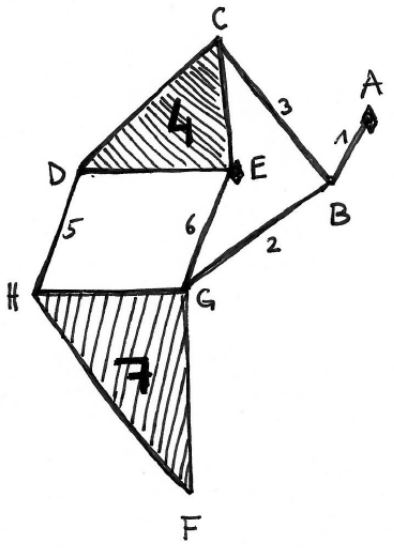


Abb. 15: Bein des Strandbeests

liche Schritt den Körper in eine auf und ab Bewegung. Unter dem Link[48] finden Sie ein 4 minütiges Video mit dem Titel „Epic Cycling|Truly Unique Bicycle that Walks“ von *The Q*, das eindrucksvoll demonstriert, wie ein gehendes Fahrrad gebaut werden kann. Die angenäherte Geradführung des Fußes ist hier umso wichtiger, da konstante Sitzhöhe am Fahrrad Fahrkomfort garantiert.

ii) Es gibt eine Vielzahl an diesen unmöglichen Schritten. Abb. 16 zeigt, dass sich die Glieder des Beines bei einem Schritt selbst im Weg wären. Eine weiteres Beispiel eines unmöglichen Schrittes ist, wenn die Schrittkurve nicht geschlossen werden kann. Somit ist eine zyklische Bewegung unmöglich.

c) Kongruenzabbildungen, es gibt gegensinnige und gleichsinnige Kongruenzabbildungen. Streng mathematisch gesehen sind beides Bewegungen, jedoch nur die gleichsinnigen Kongruenzabbildungen beschreiben reale Bewegungen, sie erhalten den Umlaufsinn des bewegten Objekts.

d) *Bewegung eines starren Körpers*: der Wurf eines Steines, die Verwendung eines Korkenziehers, Teigrührmaschine, Schaufelbagger;
ebene Bewegung eines starren Körpers: die Felge bewegt sich eben wenn das Rad rollt, die

[48] Video „Epic Cycling|Truly Unique Bicylce that Walks“ von *The Q* unter https://www.youtube.com/watch?v=fXXJ1LOqHEk

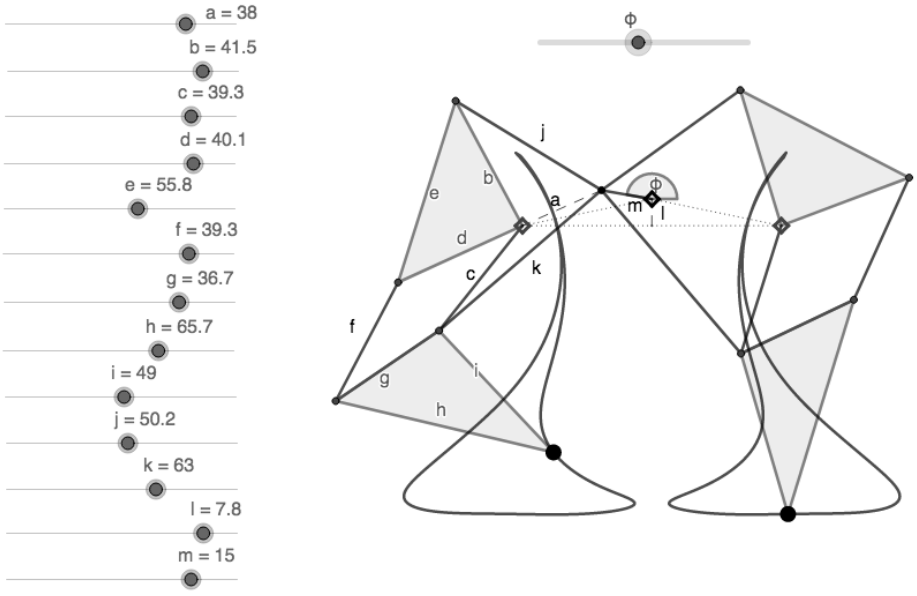


Abb. 16: Unmöglicher Schritt

Schiebung des Geodreiecks am Papier, Eisstockschießen, Zeiger der Uhr, Flaschendrehen, Schaufel und Schaufelarm des Baggers, das Spielplatzkarussell, Pedale treten am Fahrrad;
Zwanglauf: die Öffnung der Türe, Scharniere im Allgemeinen, Schaufel und Schaufelarm des Baggers;
Gelenke: Drehgelenk wie etwa bei Scharnieren, Schraubverschluss, Schubgelenke wie etwa bei Luftpumpen;
Getriebe: Zahnradgetriebe der Uhr, Schaltung am Fahrrad;

e) Da alle Punkte des Kofferraumdeckels sich bei Öffnung des Kofferraumes in zueinander parallelen Ebenen bewegen, kann diese Bewegung als ebene Bewegung aufgefasst werden.

f) Nicht starre Körper: mit Luft gefüllten Luftballon, Gummireifen, Kaugummi

5.3 Modul C - Gibt es eine Drehung?

Lassen sich die folgenden, kongruenten Figuren in Abb. 17 bis 20 durch eine Drehung oder Schiebung zur Deckung bringen? Diskutieren Sie die einzelnen Situationen und konstruieren Sie gegebenenfalls die Bewegung.

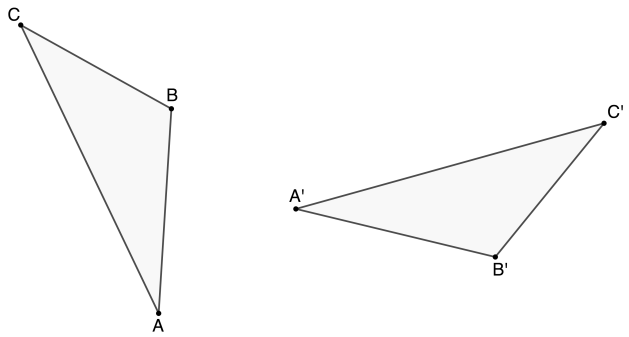


Abb. 17: Beispiel C1

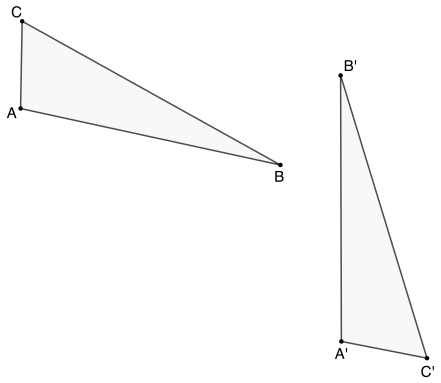


Abb. 18: Beispiel C2

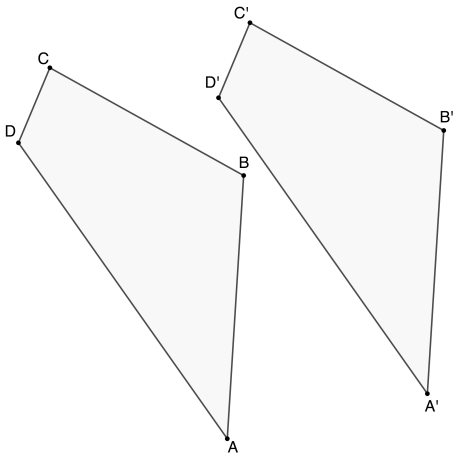


Abb. 19: Beispiel C3

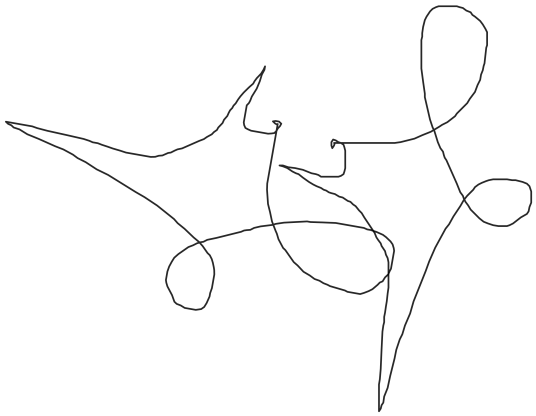


Abb. 20: Beispiel C4

5.3.1 Weitere mögliche Aufgabenstellungen

a) Diskutieren Sie, welche Eigenschaft die beiden Figuren haben müssen, damit eine solche ebene Bewegung existiert.

b) Wenn diese Voraussetzung gegeben ist, überlegen Sie, ob dann so eine Bewegung existieren *muss*.

c) Wie hängen Translation und Rotation zusammen? Vergleichen Sie dabei Abb. 17 und Abb. 19.

5.3.2 Lösungen der Aufgaben

Lösungen zu C1 bis C4 siehe Abb. 21 bis 24.

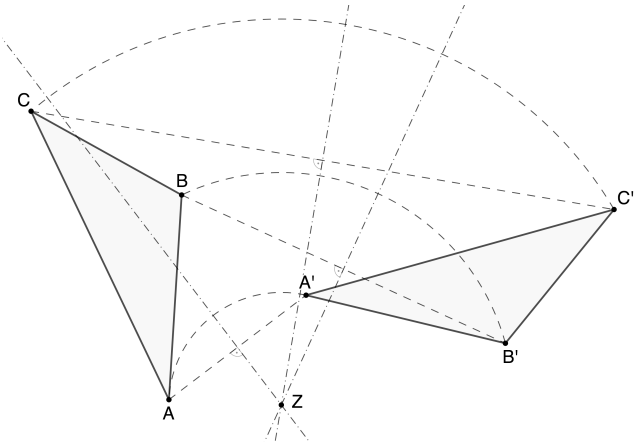


Abb. 21: Beispiel C1 Lösung
Rotation mit Zentrum Z

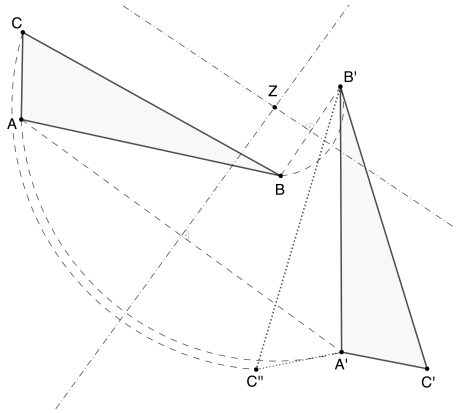


Abb. 22: Beispiel C2 Lösung
keine Schiebung oder Drehung möglich

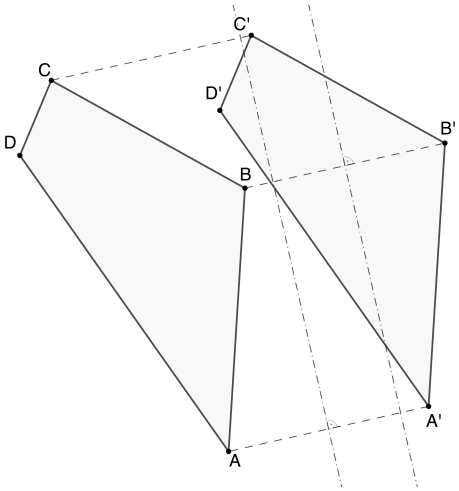


Abb. 23: Beispiel C3 Lösung
Schiebung

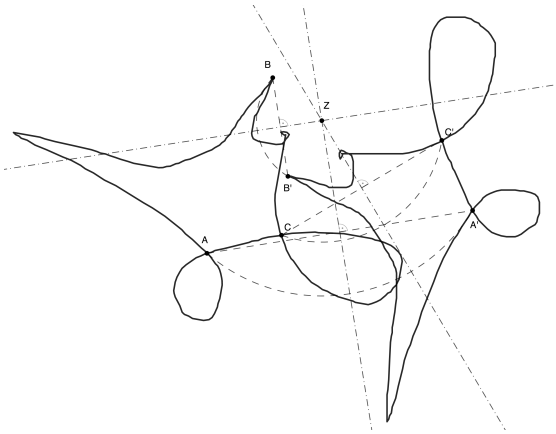


Abb. 24: Beispiel C4 Lösung
Drehung um Zentrum Z

a) Die Figuren müssen gleichsinnig kongruent sein.

b) Ja, es *muss* eine solche ebene Bewegung geben.

c) Eine Schiebung kann aufgefasst werden als eine Drehung mit unendlich weit entferntem Drehzentrum Z.

Bemerkung 5.3.I. Die Frage, ob es so eine Bewegung geben *muss*, kann direkter Einstieg in kinematische Grundlagen sein, da ihre Beantwortung direkt eine Überleitung zum *Fundamentalsatz der ebenen Kinematik* ist, ausführlich aufbereitet in Modul E in Kapitel 5.5.

Bemerkung 5.3.II. Durch seine Fragestellung gilt dieses Modul als kinematisches Problemlösen, siehe auch Kapitel 4.4, zum anderen wird die Grundvorstellung von Bewegung als Abbildung gefestigt. Wie in Kapitel 4.1 beschrieben, kann hier gut verdeutlicht werden, dass der Begriff *Bewegung* als Abbildungsbegriff nicht exakt dasselbe beschreibt, wie der alltäglich verwendete Bewegungsbegriff.

Bemerkung 5.3.III. Der Zusammenhang zwischen Drehung und Schiebung durch eine Fernpunktstellung des Drehzentrums soll nur bedingt angeschnitten werden. Weil der Begriff *Fernpunkt* erst mit Bearbeitung der Zentralprojektion im Unterricht beleuchtet wird, wird hier gänzlich auf die Unterbreitung verzichtet. Stattdessen genügt die intuitive Beschreibung als *unendlich fern*.

5.4 Modul D - eine Behauptung, wer hat recht?

Zwei Freunde sitzen bei einer Limonade in einem Wirtshaus. Ihre Getränke stehen auf viereckigen Kartonuntersetzern, siehe Abb. 25. Einer der beiden behauptet: „Egal, wo diese Untersetzer am Tisch liegen, es gibt immer genau eine Drehung um den einen Untersetzer so zu drehen, dass er *exakt* so liegt wie der andere.“

Abb. 25: Bei der Limonade im Wirtshaus

Sein Freund dementiert. Sie wetten um 10 Euro. Nun muss der Eine seinen Freund von seiner Behauptung überzeugen: „Wenn ich eine Drehung suche, dann muss ich nur eine Seite meines Kärtchens betrachten. Finde ich eine Drehung, die diese eine Seite genau auf die Position der entsprechenden Seite deines Kärtchens bringt, habe ich gewonnen.“
Er demonstriert:

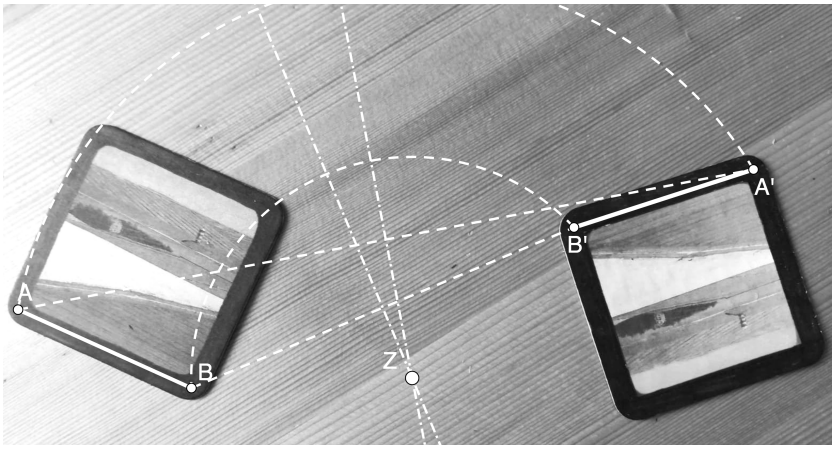


Abb. 26: Demonstration der Drehung

„Siehst du? Macht mein Kärtchen diese Drehung, kommt es exakt so zu liegen, wie dein Kärtchen liegt.“ Sein Freund lacht auf und feut sich: „Ha! ich bekomme 10 Euro von dir. Du hattest nicht recht!“

Diese Situation führt zum Streit. Sie sind mit beiden befreundet, die Zwei erklären Ihnen die Situation. Nun müssen Sie entscheiden. Wer bekommt die 10 Euro?

a) Diskutieren Sie, wer nun Recht hat. Wer darf die 10 Euro wirklich kassieren?

b) Einer der beiden macht einen Fehler. Finden Sie diesen Fehler und deuten Sie in geometrisch.

c) Überlegen Sie, was man ändern könnte, damit die Behauptung doch stimmt.

5.4.1 Lösungen der Aufgaben

a) Derjenige, der zu überzeugen war, hat Recht.

b) Die Form der Kärtchen liegt deckungsgleich. Bei genauer Betrachtung der Bilder in Abb. 26 erkennt man aber ihre Spiegelbildlichkeit. Geometrisch bedeutet dies, dass sie ungleichsinnig kongruent sind. Damit kann das eine Kärtchen nicht exakt so liegen wie das andere.

c) Offensichtlich haben die Kärtchen spiegelbildliche Seiten. Dreht man eines um, stimmt die Behauptung.

Bemerkung 5.4.I. Dieses Beispiel verdeutlicht, dass bei einer real durchgeführten ebenen Bewegung, wie sie die Kinematik und ihre Anwendungen versteht, der Umlaufsinn des bewegten Objekts unausweichlich zu berücksichtigen ist. Die innere Orientierung eines Objekts kann unter dieser Bewegung nicht verändert werden. Somit bezieht sich dieses Beispiel wiederum auf den feinen Unterschied der in Kapitel 4.1 thematisierten Bewegung als Abbildung und Bewegung als Verlagerung.

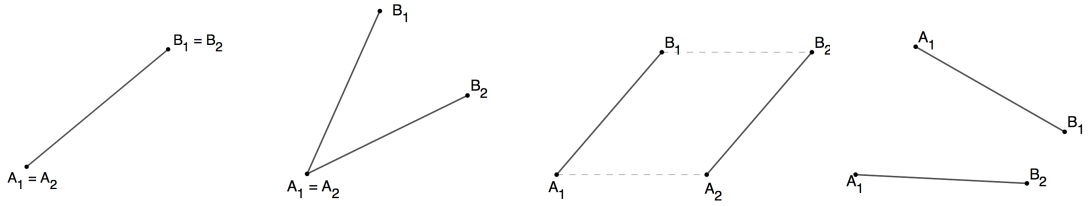
Bemerkung 5.4.II. Die Argumentationsfindung in dieser Konversation muss von der Lehrperson geführt werden. Ziel des Beispiels ist die qualitative Auseinandersetzung mit einer einfach durchführbaren Bewegung und die Bewusstmachung, dass durch Orientierungen eine scheinbare Lösung wohl doch keine sein kann. Weil die Herleitung der ebenen Bewegung über gleichsinnige Kongruenzabbildungen geschieht soll die Vorstellung über Orientierungen aufgefrischt werden, so auch in Modul C in Kapitel 5.3.

5.5 Modul E - Der Fundamentalsatz der ebenen Kinematik

Bemerkung 5.5.I. Dieses Modul bezieht sich auf Kapitel 4.2, in dem die didaktischen Überlegungen der folgenden Durchführungen detailliert nachzulesen sind.

Der Fundamentalsatz der ebenen Kinematik lautet:
Zu je zwei gleichsinnig kongruenten Figuren der Ebene lässt sich eine Drehung oder eine Schiebung finden, die diese beiden ineinander überführt.
Man betrachtet zwei gleich lange Strecken $[A_1B_1]$ und $[A_2B_2]$. Zu zeigen ist: bei beliebiger Lage dieser Strecken gibt es ein Drehzentrum, das die Strecke $[A_1B_1]$ mit der Strecke $[A_2B_2]$ zur Deckung bringt. Wie können nun $[A_1B_1]$ und $[A_2B_2]$ zueinander liegen?

- $A_1 = A_2, B_1 = B_2$,
  in diesem Fall ist nichts zu zeigen, die Strecken decken sich bereits, siehe Abb. 27a.
- $A_1 = A_2, B_1 \neq B_2$
  $\Delta B_1A_1B_2$ bilden ein gleichschenkeliges Dreieck womit die Drehung, die B_1 in B_2 überführt mit $A_1 = A_2$ als Drehzentrum schon gefunden ist, siehe Abb. 27b.
- $[A_1B_1] \parallel [A_2B_2]$
  Die zueinander parallelen Strecken können durch Schiebung entlang des Vektors $\overrightarrow{A_1A_2}$ zur Deckung gebracht werden. Die Schiebung kann aufgefasst werden als Drehung mit unendlich weit entferntem Drehzentrum, siehe Abb. 27c.
- $[A_1B_1]$ und $[A_2B_2]$ haben allgemeine Lage
  zu zeigen ist: für allgemeine Lage der Strecken $[A_1B_1]$ und $[A_2, B_2]$ findet sich ein Drehzentrum, das $[A_1B_1]$ in $[A_2B_2]$ überführt, siehe Abb. 27d.



(a) (b) (c) (d)

Abb. 27: Mögliche Lagen zweier gleich langer Strecken

5.5.1 Der Beweis *DdD* - Deckung durch Drehung

Wenn es nun möglich ist, die beiden Strecken mithilfe einer Drehung zur Deckung zu bringen, dann muss es einen Punkt P_{12} geben, um den A_1 nach A_2 gedreht werden kann. Dies bedeutet,

dass A_1 und A_2 denselben Abstand von P_{12} haben müssen, was bedeutet, dass P_{12} auf der Mittelsenkrechten der Strecke $[A_1A_2]$ liegen muss. Dasselbe gilt auch für B_1 und B_2. Daraus folgt, dass die Dreiecke $\Delta A_1B_1P_{12}$ und $\Delta A_2B_2P_{12}$ gleiche Seitenlängen haben.
Es liegt also nahe, dass der Schnittpunkt P_{12} der Streckensymmetralen das Drehzentrum der gesuchten Drehung ist, vgl. dazu Abb. 28. Damit $[A_1B_1]$ wirklich um P_{12} nach $[A_2B_2]$ gedreht werden kann, müssen die Dreiecke $\Delta A_1B_1P_{12}$ und $\Delta A_2B_2P_{12}$ gleichsinnig kongruent sein, dann erst decken sie sich. Dies ist aber über den reinen Längenvergleich der einzelnen Strecken nicht erkennbar.

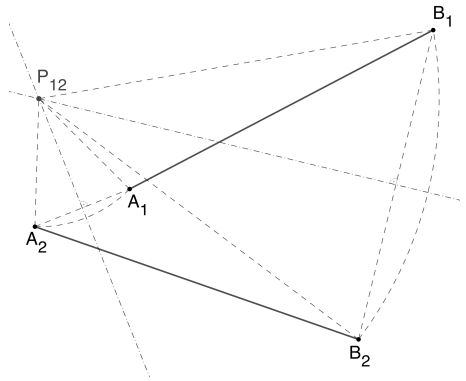


Abb. 28: Konstruktion des Drehzentrums

Angenommen die beiden Dreiecke haben gleich lange Seiten, sind aber entgegengesetzt orientiert. Dann bilden $A_1A_2B_2B_1$ ein Trapez, was zur Folge hat, dass die Streckensymmetralen von $[A_1A_2]$ und $[B_1B_2]$ zusammenfallen. Die Konsequenz daraus ist, dass das Drehzentrum P_{12} nicht eindeutig durch Schnitt der Streckensymmetralen bestimmbar ist, es gibt unendlich viele Schnittpunkte.

