

Über isotrope Geradenkongruenzen

Boris Odehnal (Wien)

Abstract: In der vorliegenden Note werden integralfreie und rationale Parametrisierungen isotroper Geradenkongruenzen konstruiert. Dabei erweist sich die sphärisch kinematische Abbildung der Geraden des euklidischen Dreiraumes zur Konstruktion von Parametrisierungen als nützlich. Bekannte Resultate gestatten so eine neue Betrachtung, aber auch neue Resultate können angegeben werden.

Keywords: line geometry, congruences of lines, isotropic congruences of lines, minimal surfaces, rational parametrization, kinematic mapping.

1 Einleitung und Motivation

Geradenkongruenzen oder kurz Kongruenzen sind zwei-parametrische Familien von Geraden. Das Studium der Kongruenzen ist durch deren häufiges Auftreten in der Kinematik [15, 20, 27], aber auch durch deren Vorkommen in der Optik [3, 20] gerechtfertigt.

Was aber zeichnet die isotropen Geradenkongruenzen anderen gegenüber aus? Zum einen ist ihr Zusammenhang mit den Minimalflächen des drei-dimensionalen euklidischen Raumes bemerkenswert: Die Einhüllende der Symmetrieebenen der Geraden einer isotropen Kongruenz ist eine Minimalfläche [1, 9, 21, 23]. Andererseits können unter gewissen Voraussetzungen isotrope Geradenkongruenzen als liniengeometrische Analoga zu den Minimalflächen des euklidischen und des elliptischen Dreiraumes gesehen werden [16, 18, 19]. Der Begriff der inhaltsminimierenden Kongruenzen ist auch Gegenstand neuerer Untersuchungen [4] und dürfte dies aufgrund vieler offener Fragen auch weiter noch bleiben.

Ein weiterer Reiz der isotropen Geradenkongruenzen ist deren Verbindung zu den holomorphen Funktionen [2, 12, 19, 18]. Beim Studium der vier-dimensionalen Geradenmannigfaltigkeit drei-dimensionaler Räume und speziell beim Studium von Geradenkongruenzen, erweisen sich neben der Kleinschen Abbildung der Geraden auf Punkte einer vier-dimensionalen Fläche [5, 20, 27] auch kinematische Abbildungen [1, 12, 13, 17, 20] als nützlich. Die ungeheure Vielfalt der Behandlungsmethoden und Ergebnisse rechtfertigen die Untersuchungen der Geradenkongruenzen abermals.

Im Folgenden werden die Grundlagen der Liniengeometrie euklidischer Räume so weit dargestellt, wie dies zur differentialgeometrischen Behandlung der Geradenkongruenzen für unsere Absichten erforderlich ist, siehe Abschnitt 2. Neben der Darstellung der Geraden in der üblichen Weise - bestimmt durch Punkt und Richtungsvektor - wird die infinitesimale sphärisch kinematische Abbildung in Abschnitt 3 vorgestellt. Mit Hilfe dieser Abbildung gelingt es, isotrope Geradenkongruenzen integralfrei und sogar rational zu parametrisieren, wie dies in Abschnitt

4 ausgeführt wird. Ein weiterer Vorteil dieses Modells ist die Unabhängigkeit von der an sich willkürlichen Leitfläche. Im Anschluß daran widmet sich Abschnitt 5 bekannten und neuen Ergebnissen, die sich bei den hier angewandten Methoden ergeben. Abschnitt 6 versucht mit ein paar einfachen Beispielen die Ausführungen abzurunden.

2 Differentialgeometrische Behandlung der Geradenkongruenzen des euklidischen Dreiraumes

2.1 Fundamentalformen

Wir nehmen im Folgenden an, eine Gerade G des euklidischen Dreiraumes \mathbb{R}^3 sei durch einen ihrer Punkte a und einen normierten Richtungsvektor $g \in \mathbb{R}^3$, $\|g\| = 1$ bestimmt. Die Gerade G gestattet dann als Punktmenge die Parametrisierung $G = a + u^3 g$, wobei $u^3 \in \mathbb{R}$ gilt.

Zur Beschreibung der Geraden einer zwei-parametrischen Familie K von Geraden nehmen wir nun an, daß die Aufpunkte a in einer *Leitfläche* $a = a(u^1, u^2) : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ variieren. Wir nehmen ferner an, daß $g = g(u^1, u^2) : D \rightarrow S^2$ ein Stück der euklidischen Einheitssphäre S^2 beschreibt; g heißt *Richtungsfeld* und $g(D)$ heißt *sphärisches Bild* von K . Damit gestatten die Geraden der Kongruenz K die Darstellung

$$G(u^1, u^2; u^3) = a(u^1, u^2) + u^3 g(u^1, u^2). \quad (1)$$

Wir setzen voraus, daß a und g als hinreichend oft stetig differenzierbar sind.