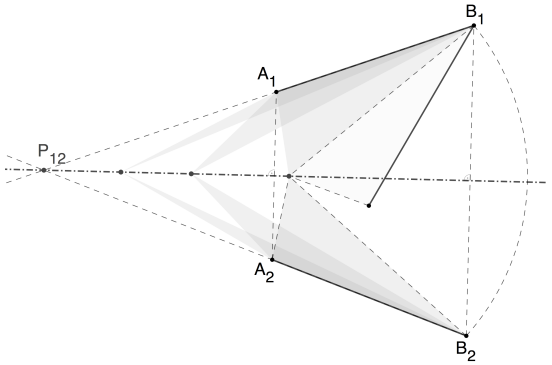


Abb. 29: Uneindeutiger Pol bei Ungleichsinnigkeit

Die einzig mögliche Konsequenz, wie die Strecke $[A_1B_1]$ nach $[A_2B_2]$ gedreht werden kann, ist durch Schnitt der Verlängerungen der beiden Strecken. Wie in Abb. 29 ersichtlich, liegen damit die Eckpunkte der Dreiecke jeweils auf einer Geraden, womit sich de Frage der Gleichsinnigkeit erübrigt. Damit ist gezeigt, dass durch eindeutige Bestimmbarkeit des Drehzentrums P_{12} als Schnitt der Mittelsenkrechten oder, bei zusammenfallenden Mittelsenkrechten, als Schnitt der Geraden (A_1B_1) und (A_2B_2) die gleichsinnige Kongruenz garantiert ist.
Somit gilt der Fundamentalsatz der ebenen Kinematik:
Zwei gleichsinnig kongruente Figuren der Ebene können durch eine Drehung oder eine Schiebung ineinander überführt werden.

Bemerkung 5.5.II. Es ist klar ersichtlich, dass mit der indirekten Annahme und die Schlussfolgerung aus dem Widerspruch die in Kapitel 4.2 erwähnte, drohende Beweislücke schließt, jedoch ist der dazu notwendige Gedankengang kompliziert. Dies muss in der Durchführung berücksichtigt werden. Die Schülerinnen und Schüler sollen in dieser Hinsicht unterstützend durch den Beweis geleitet werden.

5.5.2 Der Beweis *DdS* - Deckung durch Spiegelung

Um zwei gleichlange Strecken $[A_1B_1]$ und $[A_2B_2]$ in allgemeiner Lage zur Deckung zu bringen, bringt man zuerst den Punkt A_1 in die Lage A_2. Durch Spiegelung an der Streckensysmmetrale $s_{[A_1A_2]}$ geht A_1 in $A^* = A_2$ über. B_1 an $s_{[A_1A_2]}$ gespiegelt ist B^*.

- Wenn $B^* = B_2$, dann sind $[A_1B_1]$ und $[A_2B_2]$ bereits deckungsgleich, jedoch wird der Umlaufsinn der gesamten Ebene verändert. Deshalb muss noch einmal gespiegelt werden, diesmal an der Gerade (A_2B_2).
- Wenn $B^* \neq B_2$ bringt die Spiegelung an der Streckensymmetrale von $[B^*B_2]$ den Punkt B^* nach B_2, siehe Abb. 30.

In beiden Fällen bleibt A_2 fix.
Insgesamt ergeben zwei hintereinander ausgeführte Spiegelungen eine Drehung. Das Drehzentrum ist der Schnittpunkt der Spiegelachsen. Sind die Spiegelachsen parallel zueinander, dann liegt eine Schiebung vor, die als Drehung mit unendlich weit entferntem Drehzentrum angesehen werden kann.

Somit gilt der Fundamentalsatz der ebenen Kinematik:
Zwei gleichsinnig kongruente Figuren der Ebene können durch eine Drehung oder eine Spiegelung ineinander überführt werden.

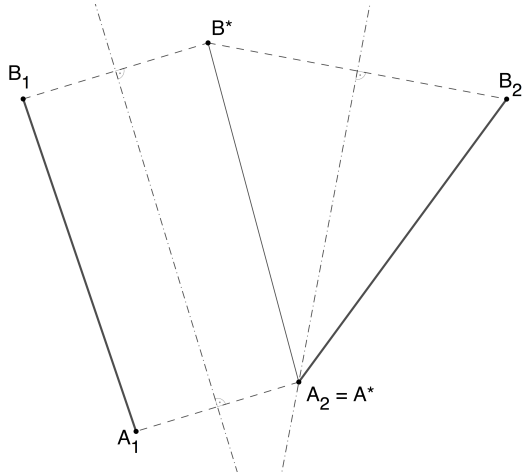


Abb. 30: Doppelte Spiegelung

Bemerkung 5.5.III. Die Kürze des Beweises *DdS* zeigt nur einmal mehr, den in Kapitel 4.2 ausführlich besprochenen hohen Anschauungscharakter, den dieser birgt, er setzt jedoch fundiertes Vorwissen im Bereich der Kongruenzabbildungen und deren Verkettung voraus.

5.5.3 Weitere mögliche Aufgabenstellungen

a) Finden Sie die Spiegelungen und die Drehung selbst mittels GeoGebra Buch „Zum Beweis des Fundamentalsatzes der ebenen Kinematik“[49] unter dem Link[50], auch unter dem QR-Code in Abb. 31.

b) Wiederholen Sie die Eigenschaften der Geradenspiegelung, Rotation und Translation. Welche Eigenschaften haben sie gemein, welche unterscheiden sie.

c) Diskutieren Sie, warum eine Drehung mit unendlich weit entferntem Drehzentrum als Schiebung betrachtet werden kann.

d) Was denken Sie, wie verhält sich dieselbe Thematik im Raum? Können zwei gleichsinnig kongruente Körper im Raum stets ineinander überführt werden? Wenn ja, mit welcher Bewegung?

[49] Siehe auch Dokumentation im Anhang.
[50] https://www.geogebra.org/m/hyq2whzc

Abb. 31: GeoGebra Buch „Zum Beweis des Fundamentalsatzes der ebenen Kinematik“

5.5.4 Lösungen der Aufgaben

a) Lösung ist direkt im GeoGebra Buch nachzulesen.

b) Achsenspiegelung, Rotation und Translation sind Bewegungen. Sie sind längen- flächen und winkeltreu. Sie sind bijektive Abbildungen. Während bei der Geradenspiegelung die Umlaufrichtung eines gespiegelten Objekt geändert wird, bleibt sie bei der Rotation und Translation erhalten. Detaillierte Aufbereitung dieser Sachverhalte finden sich in Kapitel 2.4.2.

c) Bei einer Drehung eines Punktes A nach A' bewegt sich A entlang eines Kreisbogens mit Radius r Richtung A'. Je weiter entfernt das Drehzentrum von A ist, desto größer wird der Radius des Kreisbogens, auf welchem sich A Richtung A' bewegt und desto geradliniger wird der Kreisbogen selbst. Ist das Drehzentrum unendlich weit entfernt, weist der Kreisbogen keine Krümmung mehr auf und der Punkt A vollführt eine Translation.

d) Ja, zwei gleichsinnig kongruente Körper im Raum können stets ineinander überführt werden mithilfe von Schraubungen, also die Überlagerung einer Drehung um eine Gerade mit der Schiebung entlang dieser.

Bemerkung 5.5.IV. Der *Fundamentalsatz* ist grundsätzlich Voraussetzung für Konstruktion, Herleitung und Verständnis des Momentanpols im Modul F in 5.6. Der Beweis *DdS* unterstützt den Zugang zum Momentanpol wodurch dieser als Unterstützung für die Bearbeitung des Momentanpols gesehen werden kann.

5.6 Modul F - und alles dreht sich! - der Momentanpol

5.6.1 Wie man ihn konstruiert

Wenn sich ein Objekt eben bewegt, dann überstreichen alle Punkte des Objekt ebene Bahnkurven. So gilt: in jedem Moment treffen sich alle Normalen der Bahnpunkte in einem Punkt, dem sogenannten Momentanpol. Doch was bedeutet *in jedem Moment*? Angenommen man würde das sich bewegende Objekt filmen. Zu jedem erdenklichen Zeitpunkt könnte man den Film pausieren. Egal an welcher Stelle des Films man pausiert, die Normalgeraden durch die Punkte am Objekt an die Bahnkurven der Punkte treffen sich im Pol.

5.6.2 Wie er entsteht - der intuitive Grenzübergang

Bei einer ebenen Bewegung eines Dreiecks ABC überstreichen die Eckpunkte A, B und C jeweils ebene Bahnkurven. Angenommen man betrachtet die Bewegung des Dreiecks in einem Film. Dann könnte man den Film pausieren, sodass ein Standbild der momentanen Position entsteht. Weiters betrachtet man nun voneinander verschiedene Positionen des Dreiecks, man lässt also den Film mehrere Male pausieren und vergleicht die entstehenden Bilder miteinander, dargestellt in Abb. 32. Wenn nun der Abstand der Pausen immer kleiner wird, dann rücken die Positionen des Dreiecks ebenfalls immer näher aneinander. Der Abstand von einer Position zur nächsten wird immer kleiner.

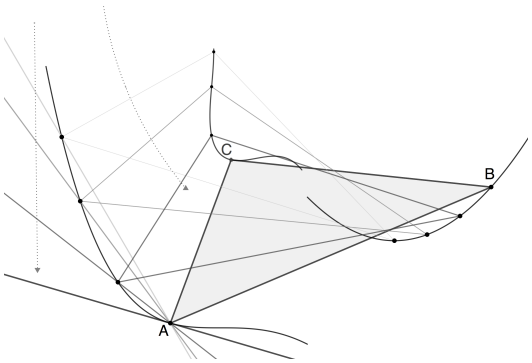


Abb. 32: Zeitrafferdarstellung der Bewegung

Wenn sie unendlich nahe beieinander sind, gehen die Eckpunkte aufeinanderfolgender Positionen ineinander über, sie sind nicht mehr voneinander zu unterscheiden.
Die Verbindungsgeraden aufeinanderfolgender Positionen von A sind Sekanten an seine Bahnkurve. Wenn diese Positionen nun nicht mehr voneinander unterscheidbar sind, wird die Sekante zur Tangente in A an die Bahnkurve. Die Mittelsenkrechte der einzelnen Positionen geht in die Bahnnormale in A über. Dasselbe gilt auch für alle anderen Punkte des Dreiecks.

Die Bahnnormale durch A und die Bahnnormale durch B schneiden sich in einem Punkt, dem *Momentanpol*. Die Bahnnormalen aller weiteren zum bewegten Dreieck gehörenden Punkte verlaufen ebenfalls durch diesen Punkt, also auch die Bahnnormale von C, wie in Abb. 33 ersichtlich. Kennt man nun also zu einer Lage einer Bewegung den Momentanpol, so lassen sich auf einfachste Weise die Bahntangenten aller zu dieser Lage gehörenden Punkte konstruieren, als Normale auf die Verbindungsgerade der Punkte mit dem ihrer Lage angehörenden Pol.

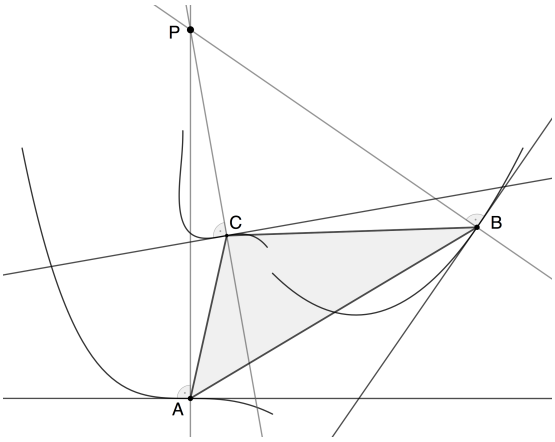


Abb. 33: Bahnnormalen durch den Pol

Etwas mathematischer ausgedrückt
Betrachte ein Dreieck ABC, das eine eine stetige, ebene, zwangläufige Bewegung vollzieht. Betrachte nun zwei Lagen des Dreiecks zu den Zeitpunkten t_1 und t_2. Diese beiden Lagen sind gemäß des Fundamentalsatzes durch Drehung um ein Drehzentrum P_{12} ineinander überführbar. So gehen $s_{A_{12}}$ und $s_{B_{12}}$ durch P_{12}.
In Abb. 34 ist folgendes dargestellt: sei $\Delta t = t_2 - t_1$; in der Grenzlage, das heißt $\Delta t \to 0$,

- wird die Verbindungsgerade (A_1A_2) zur Tangente t_{A_1} in A_1
- wird die Streckensymmetrale $s_{A_{12}}$ zur Bahnnormalen n_{A_1} in A_1
- geht das Drehzentrum P_{12} in den Momentanpol über:

$$P_1 = \lim_{\Delta t \to 0} P_{12}$$

In jedem Moment einer ebenen Bewegung existiert eine infinitesimale Drehung um den Momentanpol. Alle momentanen Bahnnormalen der Punkte des Objekts laufen durch diesen Pol.

Bemerkung 5.6.I. Dieses Modul ist vorbereitend für das Modul G in 5.7, welches die Ergebnisse praktisch anwendet.

Bemerkung 5.6.II. Aus Gründen die in Kapitel 4.1.3 nachzulesen sind, wird hier auf den konkreten Grenzübergang verzichtet. Für die weitere Bearbeitung genügt es, den Kern der Aussage verständlich zu machen.

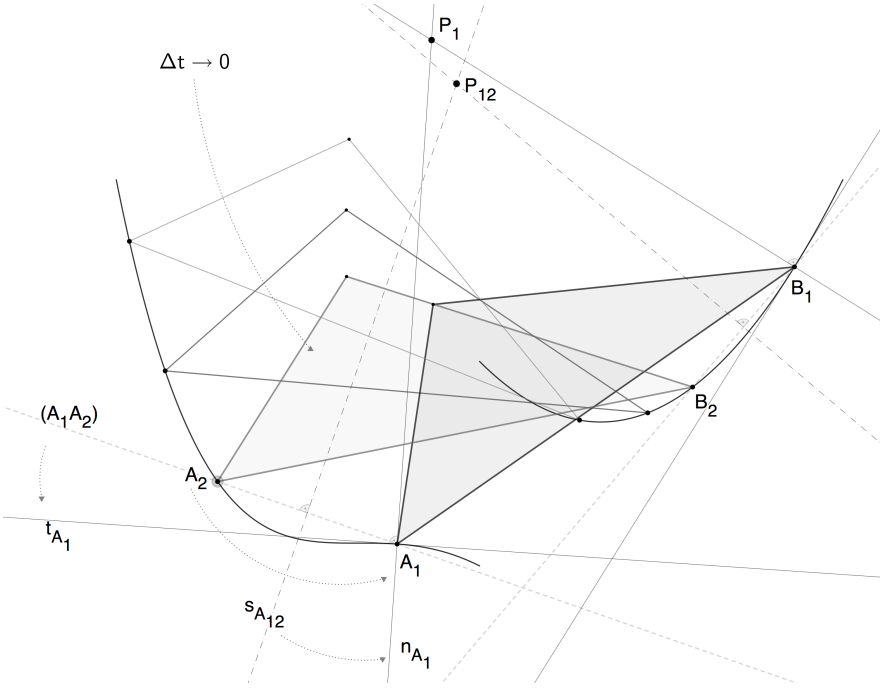


Abb. 34: Grenzübergang

5.7 Modul G - Anwendung des Momentanpols

Das Dreieck ABC bewegt sich. Die Bahnen aller 3 Eckpunkte sind gegeben. Im Falle der Bewegungsbahn von A handelt es sich um einen Kreis mit Mitte M_A, bei B um einen Kreisbogen mit Mitte M_B bzw. um eine Strecke. Die erste Lage $A_1B_1C_1$ des Dreiecks ABC ist gegeben.

5.7.1 Mögliche Aufgabenstellungen

Für die Angaben in Abb. 35 bis 38 konstruieren Sie

a) die Lage des Dreiecks

   1) wenn A sich um 115° mathematisch positiv von Lage 1 in Lage 2 dreht
   2) wenn A sich nochmals um 115° weiterdreht in Lage 3

b) die Momentanpole in allen drei Lagen

c) die Tangenten in den Eckpunkten in allen drei Lagen

5.7.2 Lösungen der Aufgaben

Detaillierte Lösungen der Aufgaben a) bis c) für die jeweiligen Angaben sind in Abb. 39 bis 42 ersichtlich.

b) Der Momentanpol P_i ist der Schnitt der Bahnnormalen von A_i und B_i.

c) Weil die Verbindungsgerade (C_iP_i) Bahnnormale im Punkt C_i an die Bahnkurve von C in den Lagen $i = 1, 2, 3$ ist, konstruiert man die Tangente als Normale auf diese Verbindungsgerade.

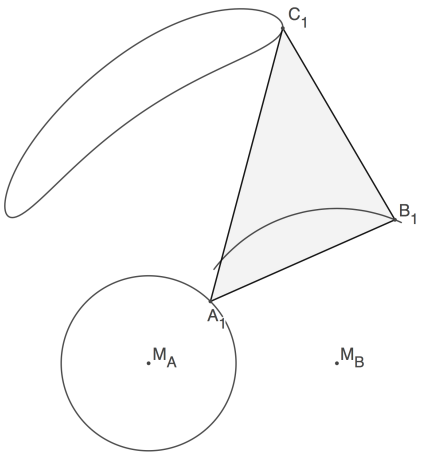


Abb. 35: Beispiel G1

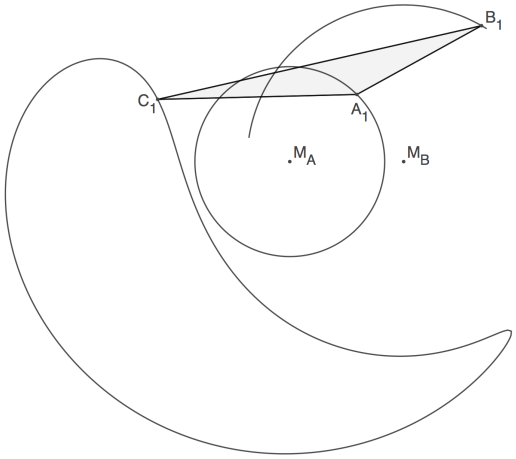


Abb. 36: Beispiel G2

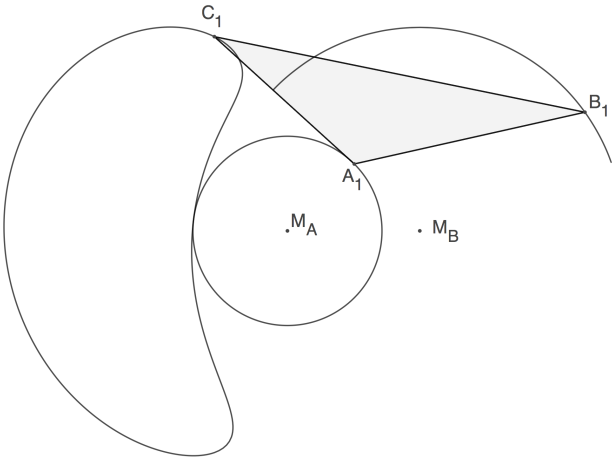


Abb. 37: Beispiel G3

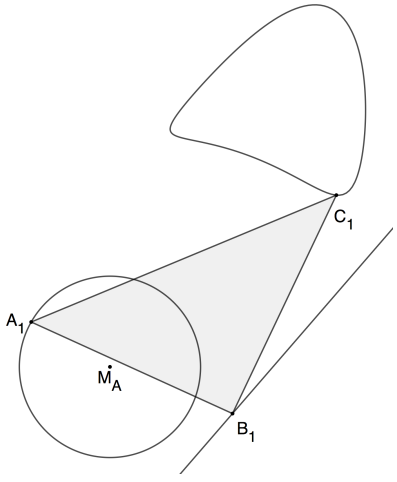


Abb. 38: Beispiel G4

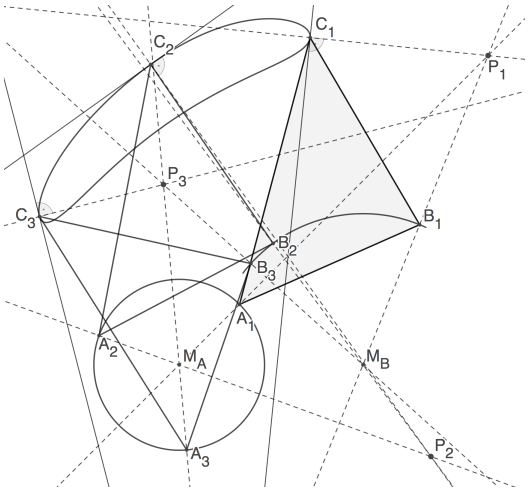


Abb. 39: Beispiel G1 Lösung

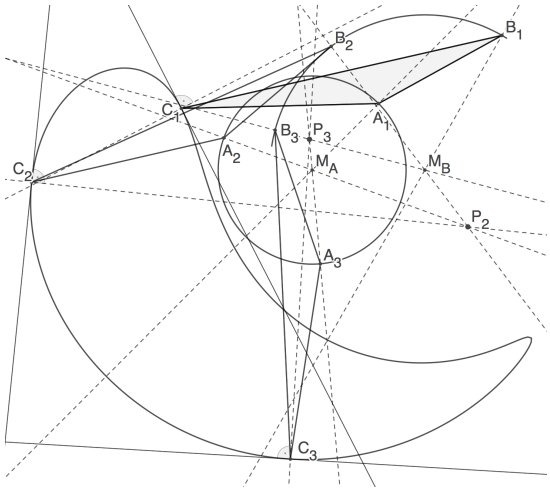


Abb. 40: Beispiel G2 Lösung

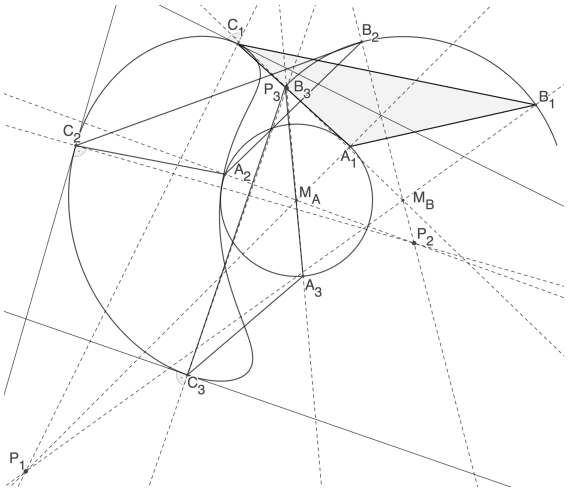


Abb. 41: Beispiel G3 Lösung

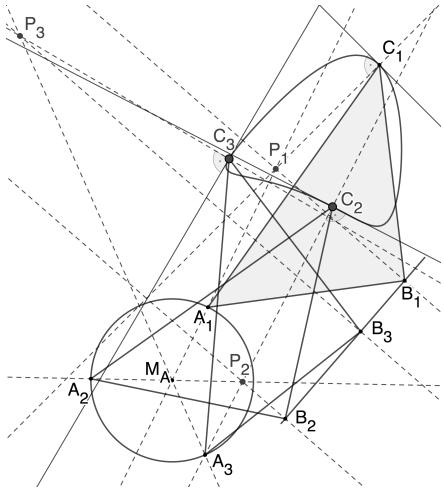


Abb. 42: Beispiel G4 Lösung

5.8 Modul H - tatsächliche Bewegungen in GeoGebra

Bewegungen in GeoGebra zu konstruieren ist spannend und hat viel Raum für optischen Anspruch. Zudem sind Bewegungen in GeoGebra sehr leicht zu animieren. Die notwendigen und hilfreichen Schritte dafür werden hier angeleitet.

Bemerkung 5.8.I. Dieses Modul bietet die Grundlage für die weitere Bearbeitung für Konstruktionen in DGS von kinematischen Inhalten wie in Kapitel 4.5.2 besprochen.

Ein sich zwangläufig bewegender Mechanismus ist abhängig von einer einzigen Größe. Diese Größe definiert die Stellung des ersten Gliedes des Mechanismus, man spricht vom Antrieb. Aufgrund der zwangläufigen Bewegung des Mechanismus sind damit im Allgemeinen die Positionen aller anderen Glieder automatisch mitbestimmt. Ändert sich diese Größe, ändert sich die Position des Antriebsgliedes und damit auch die Positionen aller anderen Glieder.

Bemerkung 5.8.II. Zu beachten sind die Verzweigungslagen, die ein zwangläufiger Mechanismus durch spezielle Abmessung aufweisen kann. Bei Gelenkvierecken liegen in diesen speziellen Lagen alle Glieder momentan auf einer Geraden, weshalb in diesem Moment der Zwanglauf unbestimmt ist. Ein Gelenkparallelogramm etwa kann sich in dieser Lage in ein Antiparallelogramm verzweigen.

Im folgenden wird diese Größe ein Winkel sein. Dieser Winkel bestimmt die Drehung eines Punktes um ein Drehzentrum. Dieser Winkel ϕ muss veränderbar bleiben, weshalb der erste Schritt zur Konstruktion einer zwangläufigen Bewegung in GeoGebra die Anlegung eines Schiebereglers für den Winkel ϕ ist, ersichtlich in Abb. 43. Am besten man lässt ihn im Intevall $[-360°, 360°]$ laufen.

Bemerkung 5.8.III. Natürlich genügt auch eine Umdrehung, $\phi \in [0°, 360°]$, um die Bewegung zu konstruieren. Zu angenehmeren, interaktiven Handhabung werden allerdings zwei Umdrehungen empfohlen. So kann die Bewegung per Hand durch Bedienung des Schiebereglers bequem über die Anfangsposition hinaus beobachtet werden.

5.8.1 Die Kurbel als Antrieb

Der Winkel ϕ bestimmt die Drehung eines Punktes A um ein Drehzentrum M_A. M_A ist Teil der Rastebene, damit hat es eine feste Position, es bewegt sich nicht. A hingegen ist in Bewegung. Die Strecke $[M_A A]$ ist die Kurbel, sie kann als Stange gedeutet werden, die über das Drehgelenk M_A mit der Rastebene verbunden ist. Grundsätzlich werden Bewegungen in GeoGebra am besten und einfachsten mit Kurbeln erzeugt.

Um diese Kurbel zu erzeugen, muss A zum einen an einen Kreis gebunden sein, zum anderen seine Position auf dem Kreis mithilfe des Winkels ϕ definiert werden. Der Radius des Kreises stellt die Kurbellänge dar. Der Hilfspunkt H sei der Schnittpunkt des Kreises mit der x-Achse. Diesen dreht man nun um ϕ mithilfe des Befehls *Winkel mit fester Größe*. Damit ergibt sich A. Weil ϕ ein Schieberegler ist, kann in seinen Einstellungen die Animation eingeschalten werden. A läuft auf dem Kreis mit Mittelpunkt M_A.

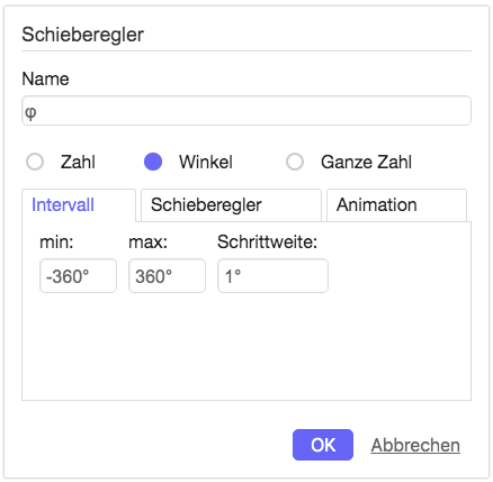


Abb. 43: Schieberegler in GeoGebra

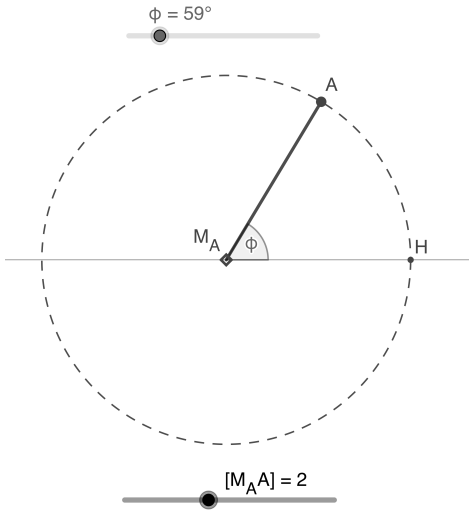


Abb. 44: A bewegt sich in Abhängigkeit von ϕ auf dem Kreis

Tipps zur Konstruktion und Visualisierung, siehe Abb. 44:

- Für optische Unterstreichung der Kurbel als Stange kann die Strecke $[M_A A]$ konstruiert und ihre Linienstärke vergrößert werden.
- Um die Konstruktion flexibel zu gestalten, ist es sinnvoll, die Kurbellänge ebenfalls als Schieberegler anzulegen. Damit ist die Kurbel im Nachhinein in ihrer Länge variierbar. Dies gilt für alle anderen Längen ebenso.
- Für optische Unterstreichung von M_A als unbewegt eignet sich das Rautensymbol als Punktdarstellung.

5.8.2 An der Kurbel hängt alles

Diese Kurbel bestimmt nun also die Bewegung aller anderen, dem Mechanismus angehörenden Teile. Die weiteren Schritte sind einfache, konstruktionstheoretische Überlegungen.

Schiebt die Kurbel einen Punkt B entlang einer Geraden, konstruiert man diesen als Schnittpunkt eines Kreises um A mit festgelegtem Radius und der Gerade, entlang welcher der Punkt B geschoben wird. Den so entstehenden Mechanismus, in Abb. 45 dargestellt, nennt man Schubkurbel.

Tipp: Wieder gilt, um die Konstruktion flexibel zu gestalten ist es sinnvoll, für die Länge von $[AB]$ einen Schieberegler anzuwenden.

Dreht die Kurbel einen Punkt B um einen Punkt M_B, so liegt B zum einen auf einem Kreis um M_B, zum anderen auf einem Kreis um A. Dabei bewegt sich M_B nicht, es befindet sich in Ruhe und ist, so wie M_A ebenfalls Teil der Rastebene. AM_AM_BB ist ein Gelenkviereck, siehe Abb. 46.

In beiden Fällen gibt es im Allgemeinen zwei Schnittpunkte, zwischen denen man sich entscheiden kann, je nachdem, welche Bewegung erwünscht ist. Die einzelnen Gliederabmessungen sind voneinander abhängig, sie begrenzen sich gegenseitig durch die Notwendigkeit der Existenz der gesuchten Schnittpunkte. Die so in GeoGebra konstruierten Bewegungen lassen sich dadurch auch mechanisch realisieren.

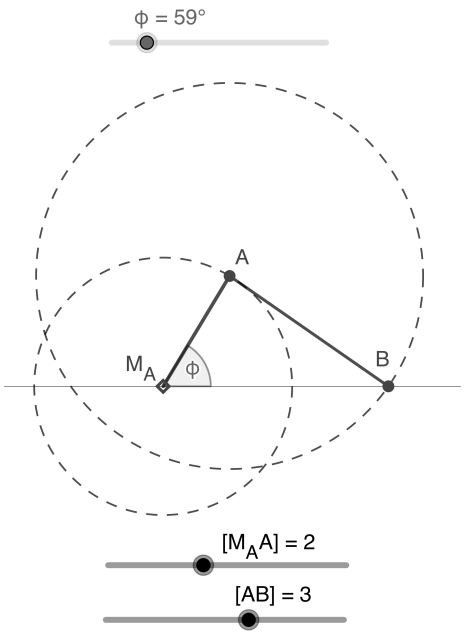


Abb. 45: Schubkurbel

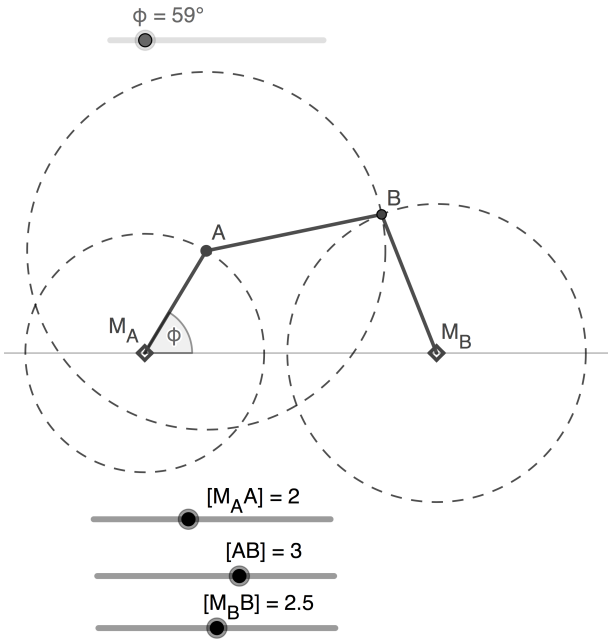


Abb. 46: Gelenkviereck

5.8.3 Mögliche Aufgabenstellungen

a) Diskutieren Sie, was ein bewegliches Parallelogramm sein könnte und beschreiben Sie es in Worten. Überlegen Sie, wo bewegliche Parallelogramme in Realität existieren. Wie lässt sich ein bewegliches Parallelogramm konkret bauen? Überlegen Sie, ob die Bewegung des Parallelogramms immer eindeutig ist.

b) Konstruieren Sie ein bewegliches Parallelogramm in GeoGebra, stellen Sie dabei sicher, dass die Seitenlängen des Parallelogramms mittels Schieberegler zwischen 0 und 10 variierbar sind.

c) Stellen Sie sich vor, drei Stäbe wären durch Drehgelenke miteinander geschlossen verbunden, es entsteht ein Gelenkdreieck. Warum kann sich dieses dennoch nicht bewegen? Durch entsprechende Anpassung der Gelenke kann man aber formveränderliche Dreiecke aus Stäben bauen. Konstruieren Sie ein solches in GeoGebra. Beziehen Sie sich dabei auf die oben erwähnte Schubkurbel in Abb. 45. Dabei soll allerdings der Punkt B still stehen und die Länge $\overline{AB}$ variieren. Gibt es solch bewegliche Dreiecke in Realität, können Sie ein Beispiel nennen?

5.8.4 Lösungen der Aufgaben

a) Wenn ein Innenwinkel eines Parallelogamms variabel ist, dann ist es beweglich. Ändert sich dieser eine Winkel, ändern sich alle anderen Innenwinkel mit. Die Seiten sind drehbar miteinander verbunden, die Paralleleigenschaften des Parallelogramms bleiben erhalten.
Die reale Umsetzung findet man in der Mechanik sehr häufig, ein typisches Beispiel ist der Doppelarm einer Schreibtischlampe, Abb. 48. 4 Stäbe, jeweils zwei gleicher Länge und zueinander parallel, sind über Drehgelenke miteinander verbunden. Weitere Beispiele finden sich in Form der sogenannten *Nürnberger Schere*, Abb. 47 und 49.
Aufgrund der besonderen Abmessungen des Parallelogramms existieren Verzweigungslagen, in dieser liegen alle Glieder auf einer Geraden, sodass der Zwanglauf momentan unbestimmt ist. Es kann sich verzweigen in ein Antiparallelogramm.

b) Lösung dargestellt in Abb. 50.

c) Ein Dreieck kann alleine durch die Variabilität eines Winkels nicht beweglich gemacht werden. Dagegen spricht der SSS-Satz. Sobald drei Seiten eines Dreiecks feste Längen haben, ist es starr. Wenn ein Winkel variabel ist, muss sich auch die Länge einer Seite mitverändern, um beweglich sein zu können. Abb. 51 zeigt die Konstruktion des veränderlichen Dreiecks mit variabler Seite $[AB]$. B repräsentiert dabei ein Schubgelenk. Aus diesem Grund muss der Trägerstab von $[AB]$ genügend lang sein. Eine reale Umsetzung ist beispielsweise der

Mechanismus, um die Schieflage der Lehne einer Liege oder die Schieflage einer Staffelei zu verändern.

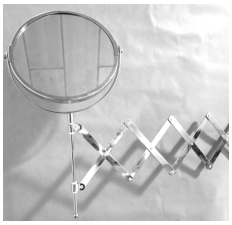


Abb. 47: Spiegel

Abb. 48: Schreibtischlampe

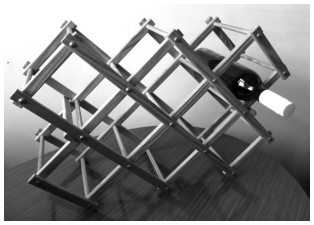


Abb. 49: Zusammenklappbares Weinregal

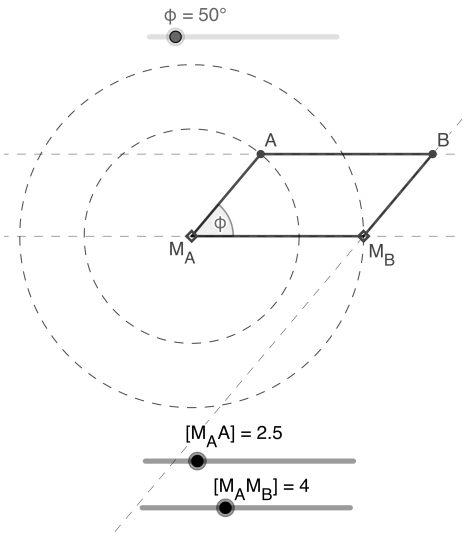


Abb. 50: Gelenkparallelogramm

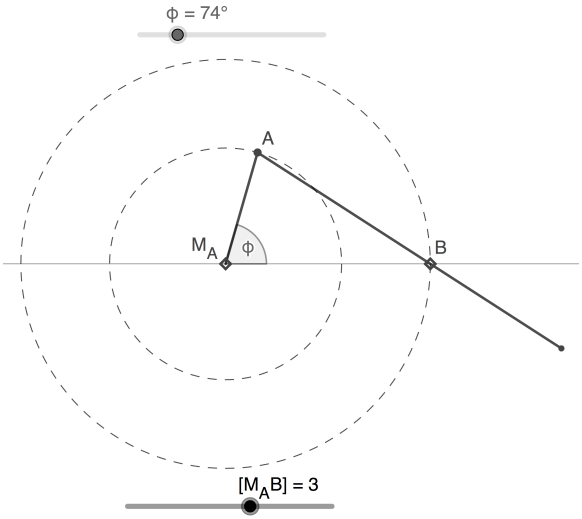


Abb. 51: Veränderliches Dreieck

5.9 Modul I - das viergliedrige Drehgelenkgetriebe und seine Namen

Ein Gelenkviereck AM_AM_BB besteht aus vier Seiten mit festen Seitenlängen. Diese Seiten sind drehbar miteinander verbunden, siehe Abb. 52.
Im folgenden ist der Innenwinkel $\angle AM_AM_B =: \phi$ variabel, weshalb sich das Gelenkviereck, abhängig von diesem Winkel, bewegen kann. Dadurch entsteht ein Zwanglauf.

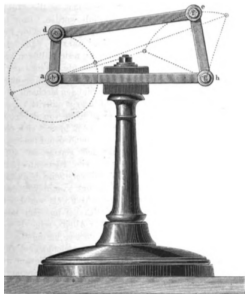


Abb. 52: Gelenkviereck
Quelle: (Reuleaux, 1875, S. 51)

Die Arme M_AA und M_BB werden als Kurbel oder Schwinge bezeichnet, je nachdem, ob A und B voll umlauffähig sind, oder zwischen zwei Grenzlagen hin und her schwingen. Welche Bewegung sie ausführen können, ist von den Abmessungen des Gelenkvierecks abhängig. Die Verbindung $[AB]$ ist die Koppel, $[M_AM_B]$ ist ruhend und wird Gestell genannt.

Weil die Gelenkvierecke als spezielle Drehgelenkgetriebe für viele Mechanismen, wie etwa dem Öffnen und Schließen von Türen und Klappen eingesetzt werden, ist es von Wichtigkeit, herausfinden zu können, welche Abmessungen welche Bewegungsmöglichkeiten hervorrufen. Über diese Bewegungsmöglichkeiten ist dann eine einfache Einteilung möglich.

Abb. 53: Scharniermechanismus viergliedriges Klappenscharnier
Quelle: (Kerle, Corves & Hüsing, 2011, S. 293)

Die folgende Tafel in Abb. 54 zeigt einen Programmablauf für die Bestimmung der Art des vorliegenden viergliedrigen Drehgelenkgetriebes. Durch die Kenntnis von Gestell und Koppel, sowie der Seitenlängen aller vier Glieder kann dies festgestellt werden. Folgend bezeichnet l_{max} die längste Seite, l_{min} die kürzeste Seite und l' und l'' die anderen.

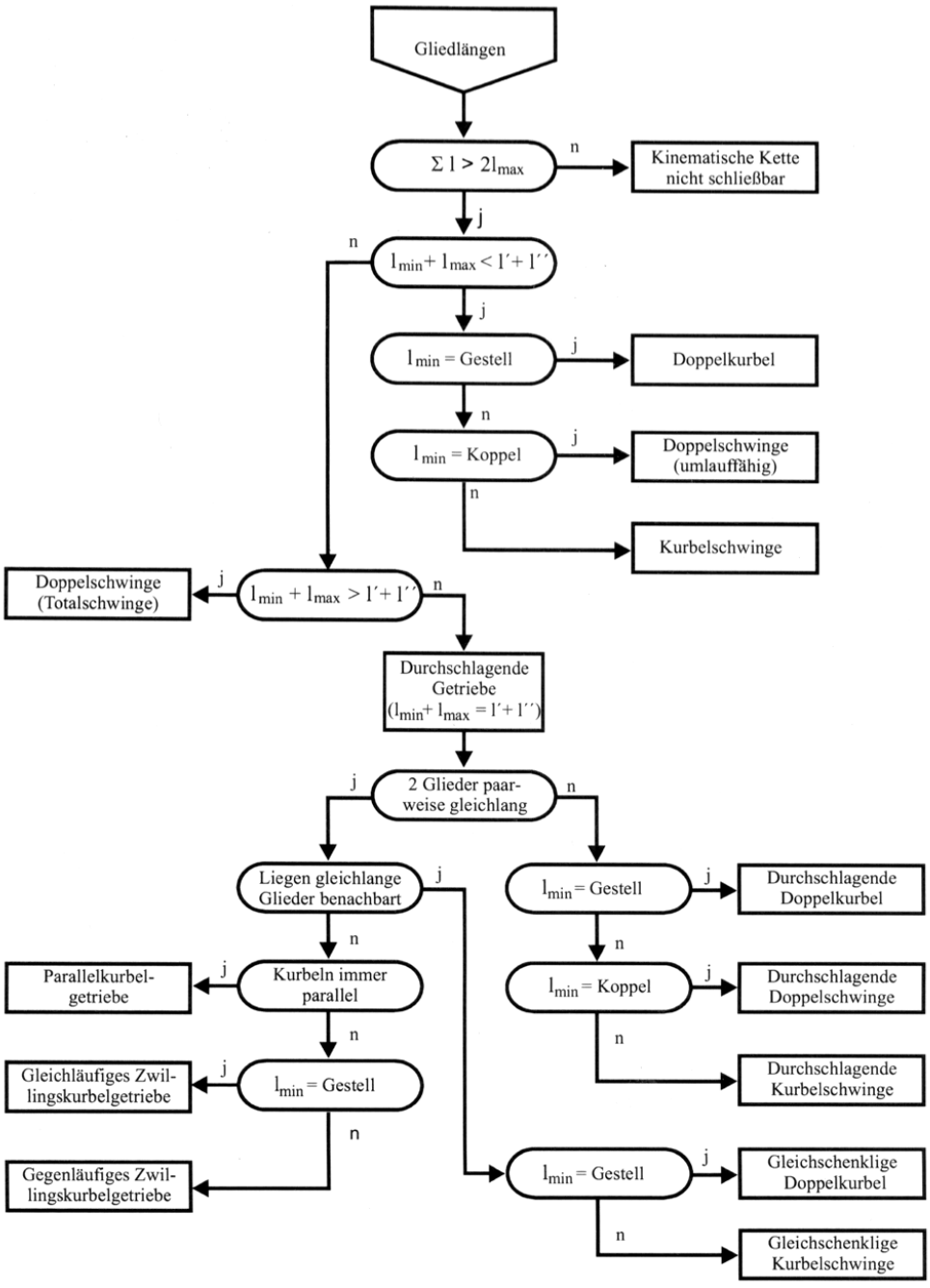


Abb. 54: Programmablauf zur Bestimmung der viergliedrigen Drehgelenkgetrieben j=ja ; n=nein Quelle: (Kerle, Corves & Hüsing, 2011, S. 40)

Bemerkung 5.9.I. Dieses Modul bezieht sich auf das Kapitel 4.3, indem ausführlich über die Möglichkeit der Klassifikation der beweglichen Vierecke und ihre Eigenschaften eingegangen wird.

5.9.1 Mögliche Aufgabenstellungen

Überprüfen Sie, um welches Drehgelenkgetriebe es sich bei den folgenden Viereckabmessungen l_1, l_2, l_3, l_4 handelt, wobei gilt: $[M_A M_B] = l_1$; $[M_B B] = l_2$; $[AB] = l_3$; $[M_A A] = l_4$. Verwenden sie dafür die Tafel in Abb. 54.
Anschließend konstruieren Sie diese in GeoGebra: im Falle von auftretenden Antriebsschwingen überlegen Sie, wie das Intervall indem sich der Antriebswinkel bewegen darf, bestimmt werden kann. Anschließend berechnen Sie es. Berücksichtigen Sie diese Grenzen im Schieberegler und animieren Sie die Bewegung des Gelenkvierecks.

a) $l_1 = 5$; $l_2 = 2.5$; $l_3 = 3$; $l_4 = 2$

b) $l_1 = 5$; $l_2 = 5$; $l_3 = 2$; $l_4 = 2$

c) $l_1 = 2$; $l_2 = 5$; $l_3 = 6$; $l_4 = 3$

d) $l_1 = 4.5$; $l_2 = 2$; $l_3 = 1$; $l_4 = 1$

5.9.2 Lösungen der Aufgaben

a) $l_1 = l_{max} = 5$; $l_2 = l_{min} = 2.5$; $l_3 = l' = 3$; $l_4 = l'' = 2$
Es liegt eine Doppelschwinge vor. Wenn A, B und M_B auf einer Geraden liegen, ist ϕ maximal bzw. minimal. Mit Anwendung des Cosinussatzes gilt:

$$\begin{aligned} cos\phi &= -\frac{([AB] + [BM_B])^2 - [AM_A]^2 - [M_A M_B]^2}{2[AM_A][M_A M_B]} \\ cos\phi &= -\frac{(3 + 2,5)^2 - 2^2 - 5^2}{2 \cdot 2 \cdot 5} \\ cos\phi &= -\frac{1,25}{20} \quad \Rightarrow \quad \phi = 93,58^\circ \end{aligned} \tag{14}$$

Aufgrund der Symmetrie gilt $\phi \in [-93.58^\circ, 93.58^\circ]$.

b) $l_1 = l_2 = l_{max} = l' = 5$; $l_3 = l_4 = l_{min} = l'' = 2$
Hier handelt es sich um eine gleichschenkelige Kurbelschwinge.

c) $l_1 = l_{min} = 2$; $l_2 = l' = 5$; $l_3 = l_{max} = 6$; $l_4 = l'' = 3$
In diesem Fall dreht es sich um eine Doppelkurbel.

d) $l_1 = l_{max} = 4.5$; $l_2 = l' = 2$; $l_3 = l_4 = l_{min} = l'' = 1$

Dieses vermeintliche Gelenkviereck ist keines. Die Abmessungen erlauben es nicht, es zu schließen.