Die differentialgeometrische Behandlung von Geradenkongruenzen stützt sich üblicherweise auf folgende, auf KUMMER [10] zurückgehende quadratische Differentialformen:

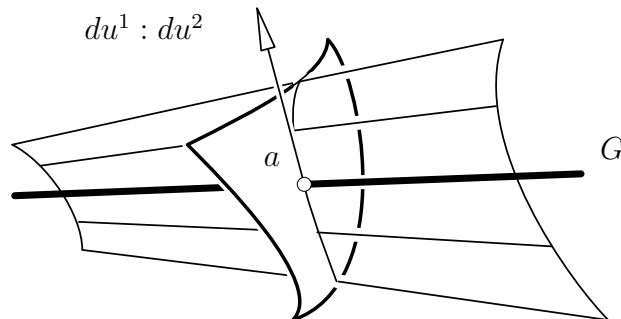
$$I = \langle dg, dg \rangle = g_{ij} du^i du^j \quad \text{und} \quad II = -\langle da, dg \rangle = \gamma_{ij} du^i du^j, \quad (2)$$

wobei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ für das kanonische Skalarprodukt steht. Die Form I ist symmetrisch und im wesentlichen die Metrik des sphärischen Bildes von K .

Die zweite Grundform ist im allgemeinen nicht symmetrisch und wird häufig auch *Striktionsform* genannt [6, 8]: Betrachtet man etwa die Kongruenzgerade $G(u_0^1, u_0^2)$ und alle Regelflächen (ein-parametrische Geradenfamilien), die K angehören, G enthalten und in *Richtung* $du^1 : du^2$ fortschreiten, siehe Abbildung 1, so liefert der Quotient

$$u_S^3 = \frac{II}{I} \quad (3)$$

die u^3 -Koordinate des *Striktionspunktes* auf G . Diese Flächen haben nicht nur den Striktionspunkt gemein, sondern stimmen längs der Erzeugenden G von erster Ordnung überein [6, 20].

Abbildung 1: Eine Kongruenzregelfläche in Richtung $du^1 : du^2$.**Bemerkung.**

Neben den Fundamentalformen (2) finden auch noch andere quadratische Differentialformen bei der Behandlung der Geradenkongruenzen Verwendung, wie zum Beispiel die Drallform $\text{III} = \det(da, g, dg)$ [8]. Sie liefert den Drall oder Verteilungsparameter aller Regelflächen durch G in Richtung $du^1 : du^2$. In [24] wird die Form $\det(da, dR, g)$ als dritte Grundform eingeführt. Hierin ist R die Mitteneinhüllende der Kongruenz K . Damit erzielte Resultate sind in [25] angeführt. In [8] werden alle zweiten Fundamentalformen einer Geradenkongruenz unter Zuhilfenahme einer WEINGARTEN-Abbildung für Kongruenzen ermittelt. \diamond

Läßt man nun für eine feste Gerade $G \subset K$ die Richtung $du^1 : du^2$ variieren, so wandert der im allgemeinen eindeutig bestimmte Striktionspunkt auf G . Für die sogenannten *Hauptrichtungen* $du_E^1 : du_E^2$ nimmt (3) ein Extremum an und der Striktionspunkt erreicht eine Grenzlage.

Die Hauptrichtungen ergeben sich somit als die Eigenvektoren der symmetrischen 2×2 -Matrix $\mu := \bar{\gamma}g^{-1}$, wobei $\bar{\gamma} = (\gamma + \gamma^T)/2$ die symmetrisierte Koeffizientenmatrix der Striktionsform ist. Die u^3 -Koordinaten der beiden (stets reellen) *Grenzpunkte* E_i sind die Eigenwerte von μ .

Den Mittelpunkt der Strecke $\overline{E_1 E_2}$ nennt man den *Mittelpunkt der Kongruenzgeraden* G .

2.2 Mit einer Kongruenz verbundene Flächen

Mit Geradenkongruenzen sind in natürlicher Weise verschiedenen Flächen verbunden. So heißt die von den Mittelpunkten gebildete Fläche M *Mittenfläche*. Sie soll im folgenden als Leitfläche der Kongruenz K dienen.