Die Lösungen sind im GeoGebra Buch „Viergliedrige Drehgelenkgetriebe und seine Namen“[51] unter folgendem Link[52] oder auch unter dem QR-Code in Abb. 55 abrufbar.

Abb. 55: GeoGebra Buch „Viergliedrige Drehgelenkgetriebe und seine Namen“

[51] Siehe auch Dokumentation im Anhang
[52] https://www.geogebra.org/m/hjnjnewz

5.10 Modul J - passendes Koppelgetriebe finden

In vielen Gebieten der Ingenieurswissenschaften und bei vielen praktischen Umsetzungen wird ein Getriebe gefordert, das eine bestimmte ebene Bewegung erzeugt. Der Maschinenbauer sieht sich mit einer konkreten Fragestellung konfrontiert: wie ist diese Bewegung mechanisch umsetzbar? Die große Bandbreite an verschiedenen, erzeugbaren Kurven und Bewegungen und vor allem die technische Einfachheit der sogenannten Koppelgetriebe machen sie zu einer der wichtigsten Getriebeart der technischen Welt.

Ein Koppelgetriebe besteht aus vier Gliedern. Sie sind alle durch Gelenke miteinander verbunden. Das ruhende Glied ist das Gestell, es gibt ein Antriebsglied und ein Abtriebsglied, diese sind mit der Koppel verbunden. In Abb. 56 ist so ein viergliedriges Koppelgetriebe, der sogenannte Watt'sche Geradlenker, dargestellt. Der Sockel ist das Gestell. Über zwei rotierende Arme ist die in diesem Fall dreieckige Koppel mit dem Gestell beweglich miteinander verbunden.

Bemerkung 5.10.I. Für eine ausführliche Bearbeitung des Watt'schen Geradlenkers wird hier auf Modul K in Kaptel 5.11 verwiesen.

Bemerkung 5.10.II. Dieses Modul beschäftigt sich mit der exakten Lagensynthese, ist demnach direkte Umsetzung des in Kapitel 4.4 ausführlich besprochenen Potentials kinematischer Inhalte im Lösen von Probemstellungen. Die Lösung des Problems erfolgt mittels händischer Konstruktionen, der Vorteil der bewegungsorientierten Konstruktion in DGS wird ebenfalls ausgenutzt, nachzulesen in Kapitel 4.5.

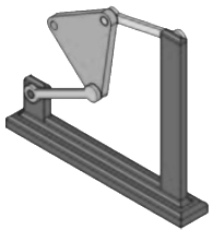


Abb. 56: Watt'sche Geradlenkerführung;
Quelle: DMG-lib[53]

[53]Zugriff unter https://www.dmg-lib.org/dmglib/main/portal.jsp?mainNaviState=browsen.mecdesc.viewer&id=3386025

5.10.1 Mögliche Aufgabenstellungen

In den Abb. 57 bis 59 sind 3 Positionen einer Figur in der Ebene gegeben. Gesucht ist nun jenes Koppelgetriebe, das die Figur von Position 1 über Position 2 in Position 3 bringt. Dabei ist die Strecke $[AB]$ gleichzeitig die Koppel. Zeichnen Sie das gefundene Koppelgetriebe in Position 1 ein.

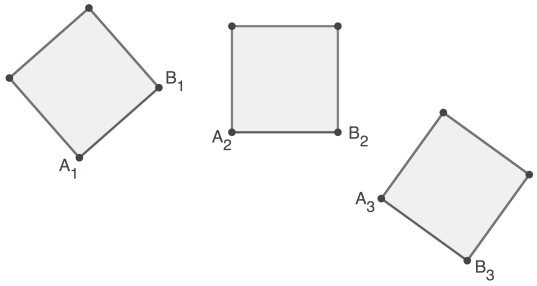


Abb. 57: Beispiel J1

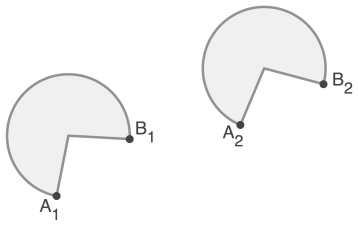


Abb. 58: Beispiel J2

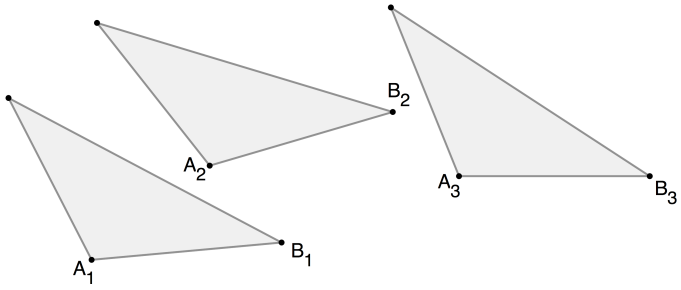


Abb. 59: Beispiel J3

5.10.2 Weitere mögliche Aufgabenstellungen

Unter folgendem Link[54] beziehungsweise über den QR-Code in Abb. 60 finden Sie die Angaben J1, J2, J3 der vorangegangenen Beispiele in einem GeoGebra Buch „Passendes Koppelgetriebe finden“[55]. Arbeiten Sie folgende Fragestellungen direkt in diesem Buch durch.

a) Konstruieren Sie die vorher aufgefundenen, viergliedrigen, beweglichen Koppelgetriebe AM_AM_BB, abhängig von der Drehung A um M_A um den Winkel ϕ.

b) Animieren Sie diese Bewegung. Lassen Sie dabei A eine vollständige Drehung um M_A machen. Was beobachten Sie?

c) Warum ist der Umlauf eventuell nicht möglich? Geben Sie eine Begründung.

d) Finden Sie auf experimentellem Wege den möglichen Aktionsradius des Koppelgetriebes. Setzen Sie die Grenzen des Winkels ϕ passend zu diesem Aktionsradius. Stellen Sie die Animationseinstellungen auf wechselnd, nun sollte die Animation des Koppelgetriebes die tatsächlich mechanisch mögliche Situation widerspiegeln.

Abb. 60: GeoGebra Buch „Passendes Koppelgetriebe finden“

5.10.3 Lösungen der Aufgaben

a) Lösungen der Beispiel J1 bis J3 siehe Abb. 61 bis 63 oder auch direkt im GeoGebra Buch.

b) Bei vollem Umlauf von ϕ verschwindet das Getriebe.

c) Der Umlauf ist aufgrund der Abmessungen nicht möglich. Das Getriebe würde sich „zerreissen“.

d) - J1 $\phi \in [-120.39°, 198.61°]$

[54] https://www.geogebra.org/m/khp4fx2q
[55] Siehe auch Dokumentation im Anhang.

- J2 $\phi \in [-3.5°, 157.5°]$
- J3 $\phi \in [-68.42°, 146.54°]$

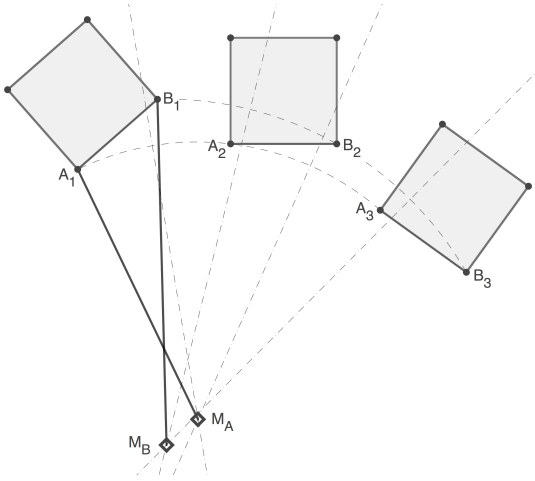


Abb. 61: Beispiel J1 Lösung

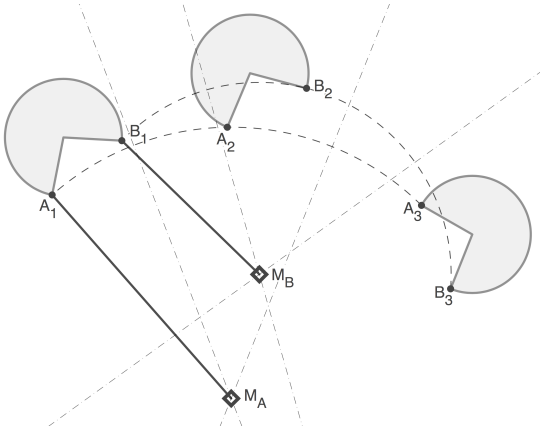


Abb. 62: Beispiel J2 Lösung

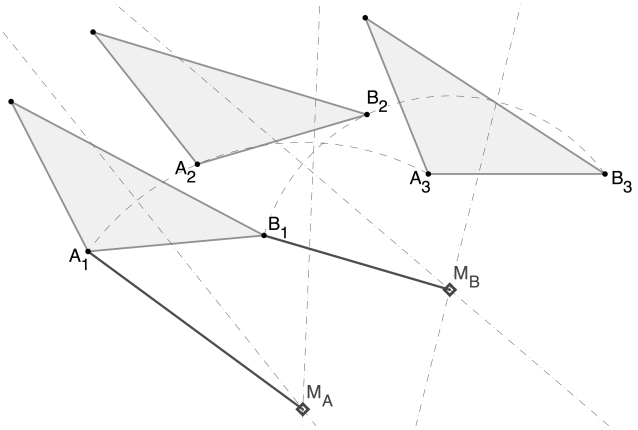


Abb. 63: Beispiel J3 Lösung

5.11 Modul K - Geradführungen

In Zeiten in denen die Dampfmaschine in ihren Kinderschuhen steckte, waren mechanische Vorrichtungen noch abhängig von der Genialität, dem kreativen Einfallsreichtum ihrer Erfinder. Eine generalisierte Theorie der Funktionsweisen dieser Maschinen gab es noch nicht. Die systematische Strukturierung von Mechanismen war den Erfindern noch nicht geläufig, jede Maschine entstand aus einer speziellen Fragestellung gefolgt vom Ideenreichtum und oftmals experimentellem Vorgehen.

James Watt (1736-1819) war maßgeblich an der Austüftelung der berühmten Dampfmaschine beteiligt. Obwohl ihre Erfindung nicht per se seiner Feder zugeschrieben werden kann, hat er doch die notwendigen Details beigetragen, um sie als „Triebfeder der industriellen Revolution“ zu etablieren und hat damit einen wesentlichen Beitrag zur Einleitung einer neuen Epoche beigetragen (vgl. Fischer, 2014). Eben genau jener Mann sah sich im Zuge dieser Entwicklung mit einer interessanten Frage konfrontiert: Wie ist es möglich, einen Punkt geradlinig zu bewegen, ohne ihn in einer vordefiniert geradlinigen Vorrichtung zu führen?

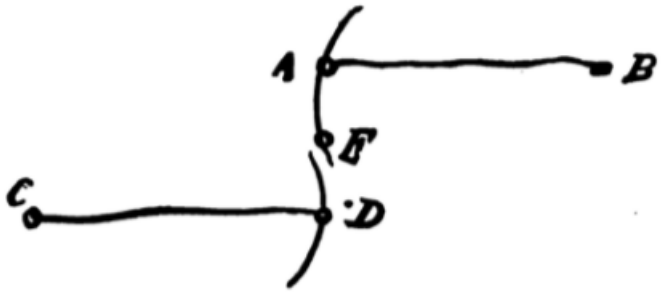
1784 machte er in einem Brief an Matthew Boulton, siehe Abb. 64, ebenfalls englischer Ingenieur, erstmal enthusiastische Andeutungen an seine Idee. Die Idee selbst aber blieb aus.
In einem weiteren Brief, Abb. 65 an seinen Sohn 24 Jahre später wird Watt etwas genauer. Beide Briefauszüge sind wiederum aus dem Werk „Theoretische Kinematik“ von Reuleaux (1875, S. 6–7) entnommen.

„Ich habe ein neues Wild auf dem Korn,“ schreibt er. „Ich habe den Schimmer von einer Methode, nach welcher eine Kolbenstange veranlasst werden kann, senkrecht auf und nieder zu gehen, indem man sie bloss an einem Stücke Eisen am Balancier befestigt, ohne Ketten, ohne senkrechte Schienen, oder lästige Reibungen, Bogenköpfe oder andere schwerfällige Stücke, durch welche Vorrichtung, wenn sie völlig der Erwartung entspricht, gegen 5 Fuss an der Höhe des Maschinenhauses bei 8 Fuss Hub erspart werden wird, was ich als eine wesentliche Ersparniss ansehe; und sie kann so gut für doppeltwirkende als für einfachwirkende Maschinen gebraucht werden. Ich habe erst ein kleines Modell versuchsweise ausgeführt, nach welchem noch nicht gebaut werden kann . . . . . doch bitte ich, nichts von der Sache zu sagen, bis ich die Patentspezifikation einreiche“ [1]).

Abb. 64: Auszug aus einem Brief aus 1784 von Watt an Boulton

Watt hat uns in Briefen einige Andeutungen über den Gedankengang, welcher ihn gerade zu dem oben angeführten Mechanismus leitete, hinterlassen. „Die Idee," so schreibt er im November 1808 an seinen Sohn, „entstand in folgender Weise. Da ich die doppelten Ketten oder die Zahnbogen und Zahnstangen sehr ungeeignet dazu fand, die Bewegung der Kolbenstange auf die Winkelbewegung des Balanciers zu übertragen, gieng ich ans Werk zu versuchen, ob ich nicht Mittel und Wege finden könne, dasselbe durch Bewegungen um Achsen zu ermöglichen,

Fig. 1*).



und nach einiger Zeit fiel mir ein, dass, wenn AB und CD zwei gleiche Radien sind, welche sich um die Mittelpunkte B und C drehen, und durch eine Stange AD verbunden sind, bei der Bewegung durch Bogen von gewisser Länge gleiche und entgegengesetzte Abweichungen von der geraden Linie haben würden, und dass der Punkt E eine nahezu gerade Linie beschreiben würde, sowie dass, wenn der Radius CD der Zweckmässigkeit halber nur halb so gross wie AB gemacht wäre, dasselbe stattfände, wofern man den Punkt E näher nach D rückte, und hieraus wurde die Konstruktion, welche man später die Parallelbewegung genannt hat, abgeleitet. Obgleich ich nicht übertrieben ruhmbegierig bin, so bin ich doch stolzer auf die Parallelbewegung, als auf irgend eine andere mechanische Erfindung, welche ich jemals gemacht habe."

Abb. 65: Auszug aus einem Brief aus 1808 von Watt an seinen Sohn

Bemerkung 5.11.I. Dieses Modul bezieht sich auf das Kapitel Problemlösen unter 4.4, da hier eine klassische kinematische Lösungskompetenz geschult wird. Außerdem wird der Vorteil der DGS Konstruktion, nachzulesen in Kapitel 4.5, im Auffinden von Bahnkurven ausgenutzt. Durch den historischen Zugang wird ebenfalls auf die Rolle der Modelle und Modellbildung in der Kinematik, im Kapitel 4.6, eingegangen.

5.11.1 Mögliche Aufgabenstellungen

a) Lesen Sie sich den Brief von Watt an seinen Sohn genau durch und konstruieren Sie die Bewegung anschließend in GeoGebra. Legen Sie dafür einen Schieberegler ϕ als Winkel innerhalb des Intevalls $[-90°, 90°]$ an. Um diesen Winkel soll sich nun A um B im Uhrzeigersinn drehen und dabei den Punkt D mitbewegen. Die Längen $\overline{AB}$ und $\overline{AD}$ wählen Sie gemäß der Skizze. Konstruieren Sie die beschriebene Bewegung.

b) Mithilfe der Konstruktion *Ortslinie* konstruieren Sie die Bahnkurve des Punktes E. Geben Sie ein ungefähres, augenscheinliches Intervall für ϕ an, das E geradlinig bewegen lässt.

5.11.2 Lösungen der Aufgaben

a) Angenäherte Geradführung dargestellt in Abb. 66.

b) Bewegt sich ϕ innerhalb des Intervalls $[-20°, 19°]$, bewegt sich E augenscheinlich geradlinig. Dieser Wert als Lösung variiert, weil er zum einen Schätzwert ist und zum anderen von den Abmessungen des Mechanismus abhängig ist.

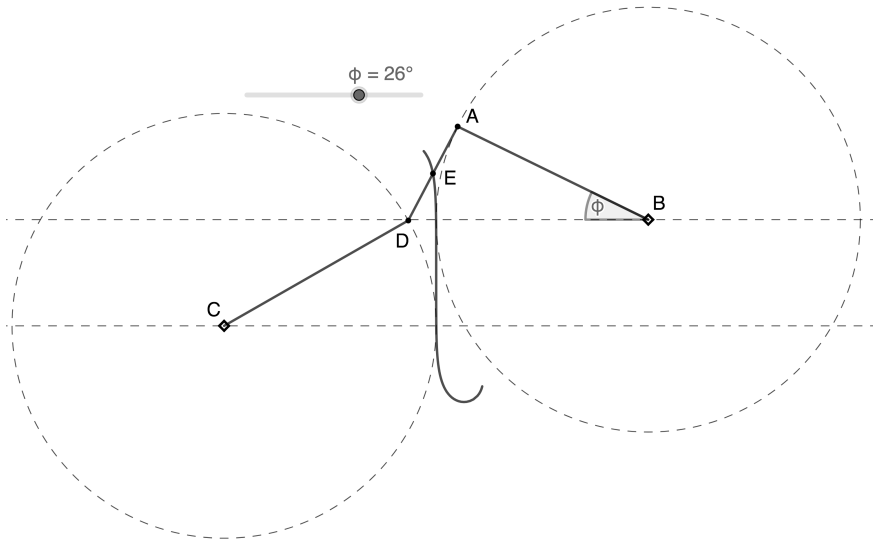


Abb. 66: Watt'sche Geradlenker

5.12 Modul L - Differenzengeometrische Konstruktion

Die Ermittlung von Tangenten und Krümmungskreisen von Kurven ist essentiell für Kurvendiskussionen. Im Falle einer kinematisch erzeugten Kurve gestaltet sich die exakte Ermittlung von Tangenten und Krümmungskreisen nicht immer einfach. Oft erfordert ihre geometrische und auch mathematische Erfassung in einem Kurvenpunkt komplexe Konstruktions- und Berechnungsfähigkeiten. Den in Modul F in 5.6 beschriebenen Übergang von Sekante zur Tangente im Grenzfall zweier benachbarter Lagen eines Mechanismus kann mittels GeoGebra simuliert werden und wird dadurch ein sinnvolles Werkzeug zur experimentellen Ermittlung der Tangenten aller Kurvenpunkte. Diese Konstruktion kann für alle kinematisch erzeugten Kurven angewendet werden.

Die folgenden Aufgaben sind in dem GeoGebra Buch „Differenzengeometrische Konstruktion“[56] unter dem Link[57] oder auch über den QR-Code in Abb. 67 zu finden.

Abb. 67: GeoGebra Buch „Differenzengeometrische Konstruktion“

Gegeben ist ein Koppelgetriebe mit $[AB]$ als Koppel und $[M_AM_B]$ als Gestell. A dreht sich um den Winkel ϕ um M_A. C sei der Koppelpunkt, der die Koppelkurve c erzeugt.

5.12.1 Mögliche Aufgabenstellungen

a) Legen Sie einen Schieberegler für den Winkel $\Delta\phi$ an. Dieser soll sich zwischen $0,01°$ und $20°$ bewegen.

Bemerkung 5.12.I. Ziel der linken Seite des Intervalls ist es, sehr nahe an 0 heranzureichen, sie aber nicht zu erreichen. Daher könnte man die linke Seite noch kleiner setzen, etwa $0,0001$. GeoGebra lässt hier eine Genauigkeit von bis zu 5 Kommastellen zu. Um diesen kleinen Wert am Rande des Intervalls wirklich erreichen zu können, muss die Schrittweite angepasst werden. Dadurch allerdings verliert die Konstruktion so sehr an Dynamik, dass zugunsten

[56] Siehe auch Dokumentation im Anhang
[57] https://www.geogebra.org/m/umjakkr6

der Anschaulichkeit der Wert so gewählt wird, dass die Bewegung mit passender Schrittweite noch sichtbar bleibt. So ist die Annäherung an 0 mit $0,01$ durchaus nah genug.

b) Konstruieren Sie ein Koppelgetriebe $A'M_AM_BB'$. Es soll dieselbe Koppelkurve wiedergeben wie das Getriebe AM_AM_BB, lassen Sie A' um M_A um den Winkel $\phi + \Delta\phi$ rotieren. Der so entstehende Punkt C' überstreicht etwas versetzt dieselbe Kurve wie C.

c) Konstruieren Sie die Verbindungsgerade (CC'). Lassen Sie anschließend den Winkel $\Delta\phi$ immer kleiner werden bis er schließlich $0.01°$ erreicht. Was können Sie an den Punkten C und C' und ihrer Verbindungsgerade (CC') beobachten?

d) Setzen Sie $\Delta\phi = 0$. Welchen Unterschied macht es, wenn $\Delta\phi$ von $0.01°$ auf $0°$ gesetzt wird? Diskutieren Sie, warum $\Delta\phi$ für diese Konstruktion nicht 0 werden darf.

e) Mit dem Wissen über die differenzengeometrische Konstruktion der Tangente, finden Sie eine Möglichkeit zur differenzengeometrischen Konstruktion des Krümmungskreises.

Bemerkung 5.12.II. Hier muss darauf geachtet werden, dass differenzengeometrische Vokabel wie Krümmungskreis bekannt sind. Eine intuitive, kinematische Erklärung vom Begriff Krümmungskreis und vom Begriff Wendepunkt findet sich in Kapitel 4.5.3 beziehungsweise auch in Kapitel 3.1 und würde sich hier geeignet anbieten.

f) Bei welchen Punkten wird der Krümmungskreis annähernd zur Gerade? Geben Sie ein möglichst genaues Intervall mit Schrittweite $0,1°$ an, in dem der zu dieser Situation zugehörige Winkel ϕ liegt. Der Punkt, an dem der Krümmungskreis eine Gerade ist und die Kurve die Seite wechselt, nennt man Wendepunkt.

g) Finden Sie jene Punkte der Koppelkurve c, in denen der Krümmungskreis lokal maximal sowie minimal ist. Geben Sie wiederum die zugehörigen Intervalle an, in denen die Winkel ϕ_i liegen. Wieviel dieser sogenannten Scheitelpunkte gibt es?

Bemerkung 5.12.III. Hier bietet sich die Überleitung und Einbindung der Evolute und auch zum sogenannten Vierscheitelsatz an. In dieser Abhandlung wird darauf allerdings verzichtet.

5.12.2 Lösungen der Aufgaben

Die Lösungen der Aufgaben a) bis g) finden Sie ebenfalls direkt im GeoGebra Buch unter dem Link[58] in 67.

c) Die Verbindungsgerade (CC') ist Sekante der Kurve c. Lässt man nun $\Delta\phi$ immer kleiner werden, rückt C' an C heran. Wird nun $\Delta\phi$ so klein, dass seine Größe keine signifikant wahrnehmbare Auswirkung mehr hat, ist die Sekante (CC') von der Tangente in C augenscheinlich nicht mehr zu unterscheiden.

d) Wird $\Delta\phi = 0$ gesetzt, fallen C und C' zusammen, womit ihre Verbindungsgerade nicht mehr existiert.

e) Die differenzengeometrische Krümmungskreiskonstruktion funktioniert analog mit der Konstruktion eines dritten Kurvenpunktes C'', der die Kurve mit dem Winkel $\phi - \Delta\phi$ durchläuft. Der Umkreis von $CC'C''$ geht mit $\Delta\phi \to 0$ in den Krümmungskreis über.

f) C durchläuft zwei Wendepunkte W_1 für $\phi \in [5,4°, 5,5°]$ und W_2 für $\phi \in [336,1°, 336,3°]$.

g) Diese Kurve besitzt vier lokale Extremwerte der Krümmung. Die gesuchten Scheitelpunkte werden also bei $\phi \in [14,3°, 14,5°]$, $\phi \in [143,4°, 144,3°]$, $\phi \in [307,8°, 308,2°]$ und $\phi \in [356,4°, 356,7°]$ durchlaufen.

[58] https://www.geogebra.org/m/umjakkr6

5.13 Modul M - das Break Dance, von der Maschine zum Modell

Wer vergnügt sich nicht gerne in einem der unzähligen Vergnügungsparks in Europa, in Österreich allen voran dem Wiener Prater. Viele kennen höchst wahrscheinlich einige der bekannten Attraktionen, die dabei helfen sollen, den notwendigen Adrenalin-Kick zu schaffen, die richtige Portion Grusel bereit zu stellen oder sich mit den eigenen Freunden und Freundinnen bei unzähligen Schießbuden zu messen. Doch was steckt hinter solchen Vergnügungsmaschinen? Um dem Fahrgast den erwünschten Kick zu schenken, braucht es viele Ideen, allen voran geometrische, mathematische und physikalische Überlegungen, wie dieser Nervenkitzel erzeugt werden kann. Folgend geht es um eine bestimmte dieser Maschinen - dem Break Dance.

Abb. 68: Break Dance

Unter folgendem Link[59] oder auch unter dem QR-Code in Abb. 69 finden Sie ein *onride-offride* Video des Break Dance im Wiener Prater. Studieren Sie die Inhalte des Videos. Beobachten Sie das Break Dance, seine Bewegungen und die Bewegungen des Fahrgastes. Ziel ist, ein passendes Modell für das Break Dance zu finden um die Bahnkurve des Fahrgastes analysieren zu können.

Abb. 69: Video zu Break Dance im Wiener Prater

[59] https://youtu.be/3fMS0elCmeE

5.13.1 Mögliche Aufgabenstellungen

a) Beschreiben Sie das Break Dance in Worten. Aus welchen Bauteilen besteht es?

b) Diskutieren Sie, wie die Bewegung des Fahrgastes zustande kommt, diskutieren Sie weiters die Bewegung einer einzelnen Gondel.

c) Skizzieren Sie den Grundriss der Drehscheibe des Break Dance im Stillstand. Dabei soll die vorhandene Neigung der Grundfläche gegenüber des Bodens unberücksichtigt bleiben.

d) In Ihrem skizzierten Grundriss des Break Dance suchen Sie sich eine Gondel aus. Stellen Sie sich die Bewegung nur dieser einen Gondel vor. Skizzieren Sie die Bahn der Gondel. Nehmen Sie dabei an, die Gondel dreht sich *nicht* um ihre eigene Achse, alle weiteren Drehungen sind gleichförmig und die Bahnkurve des Fahrgastes ist geschlossen.

   Bemerkung 5.13.I. Die hier verwendeten Annahmen dienen zur Vereinfachung. Durch diese muss ganz im Sinne der Modellbildung geleitet werden. Siehe dazu auch Kapitel 4.6. So auch ist die Annahme, die Kurve sei geschlossen, eine Vereinfachung. Dies sollte gesondert besprochen werden.

e) Die überstrichene Kurve des Fahrgastes nennt man auch Hypotrochoide. In Abb. 70 ist eine typische geschlossene Hypotrochoide zu sehen. Offensichtlich ist diese eine symmetrische Kurve. Zeichnen Sie alle Symmetrieachsen ein.

f) Sehen Sie sich nochmal das *onride* Video des Break Dance an. Was passiert bei Minute 1 : 26? Beschreiben Sie die Änderung der Bewegung des Fahrgastes an dieser Stelle und diskutieren Sie die Eigenschaften seiner Bahnkurve an diesem Punkt.

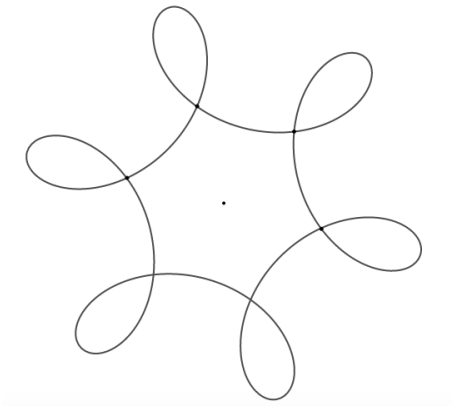


Abb. 70: Hypotrochoide

5.13.2 Lösungen der Aufgaben

a) Das Break Dance besteht aus einer Drehscheibe mit 4 symmetrisch angeordneten Gondelkreuzen mit jeweils 4 ebenfalls symmetrisch angeordneten Gondeln.

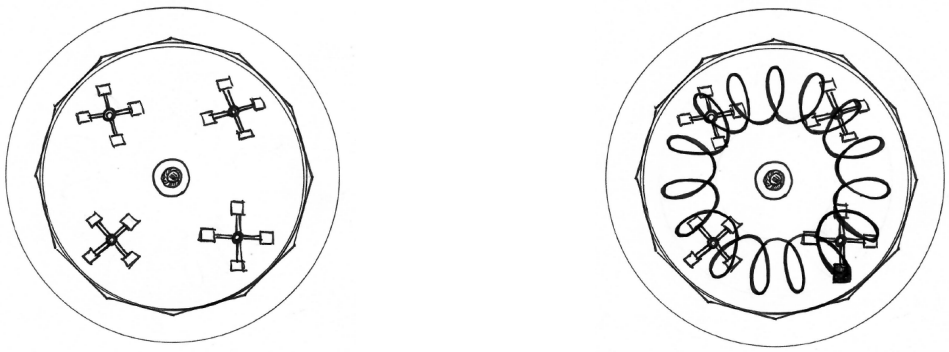
b) Die Bewegung des Break Dance setzt sich aus insgesamt 3 Rotationen zusammen, die Rotation der Drehscheibe, der Gondelkreuze und die der Gondeln. Die Rotation der Drehscheibe und die der Gondelkreuze sind jeweils motorangetrieben, die der Gondeln sind freie, zufällige Rotationen. Dies bedeutet, dass die Drehungen der Gondeln nicht oder nur schwer vorhersagbar sind. Dies ist ein großer Vorteil für die Fahrgäste, denn dadurch beinhalten die tatsächlichen Bewegungen der Fahrgäste Elemente der Zufälligkeit und ihre Bahnen wiederholen sich nur sehr unwahrscheinlich in exakter Weise.

c) Der Grundriss des Breakdance ist in Abb. 71a skizziert.

d) Skizzierte Bahn einer Gondel in Abb. 71b.

e) Die Symmetrieachsen der Hypotrochoide sind in Abb. 72 ersichtlich.

f) Zur Minute 1 : 26 kann man beobachten, dass sich der Fahrgast dem Rand des Break Dance schnell nähert. Anschließend wird er abgebremst sodass er in einen augenscheinlichen, kurzen Stillstand versetzt wird, um sich dann vom Rand des Break Dance schnell wieder zu entfernen. Offensichtlich durchläuft der Fahrgast einen äußeren Punkt seiner Bahn, einen sogenannten Scheitelpunkt. Liegt wirklich ein momentaner Stillstand vor, dann muss eine Spitze der Bahn durchlaufen werden.



(a) Grundriss der Drehscheibe des Break Dance (b) Grundriss mit möglichem Gondelweg

Abb. 71: Grundriss- und Bahnkurvenskizze

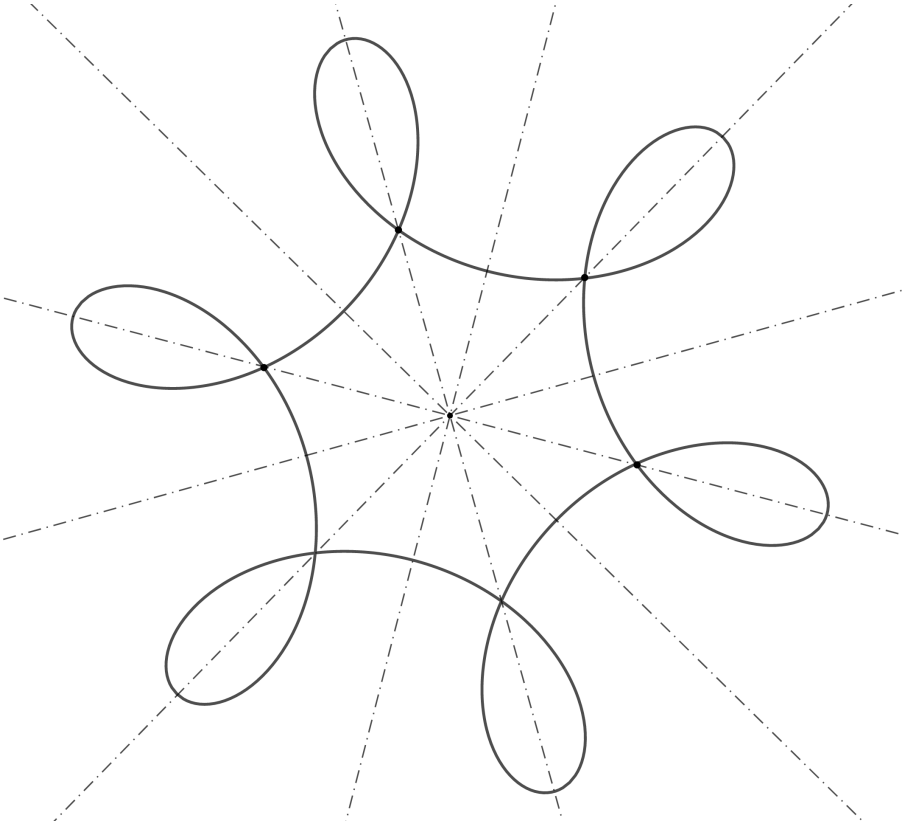


Abb. 72: Symmetrieachsen der Hypotrochoide

[59]Zugriff unter https://breakdancer-das-original.de/technik

5.14 Modul N - das Break Dance und seine Bewegung

Konstruieren Sie in GeoGebra die beobachtete Situation aus Modul M in 5.13. Lassen Sie also einen Punkt G abhängig von einem Drehwinkel $\phi \in [0°, 360°]$ um den Koordinatenmittelpunkt M_0 rotieren. Um diesen Punkt G lassen Sie wiederum einen Punkt F rotieren. Sein Drehwinkel soll ein veränderbares Vielfaches a des Drehwinkels von ϕ sein. Legen Sie dafür einen Schieberegler $a \in [-15, 15]$ an. Wählen Sie die Abmessungen in etwa gemäß dem Break Dance. Lassen Sie sich die Ortskurve des Punktes F mithilfe des Befehls *Ortslinie* anzeigen.

Tipp: Die Drehung von F um G soll vom Ruhesystem aus betrachtet werden. Konkret für die Konstruktion bedeutet dies, dass der Drehwinkel relativ zum Ruhesystem abgetragen werden muss. Vorstellen kann man sich das als Blatt Papier, das über das Drehzentrum G um den Mittelpunkt rotiert wird, allerdings dreht es sich selbst nicht um G. Stünde etwa ein Wort auf diesem Blatt Papier, könnte man es während seiner Drehung um M_0 zu jeder Zeit in korrekter Schriftposition[60] lesen. In dieser Ebene wird der Drehwinkel von F um G abgetragen, siehe Abb. 73.

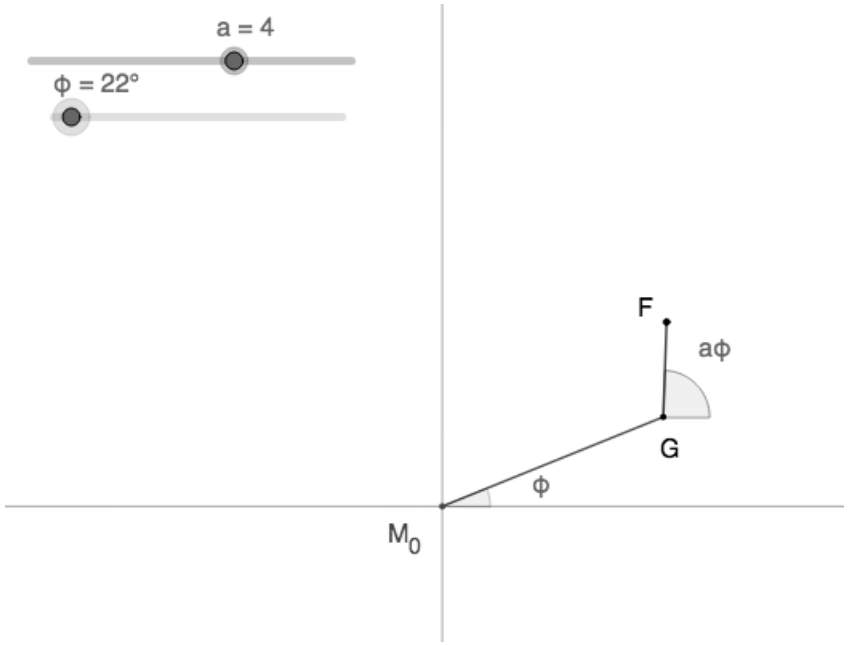


Abb. 73: Simulation der Gondelbewegung des Break Dance

[60] Horizontal gerichtetes Wort mit vertikal ausgerichteten Buchstaben; man nennt diese Bewegung auch zirkuläre Translation.

5.14.1 Mögliche Aufgabenstellungen

a) Beobachten Sie die Ortslinie des Punktes F, während Sie den Parameter a sein Intervall durchwandern lassen. Was passiert bei $a \in \mathbb{Z}$ im Vergleich zu $a \in \mathbb{Q}\backslash\mathbb{Z}$?

b) Vergleichen Sie die Form der Kurve für $a \in [-15, -2]$ und $a \in [2, 15]$ und beschreiben Sie deren Gemeinsamkeiten und ihre Unterschiede in Worten. Wie verhalten sich die Kurven wenn $a < -15$ bzw. $a > 15$ wird? Was bedeutet ihre Form für den Drehsinn der beiden Rotationen.

c) Wie nennt man die Kurven bei $a = 1$, $a = 0$ und $a = -1$?

d) Betrachten Sie nun all jene a, bei denen F innerhalb einer vollen Umdrehung von ϕ ganze Umdrehungen um G vollführt. Welche a sind dies? Zählen Sie für jedes dieser a die *Anzahl* der vollen Drehungen d von F um G. Finden Sie einen Zusammenhang dieser Anzahl und dem Parameter a.

Tipp: Stellen Sie sich vor, Sie würden im Punkt G stehen und entlang der Gerade (M_0G) nach außen blicken. Bei einer vollen Drehung von F um G kreuzt dieser Ihre Blickrichtung. Sie können sich auch einen Strahl als Blickrichtung konstruieren, dann fällt das Zählen leichter.

Bemerkung 5.14.I. In diesem Modul wird bewusst auf die Verwendung des Begriffs *Trochoide* verzichtet. Die Trochoide dienen vielmehr als Werkzeug zum Verständnis dieser kinematischen Erzeugung einer Bahnkurve denn als eigenständiger Gegenstand der Betrachtung.

5.14.2 Lösungen der Aufgaben

a) Bei $a \in \mathbb{Z}$ ist die Bahnkurve von F geschlossen, für $a \in \mathbb{Q}\backslash\mathbb{Z}$ nicht.

b) Die Gemeinsamkeit der beiden Kurven manifestiert sich in ihrer Symmetrie und ihrer Ausbildung von Schleifen, die der Punkt F überstreicht. Je größer oder auch kleiner die Zahl a wird, desto größer wird auch die Anzahl der Schleifen, dies gilt auch für $a < -15$ und $a > 15$. Der Unterschied der Kurven ist, dass für $a < 0$ die Schleifen nach außen zeigen, für $a > 0$ nach innen.
Wie in Abb. 74 gut zu erkennen ist, zeigen die Schleifen nach außen, wenn ein entgegengesetzter Drehsinn vorliegt. Bei gleichem Drehsinn der Rotationen zeigen sie nach innen.

c) Bei $a = 1$ und $a = 0$ liegt ein Kreis vor. Bei $a = -1$ ein Ellipse.

d)

a=	...	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	...
d=	...	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	...

$\Rightarrow$ So gilt: $d = a - 1$

Bemerkung 5.14.II. In diesem Beispiel ist der Zugang zum Zusammenhang von a und d experimentell gewählt. Es sind keine kinematischen Vorkenntnisse vonnöten, um diesen Zusammenhang erkunden zu können. Das Ergebnis ist ebenfalls über Formel (11) in Satz 2.13 berechenbar, denn es gilt $d\phi = \omega_{12}$ was nach 2.4.3.1 aus $\omega_{02} - \omega_{01} = \phi(a-1)$ das gesuchte $d = a - 1$ ergibt.

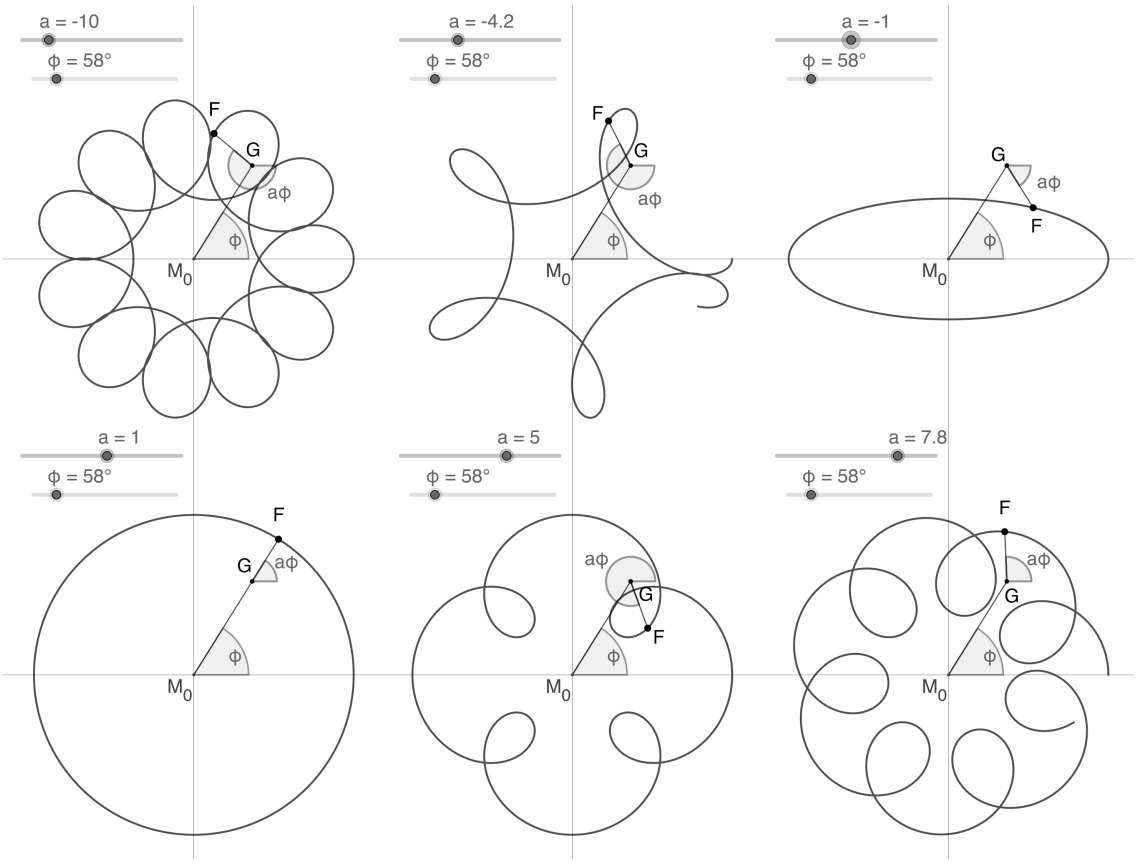


Abb. 74: Unterschiedliche Bahnkurven

Bemerkung 5.14.III. In diesem Modul bietet sich die Parametrisierung der Kurve als Verbindung zur Mathematik hervorragend an. Additiv kann man sich diese in GeoGebra über die Eingabe der Parameterdarstellung zeichen lassen. Hier wird allerdings auf diesen Querausflug verzichtet.

5.15 Modul O - das Break Dance, die Bahnkurve der Gondel

In Abb. 75 ist der Grundriss eines Modells des Break Dance vom Wiener Prater gegeben. Der Einfachheit halber sind die Gondeln, deren Eigenrotation nicht berücksichtigt wird, in diesem Grundriss vernachlässigt.
Der Punkt F repräsentiert den Fahrgast im Break Dance. Konstruieren Sie seine Bahnkurve.
Es wird von gleichförmigen Drehungen ausgegangen. Von außen beobachtet, in der Zeit, in der die Bodenscheibe eine Umdrehung in mathematisch negativer Richtung macht, vollzieht der Fahrgast 5 Umdrehungen in entgegengesetzter Richtung.

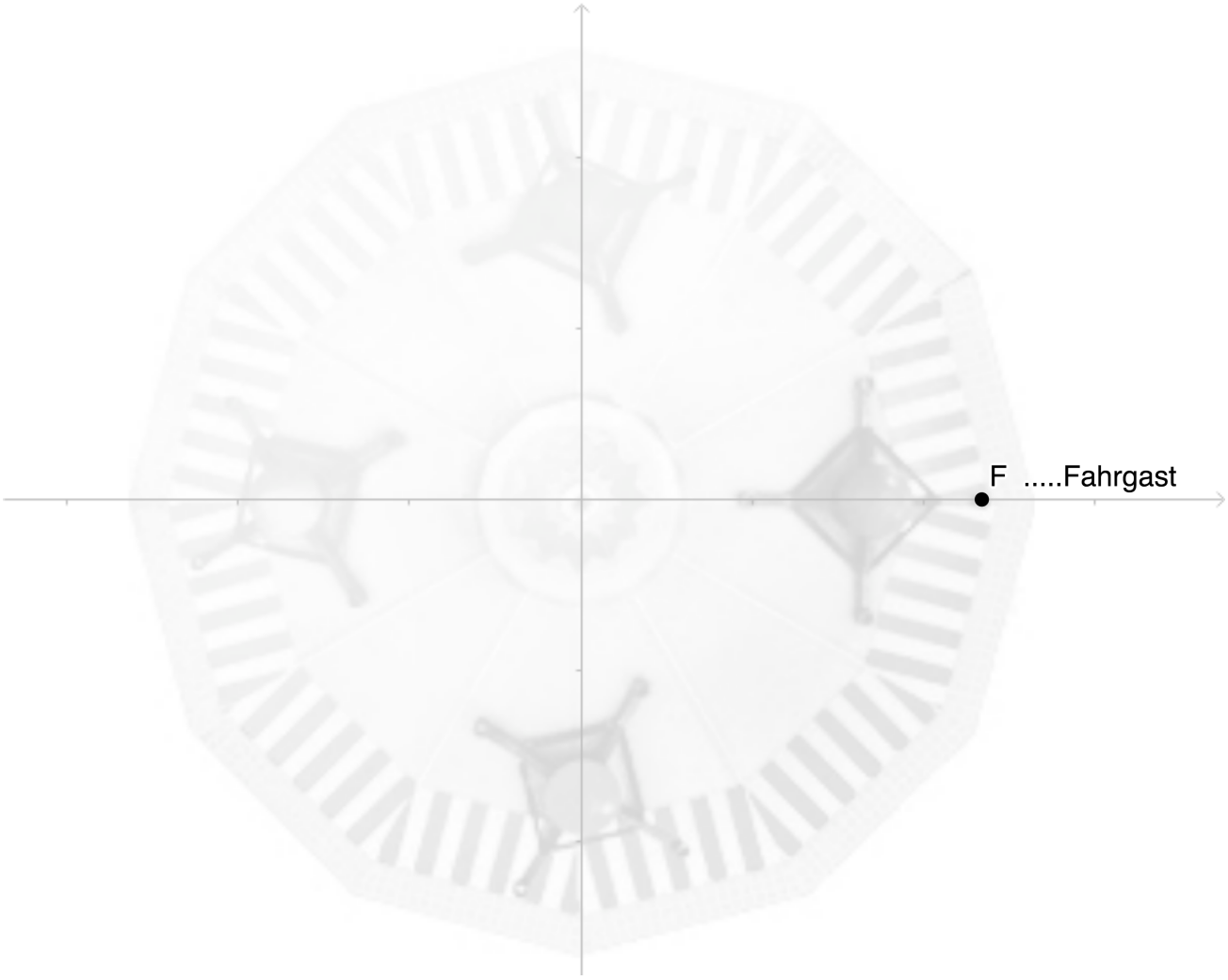


Abb. 75: Grundrisskonstruktion Bahnkurve

5.15.1 Mögliche Aufgabenstellungen

Konstruieren Sie bei Rotation der Drehscheibe alle 15°:

a) die Lagen F_1 bis F_6 des Punktes F innerhalb des vierten Quadranten mithilfe der Abtragung der Winkel.

b) die übrigen Lagen des Punktes F in allen anderen Quadranten mithilfe der Symmetrieeigenschaften der Kurve.