Unter der *Symmetrieebene* einer Kongruenzgeraden versteht man die Symmetrieebene der Strecke zwischen den Grenzpunkten E_1 und E_2 . Die Symmetrieebene steht daher im Mittelpunkt von G senkrecht auf G . Die zwei-parametrische Mannigfaltigkeit von Symmetrieebenen der Geraden einer Kongruenz hüllt folglich im allgemeinen eine Fläche ein. Diese heißt *Mitteneinhüllende*.

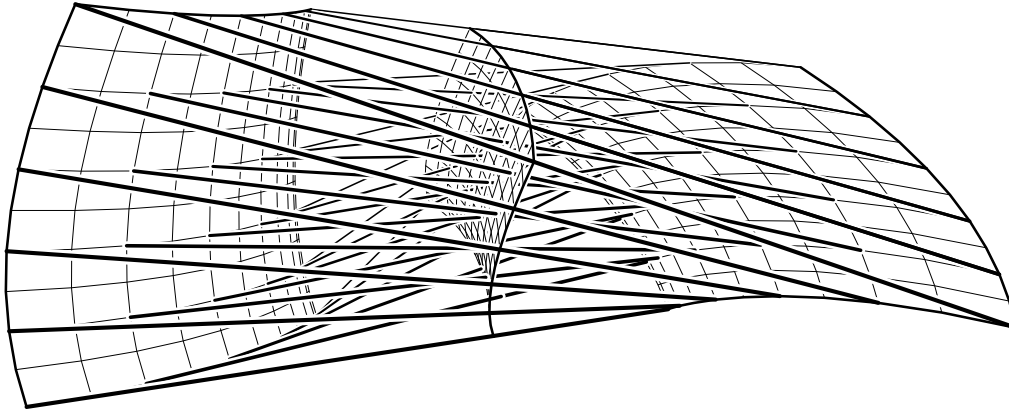


Abbildung 2: Brennflächen einer Geradenkongruenz.

Faßt man die Darstellung (1) der Geraden einer Kongruenz als Menge ihrer Punkte auf, so liegt eine Abbildung $D \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ vor. Die Menge der singulären Punkte dieser Abbildung heißt *Brennfläche* und kann durch

$$F = \det(G_{,1}, G_{,2}, G_{,3}) = 0 \quad (4)$$

gekennzeichnet werden. Hierin steht $_{,j}$ abkürzend für $\frac{\partial}{\partial u^j}$. F heißt *Fokalpolynom*. Für ein bestimmtes Paar $(u^1, u^2) \in D$ ist F ein in u^3 quadratisches Polynom, das für eine reguläre Parametrisierung von g nicht identisch verschwinden kann. Es besitzt daher zwei getrennte reelle Lösungen, eine reelle Doppellösung oder ein Paar konjugiert komplexer Lösungen. Demnach existieren auf jeder Kongruenzgeraden G zwei getrennte reelle *Brennpunkte*, ein reeller Brennpunkt oder ein Paar konjugiert komplexer Brennpunkte.

Die Brennpunkte aller Geraden in G bilden die Brennfläche, die von den Geraden der Kongruenz berührt wird. Diese kann den obigen Ausführungen zufolge aus einem reellen oder konjugiert komplexen Flächenpaar bestehen. Man spricht auch von den beiden *Mänteln* der Brennfläche. Die beiden Mäntel können zusammenfallen. Auch die Ausartung eines oder beider Mäntel zu Kurven oder gar einem Punkt ist möglich. Abbildung 2 zeigt ein paar Geraden einer Kongruenz, ein Stück der Leitfläche und Teile der beiden Mäntel der Brennfläche.

2.3 Spezielle Kongruenzen

Spezielle Geradenkongruenzen können anhand der Striktionsform erkannt werden. So bestehen Kongruenzen mit in ganz D symmetrischer Striktionsform, also bei $\gamma = \gamma^T$, aus den Normalen einer ein-parametrischen Schar von C^1 -Flächen. Man spricht diese Kongruenzen als *Normalenkongruenzen* an. Die ein-parametrische Flächenschar ist eine Schar von *Parallelfächern* [6, 20].

Ist die symmetrisierte Striktionsform $\bar{\gamma}_{ij} du^i du^j$ im ganzen Definitionsbereich D proportional zur ersten Fundamentalform, so gibt es keine Hauptrichtungen $du_E^1 : du_E^2$ und die Kongruenz heißt *isotrop*.