Bemerkung 5.15.I. Die Symmetrieeigenschaften der Hypotrochoide werden hier als Werkzeug zur Findung der übrigen Kurvenpunkte verwendet. Hier wird auf die gesonderte Bearbeitung der Hypotrochoide verzichtet.

c) die Tangenten aller Kurvenpunkte, die den größten sowie auch den kleinsten Abstand zum Drehscheibenmittelpunkt haben und erläutern Sie die Wahl Ihrer Konstruktion in Worten.

d) Unter dem Link[61] und auch über den QR-Code in Abb. 76 finden Sie das GeoGebra Buch „Rollkurven“[62], auch Trochoide genannt. Dies sind Bahnkurven, die durch Kreisrollungen entstehen. Erkunden Sie dieses Buch und finden Sie jene Rollkurven, welche auch der Fahrgast im Break Dance überstreicht. Arbeiten Sie folgende Unterpunkte durch:

i) Um welche Trochoide handelt es sich bei der Bahnkurve des Fahrgastes im Break Dance?

Bemerkung 5.15.II. Die Form von Rollkurven kann sehr unterschiedlich sein, sie bergen viele Eigenschaften und interessantes Diskussionspotential. Dennoch werden hier nur die für das Break Dance relevanten Rollkurven und Eigenschaften behandelt. Auf die Kurven selbst und ihre Vielseitigkeit wird nicht im Detail eingegangen.

ii) Die Bahnkurve eines Gastes im Break Dance ist demnach ebenfalls erzeugbar durch die Rollung eines Kreises auf einem anderen. Überlegen Sie sich das Verhältnis der Radien der beiden Kreise und konstruieren Sie diese anschließend.

Tipp: Bei Kreisrollungen sind die überstrichenen Kreisbögen gleich lang.

iii) Konstruieren Sie alle weiteren fehlenden Tangenten. Dazu müssen Sie wissen: die Tangente in einem Punkt F_i steht orthogonal auf die Verbindungsgerade von F_i und dem Berührpunkt B_i der beiden Kreise in der jeweiligen Lage.

[61] https://www.geogebra.org/m/pdnsdgtj
[62] Siehe auch Dokumentation im Anhang.

Bemerkung 5.15.III. Wie in Kapitel 2.4.3.1 ausführlich dargestellt, sind die beiden aufeinander rollenden Kreise Polkurven der Bewegung. In diesem Beispiel wird allerdings bewusst auf die besonderen kinematischen Vokabel wie *Pol* und *Polkurve* verzichtet, weshalb auch die für diese Objekte übliche Bezeichnung abweicht. So ist der Berührpunkt der beiden Kreise hier absichtlich mit B anstatt des üblichen für den Momentanpol stehenden P bezeichnet.

Abb. 76: GeoGebra Buch „Rollkurven“

5.15.2 Lösungen der Aufgaben

a) G ist der Gondelkreuzmittelpunkt, die Abtragung aller sechs Rotationswinkel erfolgt direkt an einem Kreis um G. Diese Hilfspunkte F_i' werden dann in die entsprechenden Lagen parallel verschoben, siehe Abb. 78.

b) Verschiedene Symmetrieachsen durch den Ursprung zur Spiegelung der Punkte wurden verwendet.

c) Diejenigen Punkte, die den kleinsten und den größten Abstand zum Drehscheibenmittelpunkt haben sind Extrempunkte. Genau in ihrer Position wechselt der Fahrgast seine Bewegungsrichtung. Sie ändert sich von einer Bewegung dem Mittelpunkt entgegen in eine Bewegung dem Mittelpunkt abgewandt und umgekehrt. Der Fahrgast ist also jener Punkt der gesuchten Tangente, dessen Abstand zum Drehscheibenmittelpunkt minimal beziehungsweise maximal ist. Folglich muss die gesuchte Tangente an die Kurve auch Tangente an den Kreis durch den Fahrgastpunkt mit dem Ursprung als Mittelpunkt sein, siehe Abb. 78.

d) i) Es handelt sich um eine Hypotrochoide.

ii) Abb. 77 zeigt: M_0 sei der Ursprung. B sei der Berührpunkt beider Kreise.
Am rollenden Kreis ist der überstrichene Kreisbogen b gleich lang wie der überstrichene Kreisbogen b_0 am stillstehenden Kreis. Kurze Rechnung zeigt:

$$b_0 = b \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\pi \cdot r_0 \cdot \phi}{180^\circ} = \frac{\pi \cdot r \cdot (\phi - (-5\phi))}{180^\circ} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{r_0}{r} = 6$$

iii) Da das Verhältnis $\frac{r_0}{r} = 6$ bekannt ist, kann die Konstruktion der Rollkreise mithilfe des Strahlensatzes erfolgen, zu sehen in Abb. 79, hervorgehoben als strichlierte Konstruktion mit Hilfslinie.

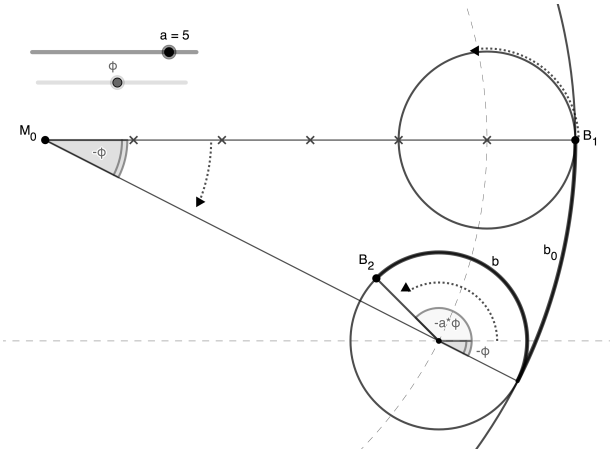


Abb. 77: Gleich lange überstrichene Kreisbögen

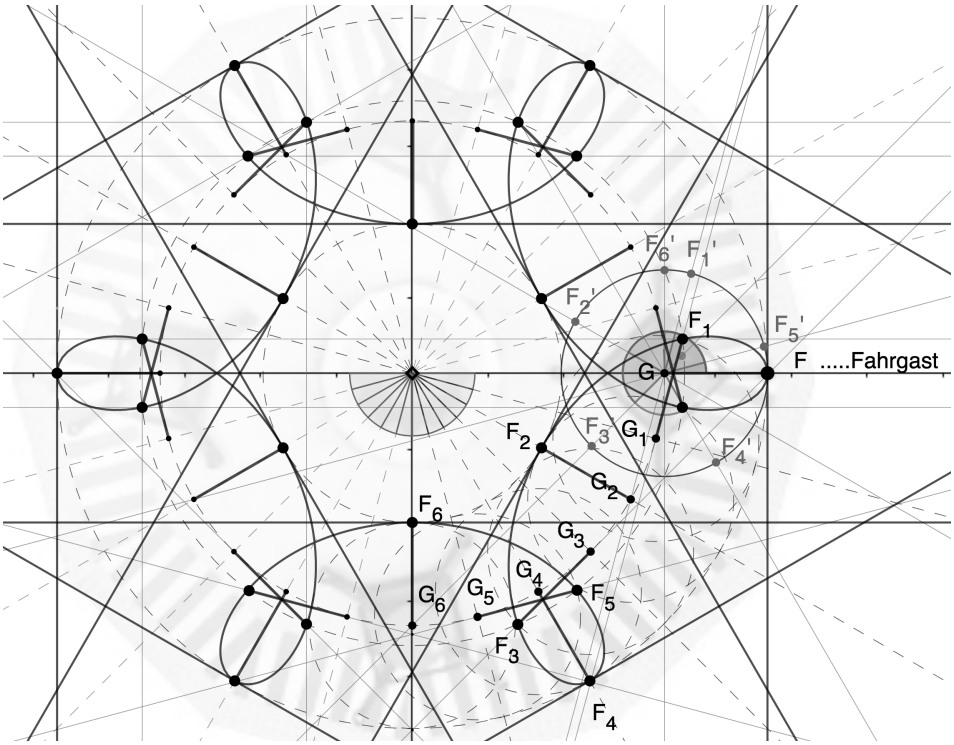


Abb. 78: Grundrisskonstruktion Bahnkurve Lösung

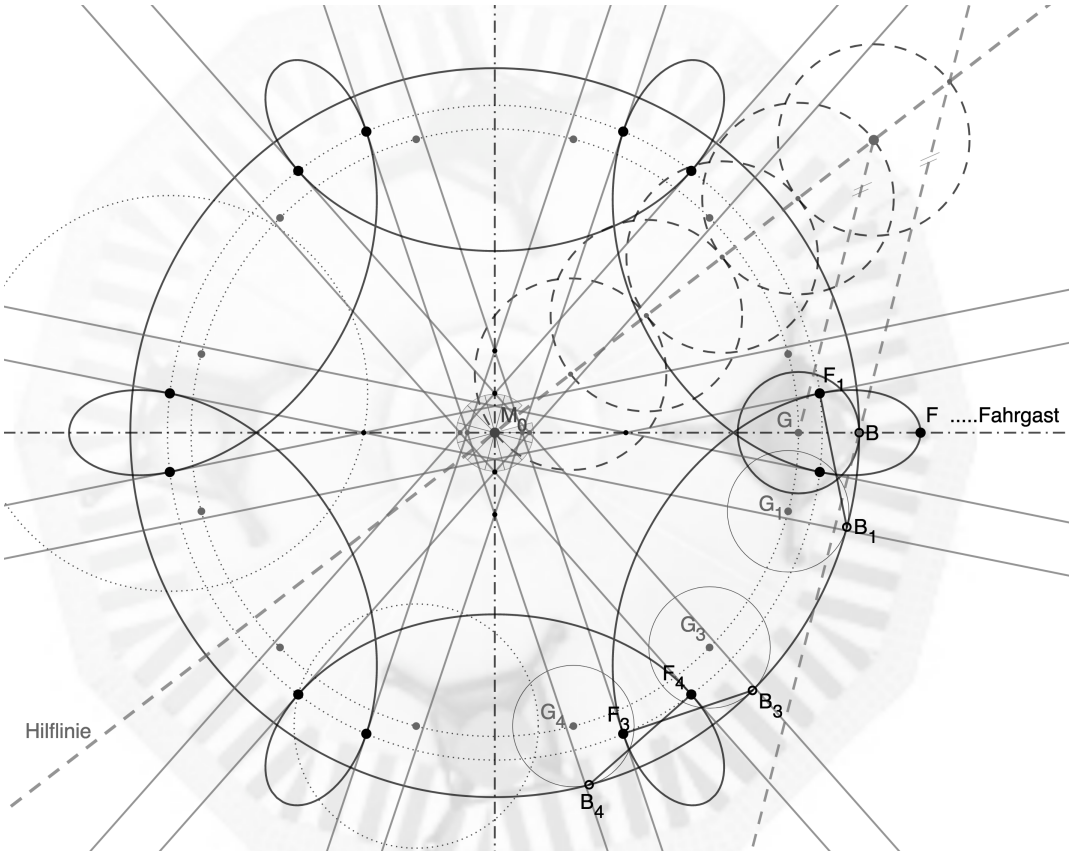


Abb. 79: Symmetrieachsen und Konstruktion der Rollkreise

6 Schlusswort

Alles in Allem hat das eingehende Studium der Kinematik und ihrer Inhalte sehr gut gezeigt, welch Potential nicht nur als anwendungsorientierte Wissenschaft, sondern auch als eingenständiger Bereich innerhalb schulischer Bildung in ihr steckt. Die Bewegung und ihrer Darstellung in der Geometrie zu erwecken erscheint nach dieser Darbietung didaktisch nicht nur möglich, sondern auch sinnvoll. In der Analyse ist die systematische didaktische Aufbereitung der Kinematik als ganzheitliches Themenfeld gelungen. Nicht nur einzelne exemplarische kinematische Themen fanden Gehör, ein ganzheitliches Bild der Wissenschaft, ihrer Inhalte und ihrer Vor- und Nachteile sind didaktisch bearbeitet worden. So bietet die didaktische Analyse die Verknüpfung der Kinematik mit der aktuellen Didaktik geometrischer Inhalte und wird so widerstandslos in die aktuellen Themengebiete der geometrischen Bildung gebettet.

Das im Lehrplan hervorgehobene Ziel der Erlangung von Raumvorstellung wird mit der Bewegung und ihrer Analyse einmal mehr geschult und von einem neuen Blickwinkel aus betrachtet. Neben dieser Schulung des *geometrischen Auges* sind kinematische Fragestellungen hervorragende Möglichkeiten, interdisziplinär zu arbeiten und Inhalte unterschiedlichster Themen zu verknüpfen. Neben dem hervorgehobenen geschichtlichen Aspekt gibt es Diskussions- und Bearbeitungsmöglichkeiten in Kunst, Design, Architektur, Mathematik, Physik, der Verknüpfung mit dem Alltag, Maschinenbau, und viele mehr, selbst ein Exkurs in die Biologie in Verbindung mit Freiheitsgraden ist denkbar. So konnte diese Arbeit nicht nur auf theoretischer sondern auch auf praktischer Ebene diese Fülle an Verknüpfungsmöglichkeiten nutzen, um die Kinematik zugänglich zu machen.

A Anhang

A.1 Literaturverzeichnis

Aebli, H. (1983). *Zwölf Grundformen des Lehrens - eine allgemeine Didaktik auf psychologischer Grundlage* (15. Druckaufl.). Stuttgart: Klett-Cotta.

Assmann, B. & Selke, P. (2004). *Technische Mechanik* - (13. vollständig überarb. Aufl. Reprint 2014). München: Oldenbourg Verlag.

Berer, M. (2015). Nachruf für Prof. Dr.-Ing. habil. Dr. E. h. Johannes Volmer. Zugriff unter https://www.tu-chemnitz.de/mb/MHT/Professur/Historie/Volmer.php (eingesehen am 07.12.2019).

BMBWF. (2019). Bundesrecht konsolidiert: Gesamte Rechtsvorschrift für Lehrpläne – allgemeinbildende höhere Schulen, RIS.

Brunner, E. (2014). *Mathematisches Argumentieren, Begründen und Beweisen - Grundlagen, Befunde und Konzepte* (1. Aufl.). Berlin Heidelberg New York: Springer-Verlag.

Fischer, E. (2014). *Unzerstörbar - die Energie und ihre Geschichte.* Berlin Heidelberg: Springer Verlag.

Glaeser, G. (2014a). *Der mathematische Werkzeugkasten - Anwendungen in Natur und Technik* (4. Aufl.). Berlin Heidelberg New York: Springer-Verlag.

Glaeser, G. (2014b). *Geometrie und ihre Anwendungen in Kunst, Natur und Technik* - (3. Aufl.). Berlin Heidelberg New York: Springer-Verlag.

Greefrath, G. (2018). *Anwendungen und Modellieren im Mathematikunterricht - Didaktische Perspektiven zum Sachrechnen in der Sekundarstufe* (2. Aufl.). Berlin Heidelberg New York: Springer-Verlag.

Greefrath, G., Oldenburg, R., Siller, H.-S., Ulm, V., Weigand, H.-G., Oldenburg, R., Siller, H.-S., Ulm, V. & Weigand, H.-G. (2016). *Didaktik der Analysis - Aspekte und Grundvorstellungen zentraler Begriffe* (1. Aufl.). Berlin Heidelberg New York: Springer-Verlag.

Hagedorn, L., Thonfeld, W. & Rankers, A. (2009). *Konstruktive Getriebelehre* - (6. Aufl.). Berlin Heidelberg New York: Springer-Verlag.

Hrones, J. A. & Nelson, G. L. (1951). *Analysis of the Four-bar Linkage - Its Application to the Synthesis of Mechanisms*. Technology Press of the Massachusetts Institute of Technology, und Wiley, New York.

Kerle, H., Corves, B. & Hüsing, M. (2011). *Getriebetechnik - Grundlagen, Entwicklung und Anwendung ungleichmäßig übersetzender Getriebe* (4. Aufl.). Berlin Heidelberg New York: Springer-Verlag.

Krauter, S., Padberg, F. & Bescherer, C. (2012). *Erlebnis Elementargeometrie - Ein Arbeitsbuch zum selbstständigen und aktiven Entdecken* (2. erw. Aufl. 2013). Berlin Heidelberg New York: Springer-Verlag.

Lehner, M. (2012). *Didaktische Reduktion* - (1. Aufl.). Stuttgart: UTB GmbH.

Luck, K. (1988). 100 Jahre „Lehrbuch der Kinematik“ von Ludwig Burmester. *Maschinenbautechnik*, *37*, 561–562. Zugriff unter http://www.dmg-lib.org/dmglib/handler?docum=3808009 (eingesehen am 10.03.2020).

Mauersberger, K. (1998). Maschinenwesen und technische Kultur. *Technik und Wissenschaft als produktive Kräfte in der Geschichte: Rolf Sonnemann zum 70. Geburtstag*, 141–152. Zugriff unter http://www.dmg-lib.org/dmglib/handler?docum=4222009 (eingesehen am 10.03.2020).

Mauersberger, K. (2005). Franz Reuleaux und die Kinematik - ein kühner heuristischer Entwurf der Maschinenwissenschaften im 19. Jahrhundert. *Dahlemer Archivgespräche*, *11*, 73–96. Zugriff unter http://www.dmg-lib.org/dmglib/handler?docum=2552009 (eingesehen am 10.03.2020).

Müller-Philipp, S. & Gorski, H.-J. (2008). *Leitfaden Geometrie - Für Studierende der Lehrämter* (4, überarb. u. erw. Aufl. 2009). Berlin Heidelberg New York: Springer-Verlag.

Reuleaux, F. (1875). *Theoretische Kinematik*. Braunschweig: Friedrich Vieweg und Sohn.

Roth, J. (2005). *Bewegliches Denken im Mathematikunterricht* (Diss., Bayerische Julius-Maximilians-Universität Würzburg).

Stachel, H. (1998). Walter Wunderlich (1910 - 1998)†. Zugriff unter https://www.geometrie.tuwien.ac.at/former/pdf/stachel_nachruf_wunderlich.pdf (eingesehen am 10.03.2020).

Toeplitz, O. (1927). Das Problem der Universitätsvorlesungen über Infinitesimalrechnung und ihrer Abgrenzung gegenüber der Infinitesimalrechnung an den höheren Schulen. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, *36*, 88–99. Zugriff unter http://eudml.org/doc/145749 (eingesehen am 18.12.2019).

Vollrath, H.-J. & Roth, J. (2011). *Grundlagen des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe* - (2. Aufl.) (F. Padberg, Hrsg.). Berlin Heidelberg New York: Springer-Verlag.

Weigand, H.-G., Filler, A., Hölzl, R., Kuntze, S., Ludwig, M., Roth, J., Schmidt-Thieme, B., Wittmann, G., Filler, A., Hölzl, R., Kuntze, S., Ludwig, M., Roth, J., Schmidt-Thieme, B. & Wittmann, G. (2018). *Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe I* - (3. Aufl.). Berlin Heidelberg New York: Springer-Verlag.

Wunderlich, W. (1963). Zwei instruktive Trugschlüsse. *Elemente der Mathematik*, *18*(4).

Wunderlich, W. (1970). *Ebene Kinematik*. Mannheim: Bibliographisches Institut.

A.2 Abbildungsverzeichnis

1 Grenzübergang . . . 10
2 Gelenkviereck . . . 17
3 Drehgelenkgetriebe Quelle: (Kerle, Corves & Hüsing, 2011, S. 41) . . . 19
4 Tschebyschefflenker Quelle: DMG-lib . . . 20
5 Wippkran Quelle: (Wunderlich, 1970, S. 83) . . . 20
6 Punkte der Rastebene als Rauten . . . 22
7 Genfer Fußgängerbrücke Quelle: INGENI Homepage . . . 24
8 Vernetzung von Modulen mit den Inhalten der didaktischen Analyse . . . 30
9 Mögliches Begriffsnetz - Kinematik als Unterbegriff . . . 33
10 Mögliches Begriffsnetz - Kinematik als Oberbegriff . . . 33
11 Modellbildung für eine Bahnkurve des Break Dance im Wiener Prater . . . 48
12 Jr. Scientist Mini Strandbeest Selbstbausatz . . . 50
13 Fossilium Ossa Geneticus - III, Bones, Quelle: Theo Jansen Homepage . . . 56
14 GeoGebra Buch „Theo Jansens Strandbeest Leg“ . . . 58
15 Bein des Strandbeests . . . 59
16 Unmöglicher Schritt . . . 60
17 Beispiel C1 . . . 61
18 Beispiel C2 . . . 61
19 Beispiel C3 . . . 61
20 Beispiel C4 . . . 61
21 Beispiel C1 Lösung Rotation mit Zentrum Z . . . 62
22 Beispiel C2 Lösung keine Schiebung oder Drehung möglich . . . 62
23 Beispiel C3 Lösung Schiebung . . . 62
24 Beispiel C4 Lösung Drehung um Zentrum Z . . . 62
25 Bei der Limonade im Wirtshaus . . . 64
26 Demonstration der Drehung . . . 64
27 Mögliche Lagen zweier gleich langer Strecken . . . 66
28 Konstruktion des Drehzentrums . . . 67
29 Uneindeutiger Pol bei Ungleichsinnigkeit . . . 67
30 Doppelte Spiegelung . . . 69
31 GeoGebra Buch „Zum Beweis des Fundamentalsatzes der ebenen Kinematik“ . . . 70
32 Zeitrafferdarstellung der Bewegung . . . 71
33 Bahnnormalen durch den Pol . . . 72

34 Grenzübergang . . . 73
35 Beispiel G1 . . . 75
36 Beispiel G2 . . . 75
37 Beispiel G3 . . . 75
38 Beispiel G4 . . . 75
39 Beispiel G1 Lösung . . . 76
40 Beispiel G2 Lösung . . . 76
41 Beispiel G3 Lösung . . . 76
42 Beispiel G4 Lösung . . . 76
43 Schieberegler in GeoGebra . . . 78
44 A bewegt sich in Abhängigkeit von ϕ auf dem Kreis . . . 78
45 Schubkurbel . . . 79
46 Gelenkviereck . . . 79
47 Spiegel . . . 81
48 Schreibtischlampe . . . 81
49 Zusammenklappbares Weinregal . . . 81
50 Gelenkparallelogramm . . . 81
51 Veränderliches Dreieck . . . 81
52 Gelenkviereck Quelle: (Reuleaux, 1875, S. 51) . . . 82
53 Scharniermechanismus Quelle: (Kerle,2011) . . . 82
54 Programmablauf Quelle: (Kerle,2011) . . . 83
55 GeoGebra Buch „Viergliedrige Drehgelenkgetriebe“ . . . 85
56 Watt'sche Geradlenkerführung; Quelle: DMG-lib . . . 86
57 Beispiel J1 . . . 87
58 Beispiel J2 . . . 87
59 Beispiel J3 . . . 87
60 GeoGebra Buch „Passendes Koppelgetriebe finden“ . . . 88
61 Beispiel J1 Lösung . . . 89
62 Beispiel J2 Lösung . . . 89
63 Beispiel J3 Lösung . . . 89
64 Briefauszug 1 Quelle: (Reuleaux,1875) . . . 90
65 Briefauszug 2 Quelle: (Reuleaux,1875) . . . 91
66 Watt'sche Geradlenker . . . 92
67 GeoGebra Buch „Differenzengeometrische Konstruktion“ . . . 93
68 Break Dance . . . 96
69 Video zu Break Dance im Wiener Prater . . . 96

70 Hypotrochoide 97
71 Grundriss- und Bahnkurvenskizze 98
72 Symmetrieachsen der Hypotrochoide 99
73 Simulation der Gondelbewegung des Break Dance 100
74 Unterschiedliche Bahnkurven 102
75 Grundrisskonstruktion Bahnkurve 103
76 GeoGebra Buch „Rollkurven“ 105
77 Gleich lange überstrichene Kreisbögen 106
78 Grundrisskonstruktion Bahnkurve Lösung 106
79 Symmetrieachsen und Konstruktion der Rollkreise 107

A.3 Dokumentation

Es folgt die Dokumentation der für die Abhandlung eigens erstellten GeoGebra Bücher unter dem Account namens TTrnka in chronologischer Reihenfolge des Auftretens. Das Layout ist direkt und in exakter Wortwahl von den online verfügbaren GeoGebra Büchern übernommen. Weil diese GeoGebra Bücher für die praktische Anwendung in Modulen konzipiert wurden, kann das Design der einzelnen Bücher voneinander abweichen. Dieses richtet sich primär nach den Bedürfnissen des im jeweiligen Modul aufgeforderten Aufgabenstils, weniger nach Einheitlichkeit.

Folgende GeoGebra Bücher wurden verwendet:

- Zum Beweis des Fundamentalsatzes[63] in Modul E in Kapitel 5.5
- Viergliedrige Drehgelenkgetriebe und seine Namen[64] in Modul I in Kapitel 5.9
- Passendes Koppelgetriebe finden[65] in Modul J in Kapitel 5.10
- Differenzengeometrische Konstruktion[66] in Modul L in Kapitel 5.12
- Rollkurven[67] in Modul O in Kapitel 5.15

[63] Zugriff unter https://www.geogebra.org/m/hyq2whzc
[64] Zugriff unter https://www.geogebra.org/m/hjnjnewz
[65] Zugriff unter https://www.geogebra.org/m/khp4fx2q
[66] Zugriff unter https://www.geogebra.org/m/umjakkr6
[67] Zugriff unter https://www.geogebra.org/m/pdnsdgtj

Zum Beweis des Fundamentalsatzes der ebenen Kinematik

TTrnka

26.08.2019

Zusammenfassung

Zwei gleichsinnig kongruente Figuren der Ebene können durch eine Drehung oder auch durch eine Schiebung ineinander überführt werden. Dies ist der Fundamentalsatz der ebenen Kinematik. Die Drehung bzw. Schiebung lässt sich mithilfe zweier Spiegelungen erzeugen.

Inhaltsverzeichnis

1 Aufgabe **1**

1.1 Zwei Spiegelungen ergeben...? 1

2 Lösung **2**

2.1 Resultierende Drehung aus zwei Spiegelungen 2

1 Aufgabe

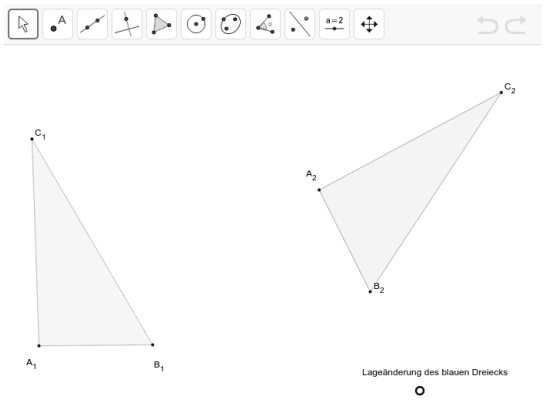
1.1 Zwei Spiegelungen ergeben...?

Das rote Dreieck soll auf das blaue Dreieck abgebildet werden. Bei gleichsinnigen Dreiecken kann dafür eine Drehung verwendet werden.

Anstelle einer Drehung kann man ebenfalls zwei Achsenspiegelungen konstruieren und erhält dasselbe Ergebnis.

Überprüfen Sie diese Aussage interaktiv, indem Sie die Achsenspiegelungen zur gegebenen Situation finden. Konstruieren Sie weiters das Drehzentrum und die Kreise, auf denen die gedrehten Punkte liegen.

Weiters verändern Sie die Lage des blauen Dreiecks derart, dass es sich bei der Abbildung statt um eine Rotation um eine Translation handelt. Trifft die obige Aussage dann noch zu?



Angabe: li. das rote Dreieck, re. das blaue Dreieck

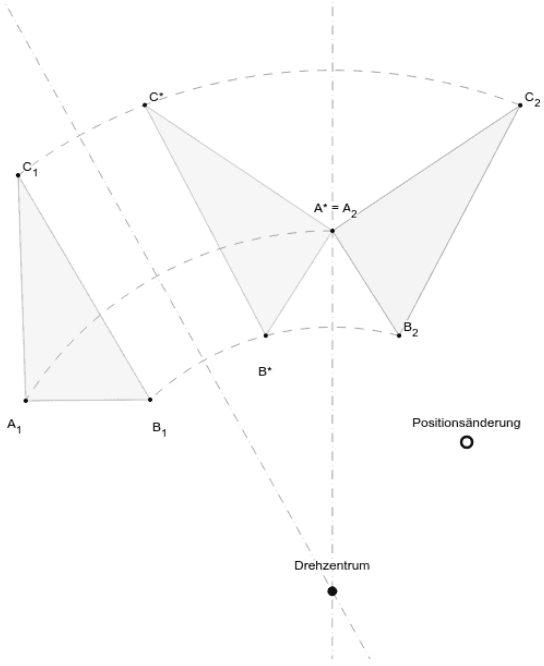
2 Lösung

2.1 Resultierende Drehung aus zwei Spiegelungen

Das rote Dreieck soll auf das blaue Dreieck abgebildet werden.

Anstelle einer Drehung kann man ebenfalls zwei Achsenspiegelungen konstruieren und erhält dasselbe Ergebnis.

Die Spiegelachsen laufen durch das Drehzentrum. Bei Translation trifft die obige Aussage ebenfalls zu. Dabei sind die Spiegelachsen parallel.



Lösung: zweifache Spiegelung

Viergliedrige Drehgelenkgetriebe und seine Namen

TTrnka

15.09.2019

Zusammenfassung

Hier finden Sie die Lösungen zu den Aufgaben a) bis d) im Modul I - das viergliedrige Drehgelenkgetriebe und seine Namen.

Inhaltsverzeichnis

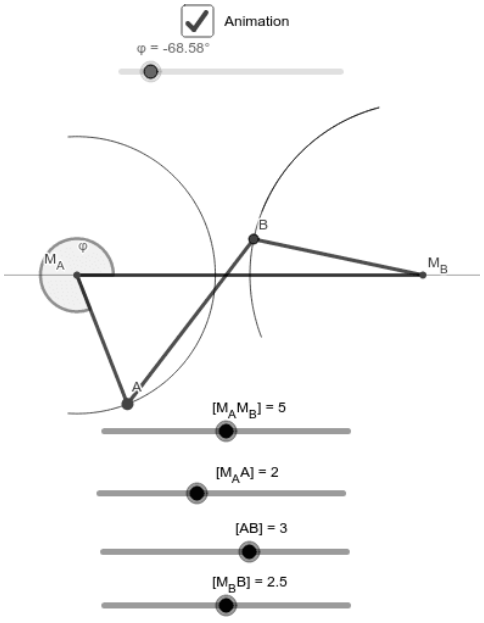
1 a) Doppelschwinge **1**

2 b) Gleichschenkelige Kurbelschwinge **2**

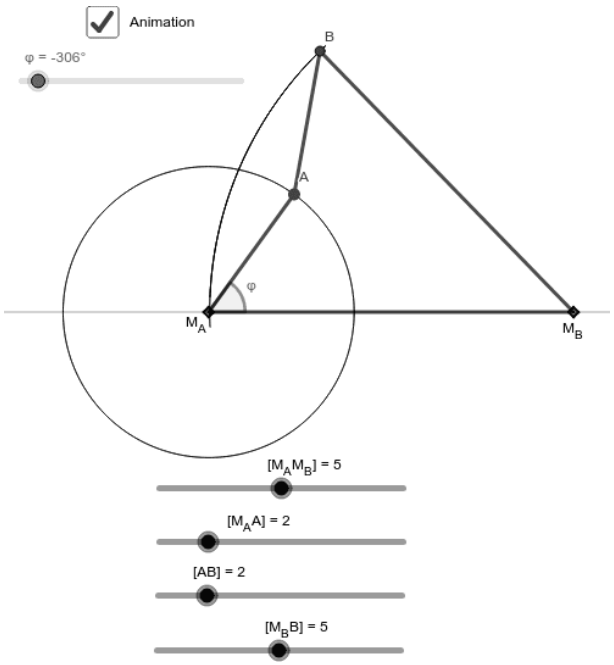
3 c) Doppelkurbel **2**

4 d) Nicht schliessbar **3**

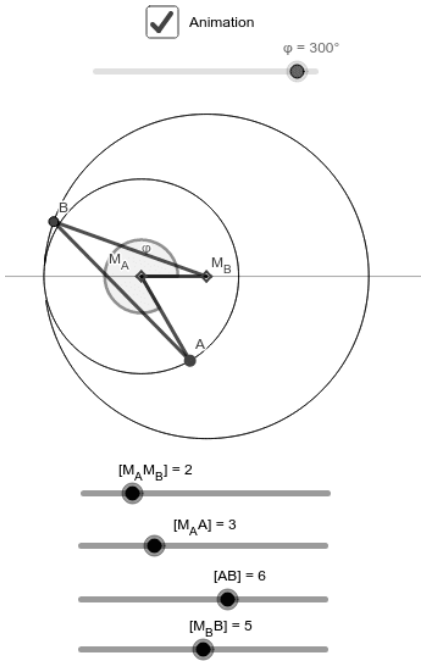
1 a) Doppelschwinge



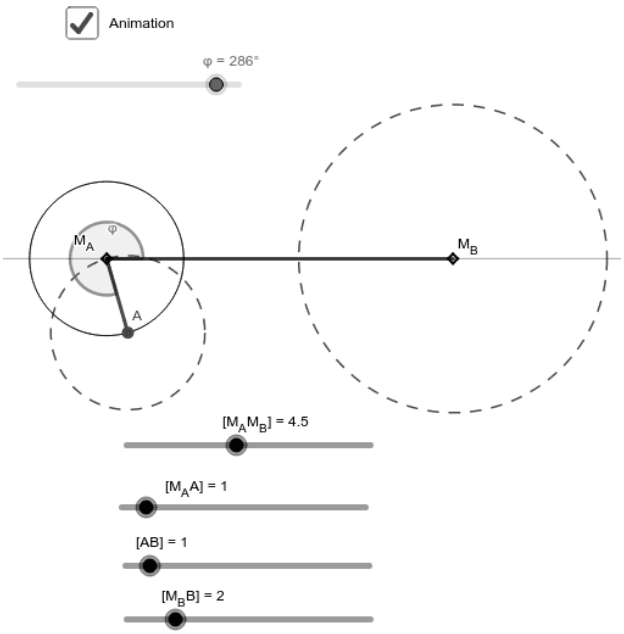
2 b) Gleichschenkelige Kurbelschwinge



3 c) Doppelkurbel



4 d) Nicht schliessbar



Passendes Koppelgetriebe finden

TTrnka

09.09.2019

Zusammenfassung

Im folgenden Buch finden sich drei Aufgaben zur sogenannten Drei-Lagen-Synthese ebener viergliedriger Drehgelenkmechanismen.

Inhaltsverzeichnis

1 Angaben **1**

1.1 ModulJ1 1

1.2 ModulJ2 2

1.3 ModulJ3 3

2 Lösungen **4**

2.1 ModulJ1 Lösung inkl. Animation 4

2.2 ModulJ2 Lösung inkl. Animation 4

2.3 ModulJ3 Lösung inkl. Animation 5

1 Angaben

1.1 ModulJ1

Was ist zu tun?

Gegeben sind 3 Positionen einer Figur in der Ebene.

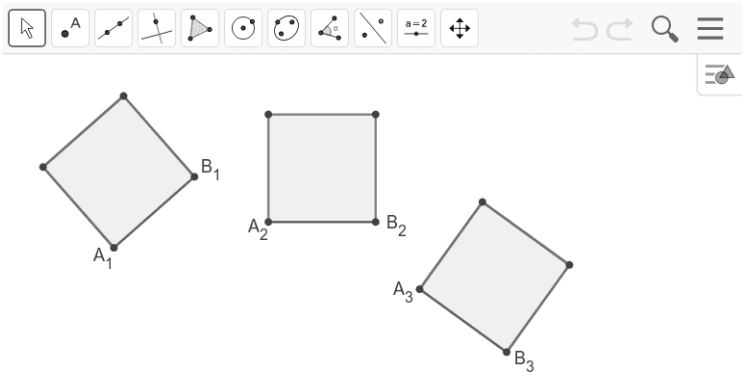
Gesucht ist nun jenes Koppelgetriebe, das die Figur von Position 1 über Position 2 in Position 3 bringt.

Konstruieren Sie die viergliedrigen Koppelgetriebe AM_AM_BB, abhängig von der Drehung A um M_A um den Winkel ϕ.

Animieren Sie diese Bewegung. Lassen Sie dabei A eine vollständige Drehung um M_A machen. Was beobachten Sie?

Warum ist der Umlauf eventuell nicht möglich? Geben Sie eine Begründung an.

Finden Sie auf experimentellem Wege den möglichen Aktionsradius des Koppelgetriebes. Setzen Sie die Grenzen des Antriebswinkels passend zu diesem Aktionsradius. Stellen Sie die Animationseinstellungen auf wechselnd, nun sollte die Animation des Koppelgetriebes die tatsächlich mechanisch mögliche Situation wiederspiegeln.



1.2 ModulJ2

Was ist zu tun?

Gegeben sind 3 Positionen einer Figur in der Ebene.

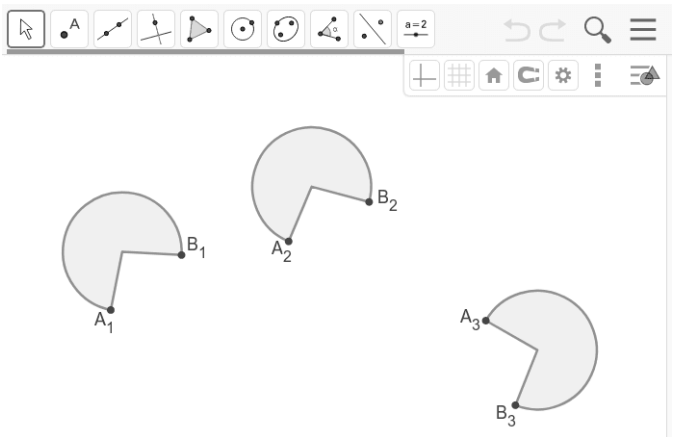
Gesucht ist nun jenes Koppelgetriebe, das die Figur von Position 1 über Position 2 in Position 3 bringt.

Konstruieren Sie die viergliedrigen Koppelgetriebe AM_AM_BB, abhängig von der Drehung A um M_A um den Winkel ϕ.

Animieren Sie diese Bewegung. Lassen Sie dabei A eine vollständige Drehung um M_A machen. Was beobachten Sie?

Warum ist der Umlauf eventuell nicht möglich? Geben Sie eine Begründung an.

Finden Sie auf experimentellem Wege den möglichen Aktionsradius des Koppelgetriebes. Setzen Sie die Grenzen des Antriebswinkels passend zu diesem Aktionsradius. Stellen Sie die Animationseinstellungen auf wechselnd, nun sollte die Animation des Koppelgetriebes die tatsächlich mechanisch mögliche Situation wiederspiegeln.



1.3 ModulJ3

Was ist zu tun?

Gegeben sind 3 Positionen einer Figur in der Ebene.

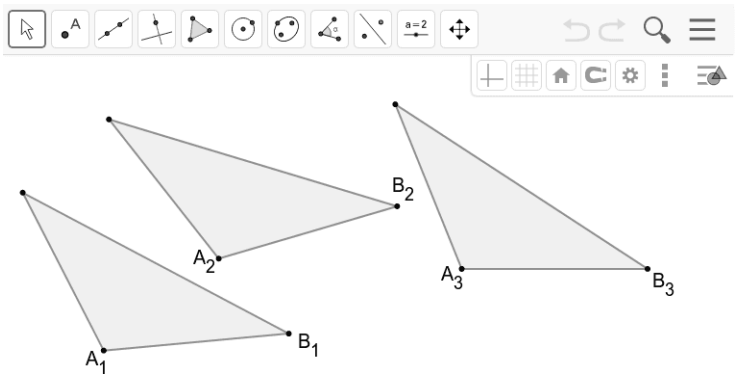
Gesucht ist nun jenes Koppelgetriebe, das die Figur von Position 1 über Position 2 in Position 3 bringt.

Konstruieren Sie die viergliedrigen Koppelgetriebe AM_AM_BB, abhängig von der Drehung A um M_A um den Winkel ϕ.

Animieren Sie diese Bewegung. Lassen Sie dabei A eine vollständige Drehung um M_A machen. Was beobachten Sie?

Warum ist der Umlauf eventuell nicht möglich? Geben Sie eine Begründung an.

Finden Sie auf experimentellem Wege den möglichen Aktionsradius des Koppelgetriebes. Setzen Sie die Grenzen des Antriebswinkels passend zu diesem Aktionsradius. Stellen Sie die Animationseinstellungen auf wechselnd, nun sollte die Animation des Koppelgetriebes die tatsächlich mechanisch mögliche Situation wiederspiegeln.

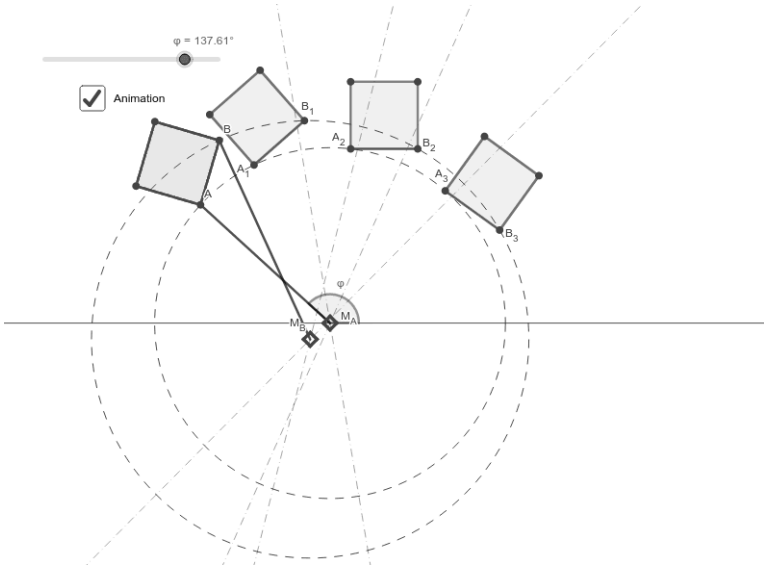


2 Lösungen

2.1 ModulJ1 Lösung inkl. Animation

Der Umlauf von A ist aufgrund der Abmessungen nicht möglich. Das Koppelgetriebe würde sich ßerreißen".

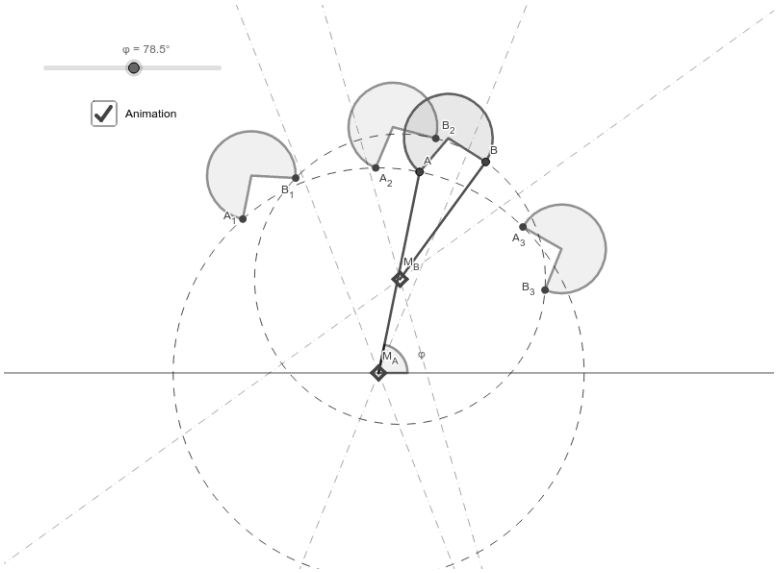
Der Aktionsradius ist demnach beschränkt. Um eine mechanische Umsetzung zu gewährleisten, muss sich ϕ im Intervall $[-120.39°; 198.61°]$ bewegen.



2.2 ModulJ2 Lösung inkl. Animation

Der Umlauf von A ist aufgrund der Abmessungen nicht möglich. Das Koppelgetriebe würde sich ßerreißen".

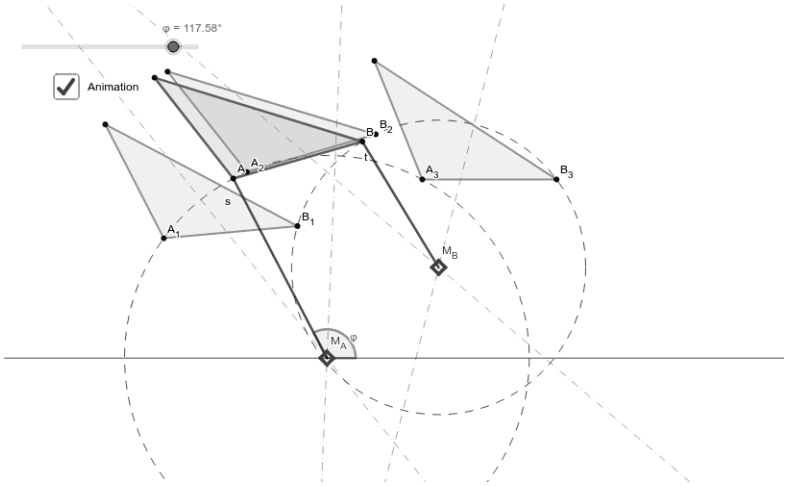
Der Aktionsradius ist demnach beschränkt. Um eine mechanische Umsetzung zu gewährleisten, muss sich ϕ im Intervall $[-3.5°; 157.5°]$ bewegen.



2.3 ModulJ3 Lösung inkl. Animation

Der Umlauf von A ist aufgrund der Abmessungen nicht möglich. Das Koppelgetriebe würde sich ßerreißen".

Der Aktionsradius ist demnach beschränkt. Um eine mechanische Umsetzung zu gewährleisten, muss sich ϕ im Intervall $[-68.42°; 146.54°]$ bewegen.



Differenzengeometrische Konstruktion

TTrnka

03.09.2019

Zusammenfassung

Im Falle einer kinematisch erzeugten Kurve gestaltet sich die exakte Ermittlung der Tangente und des Krümmungskreises nicht immer einfach. Oft erfordert die geometrische und auch mathematische Erfassung der Tangente in einem Kurvenpunkt komplexe Konstruktions- und Berechnungsfähigkeiten.

Den Übergang von Sekante zur Tangente im Grenzfall zweier benachbarter Lagen eines Mechanismus kann mittels GeoGebra simuliert werden und wird dadurch ein sinnvolles Werkzeug zur experimentellen Ermittlung der Tangenten beziehungsweise des Krümmungskreisen aller Kurvenpunkte.

Die folgende differenzengeometrische Konstruktion kann für alle Kurven, die kinematisch erzeugt werden, angewendet werden.

Inhaltsverzeichnis

1 Aufgabe **1**

1.1 Differenzgeometrische Tangentenkonstruktion 1

2 Lösung **2**

2.1 Tangentenkonstruktion Lösung 2

3 Aufgabe **3**

3.1 Differenzgeometrische Krümmungskreiskonstruktion 3

4 Lösung **4**

4.1 Krümmungskreiskonstruktion Lösung 4

1 Aufgabe

1.1 Differenzengeometrische Tangentenkonstruktion

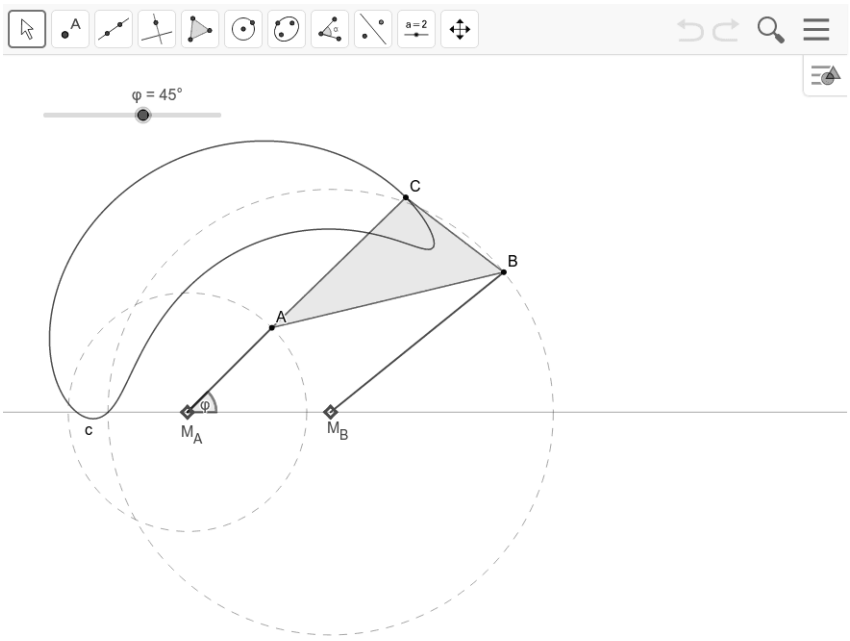
Angabe

Gegeben ist ein Koppelgetriebe mit $[AB]$ als Koppel und $[M_AM_B]$ als Gestell.

A dreht sich um den Winkel ϕ um M_A.

C sei der Koppelpunkt, der die Koppelkurve c erzeugt.

1. Legen Sie einen Schieberegler für den Winkel $\Delta\phi$ an. Dieser soll sich zwischen $0.01°$und $20°$bewegen.
2. Konstruieren Sie ein Koppelgetriebe $A'M_AM_BB'$. Es soll dieselbe Koppelkurve wiedergeben wie das Getriebe AM_AM_BB. Lassen Sie A' um M_A um den Winkel $\phi + \Delta\phi$ rotieren. Der so entstehende Punkt C' überstreicht dieselbe Kurve, jedoch etwas versetzt.
3. Konstruieren Sie die Verbindungsgerade (CC'). Lassen Sie anschließend den Winkel $\Delta\phi$ immer kleiner werden bis er $0.01°$erreicht. Was können Sie an den Punkten C und C' und ihrer Verbindungsgerade (CC') beobachten?
4. Setzen Sie den Winkel $\Delta\phi = 0$. Welchen Unterschied macht es, wenn $\Delta\phi$ von $0.01°$ auf $0°$ gesetzt wird? Diskutieren Sie, warum $\Delta\phi$ für diese Konstruktion nicht 0 werden darf.



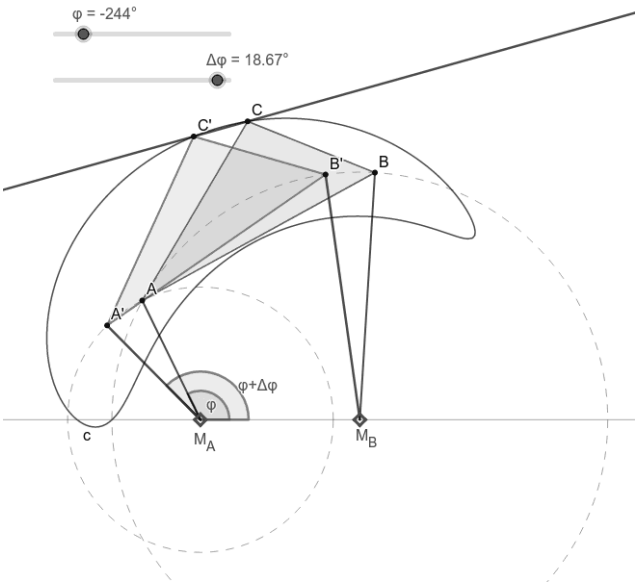
2 Lösung

2.1 Tangentenkonstruktion Lösung

Lösung

Die Verbindungsgerade (CC') ist bei größerem $\Delta\phi$ als Sekante an die Kurve c klar ersichtlich. Bei immer kleiner werdendem $\Delta\phi$ rücken C und C' immer näher aneinander. Bei sehr kleinem $\Delta\phi$ ist die Sekante (CC') optisch von der Tangente in C nicht mehr zu unterscheiden.

Wir $\Delta\phi = 0$ gesetzt, fallen C und C' auf einen Punkt zusammen, womit die Gerade (CC') nicht mehr existiert.



3 Aufgabe

3.1 Differenzengeometrische Krümmungskreiskonstruktion

weiterführende Angabe

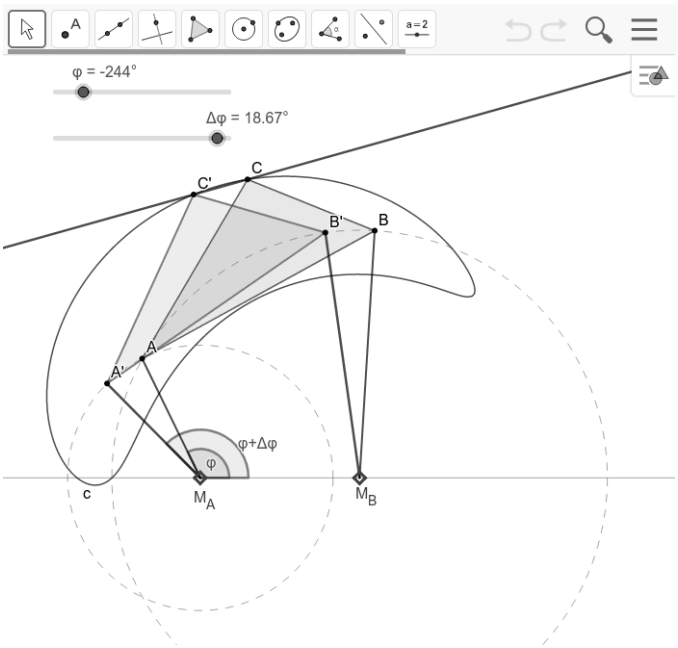
Überlegen Sie, wie die obige differenzengeometrische Konstruktion der Tangente auf die Konstruktion des Krümmungskreises ausgeweitet werden kann.

Konstruieren Sie anschließend den Krümmungskreis im Kurvenpunkt C analog zur vorherigen Tangentenkonstruktion.

Tipp: Der Krümmungskreis ist die Grenzlage eines Kreises, der die Kurve in drei Punkten schneidet. Verwenden Sie dabei ein weiteres Getriebe $A''M_AM_BB''$ das die Kurve um $-\Delta\phi$ versetzt durchläuft.

Geben Sie zusätzlich möglichst genaue Intervalle für ϕ an, für die der Punkt C augenblicklich Wendepunkte und Scheitelpunkte durchläuft.

Tipp: Messen Sie dafür den Radius des Krümmungskreises. Dieser ist bei den Scheitelpunkten lokal minimal bzw. lokal maximal. Für den Wendepunkt gilt, dass der Krümmungskreis in eine Gerade ausartet und die Kurve "die Seite wechselt". Für die Genauigkeit ist eine Schrittweite von $0,1°$ ausreichend.



4 Lösung

4.1 Krümmungskreiskonstruktion Lösung

Lösung

Der Umkreis von C, C' und C'' schneidet die Kurve in diesen drei Punkten.

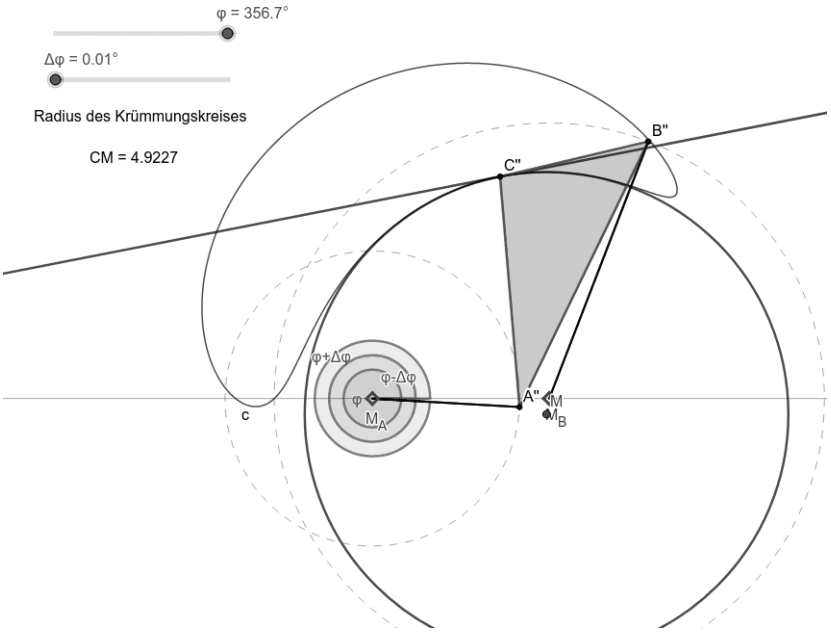
Bei genügend kleinem $\Delta\phi$ kommen sich diese drei Punkte so nahe, dass augenscheinlich kein Unterschied mehr zwischen ihnen besteht.

Der Kreis wird zum Krümmungskreis der Kurve im Kurvenpunkt C.

Die gesuchten Punkte können nur angenähert gefunden werden. Bei einer Schrittweite von $0,1°$ ergibt das:

Die gesuchten Wendepunkte werden für $\phi \in [5,4°; 5.5°]$ und $\phi \in [336,1°; 336,3°]$ durchlaufen.

Bei $\phi \in [14,3°; 14,5°]$, $\phi \in [143,4°; 144,3°]$, $\phi \in [307,8°; 308,2°]$ und bei $\phi \in [356,4°; 356,7°]$ werden die vier gesuchten Scheitelpunkte durchlaufen.


φ = 356.7°
Δφ = 0.01°
Radius des Krümmungskreises
CM = 4.9227
B"
C"
φ+Δφ
φ-Δφ
φ
A"
M
M_A
M_B
c

Rollkurven

TTrnka

31.05.2019

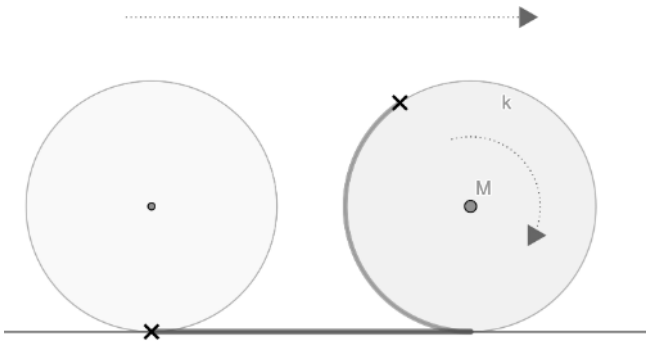
Zusammenfassung

Interaktive Erkundungstour durch Kreisrollungen.

Inhaltsverzeichnis

1 Der Kreis rollt gerade

1.1 Ein Kreis rollt entlang einer Geraden



Was bedeutet es, wenn ein Kreis entlang einer Geraden rollt?

Der Kreis und die Gerade haben einen Punkt gemeinsam, in dem sie sich berühren.
Bei der *Rollung* überlappen sich zwei Bewegungen:

- die Kreisebene dreht sich um den Kreismittelpunkt
- der Kreis schiebt sich in eine Richtung parallel zur Geraden

Wichtig: Die überstrichenen Längen sind gleich groß, sonst wäre es keine Kreis*rollung*.

1.2 Die Rollkurve

Welche Bahnen überstreichen die Punkte der rollenden Kreisebene?

Bei einer Kreisrollung bewegt sich die gesamte Kreisebene.

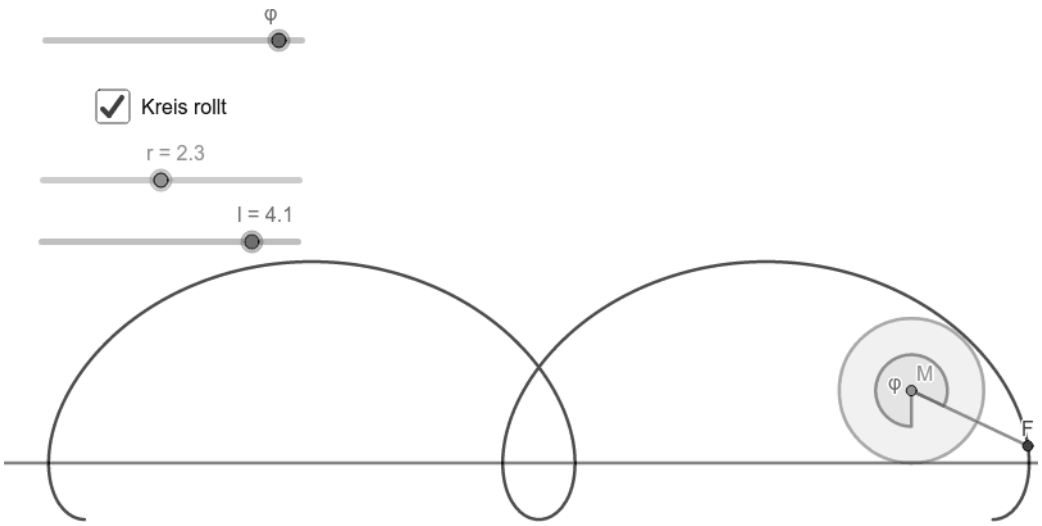
Folglich überstreichen alle Punkte dieser Ebene eine Bahnkurve.

Diese nennt man Rollkurve oder auch Zykloide.

Die folgende Bahnkurve ist interaktiv veränderbar.

l...Abstand des Punktes F zum Mittelpunkt M des Kreises

r...Radius des Kreises



2 Der Kreis rollt rundherum

2.1 Kreis auf Kreis

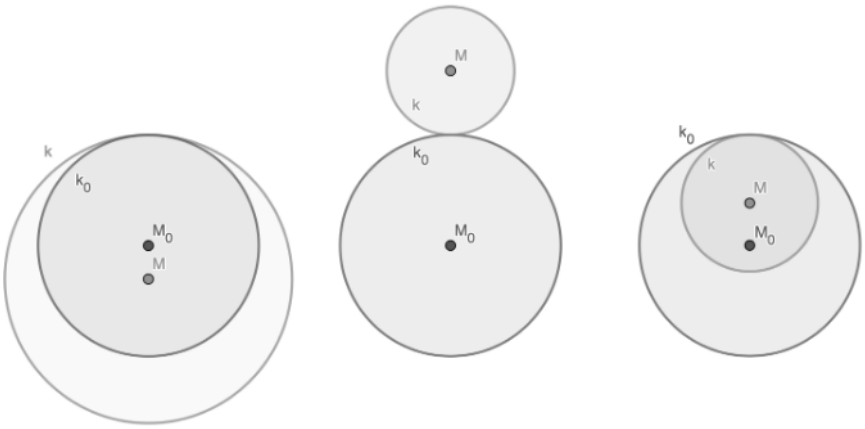
Ein rollender Kreis kann sich auf verschiedenen Kurven fortbewegen.

So kann ein Kreis auch auf einem anderen Kreis rollen.

k...rollender Kreis

k_0...stillstehender Kreis

In den ersten beiden Bilden rollt der orange Kreis außen, im dritten Bild rollt er innen.



Es gibt unterschiedliche Rollkurven, je nach Situation

Hier rollt der kleine Kreis innen am großen Kreis.

2.2 Kreis rollt außen - Epitrochoide I

Die Mittelpunkte der Kreise sind auf verschiedenen Seiten des Berührpunktes.

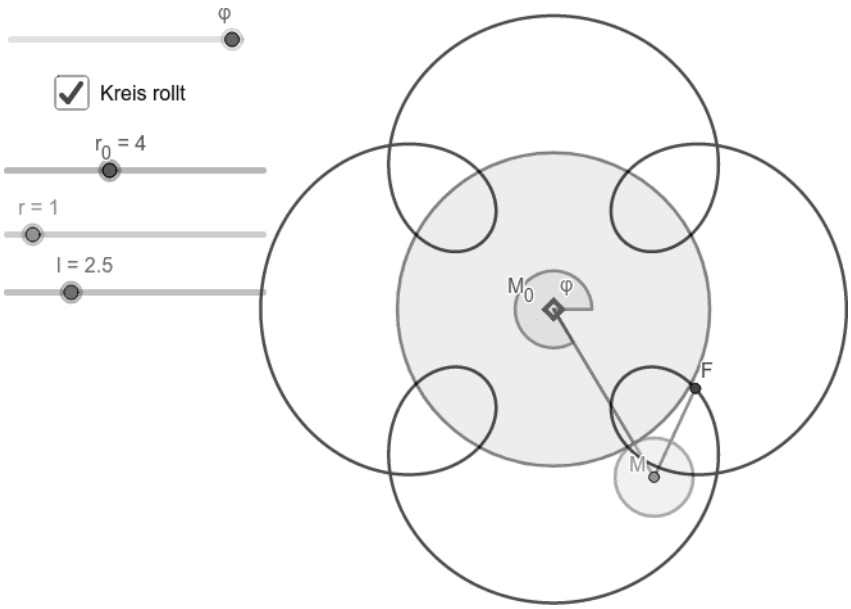
Die Rollkurve, die F überstreicht, heißt Epitrochoide I.

r_0... Radius des stillstehenden Kreises

r... Radius des rollenden Kreises

l... Abstand des Punktes F vom Mittelpunkt des rollenden Kreises

ϕ... Winkel, um den der Kreis rollt



2.3 Kreis rollt außen - Epitrochoide II

Die Mittelpunkte der Kreise sind auf gleichen Seiten des Berührpunktes.

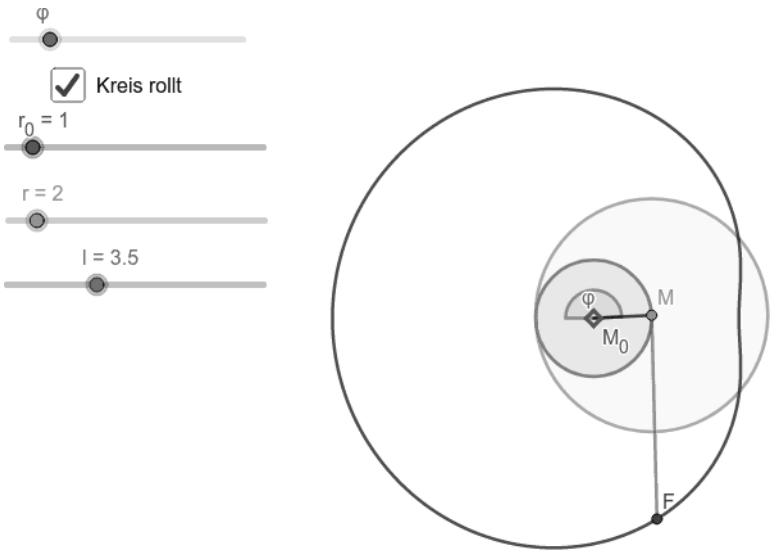
Die Bahnkurve von F nennt man Epitrochoide II.

r_0... Radius des stillstehenden Kreises

r... Radius des rollenden Kreises

l... Abstand des Punktes F vom Mittelpunkt des rollenden Kreises

ϕ... Winkel, um den der Kreis rollt

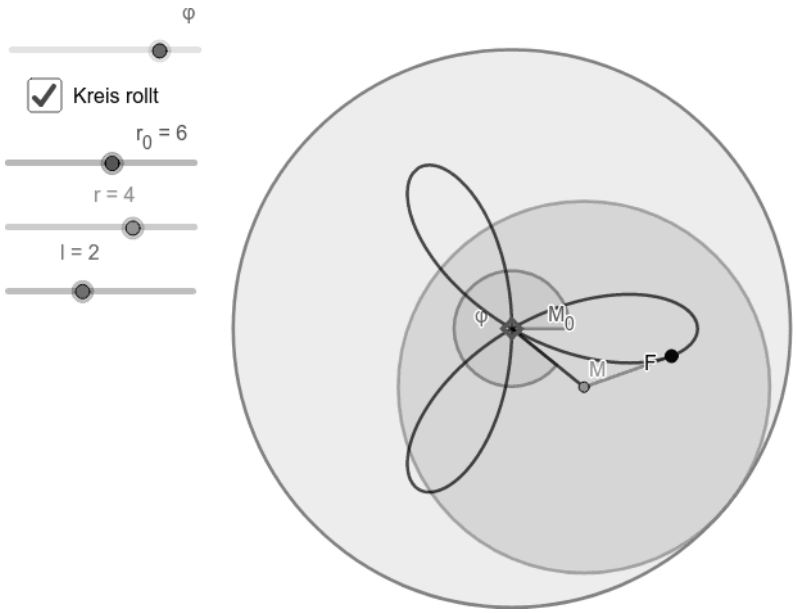


2.4 Kreis rollt innen - Hypotrochoide

Die überstrichene Bahnkurve von F nennt man Hypotrochoide.

r_0... Radius des stillstehenden Kreises

r... Radius des rollenden Kreises

l... Abstand von F zum Mittelpunkt des rollenden Kreises

ϕ... Winkel, um den der Kreis rollt