Wählt man in (1) als Leitfläche die Mittenfläche, dann können isotrope Geradenkongruenzen

durch

$$\gamma_{11} = \gamma_{22} = 0 \quad \text{und} \quad \gamma_{12} + \gamma_{21} = 0 \quad (5)$$

gekennzeichnet werden.

3 Die sphärisch kinematische Abbildung

Die Darstellung (1) benützt eine Leitfläche der Kongruenz. Als Leitfläche ist jede Fläche geeignet, die die Geraden der Kongruenz in genau einem Punkt schneidet. Das ist lokal stets möglich. Da aber die Wahl der Leitfläche keinen Einfluß auf die Geraden der Kongruenz und damit auf die Kongruenz insgesamt hat, soll im Folgenden eine Darstellung der Kongruenz, die unabhängig von der Leitfläche ist, vorgenommen werden.

Wir folgen einem Konzept von STUDY [26], welches auf vielfältige Weise genutzt werden kann [1, 13, 20, 27].

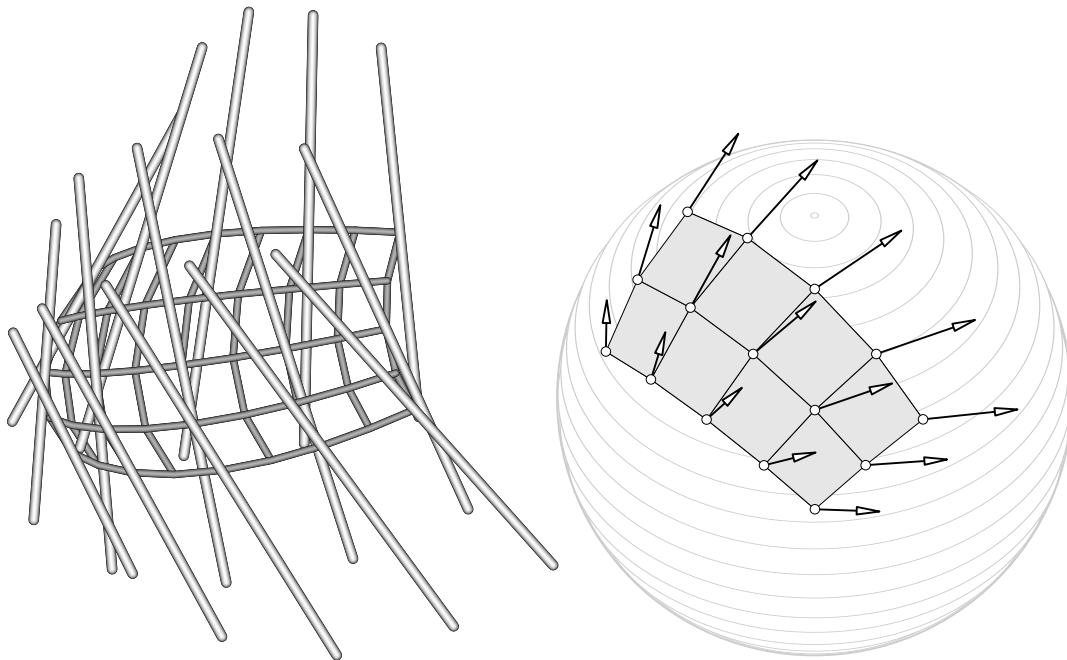


Abbildung 3: Geraden einer Kongruenz und ihre sphärisch kinematischen Bilder.

Wir ordnen jeder Geraden $G = a + u^3 g$ des euklidischen \mathbb{R}^3 *normierte Plücker-Koordinaten* (g, \bar{g}) zu. Darin ist $\bar{g} := a \times g$, wobei a ein beliebiger Punkt auf G ist. Der Vektor \bar{g} heißt *Momentenvektor von G* . Er ist ganz offensichtlich unabhängig von der Wahl des Aufpunktes a , denn mit $a' = a + tg$ ($t \in \mathbb{R}$) gilt $a' \times g = a \times g = \bar{g}$. Wegen $\langle g, \bar{g} \rangle = \det(g, a, g) = 0$ ist der Richtungsvektor g stets orthogonal zum Momentenvektor \bar{g} .

Damit haben wir uns von der an sich willkürlich gewählten Leitfläche befreit. Da nun Richtungs- und Momentenvektor einer Geraden G orthogonal sind und g ein Punkt der euklidischen Einheitssphäre S^2 ist, kann das Paar (g, \bar{g}) als ein *Paar bestehend aus einem Punkt auf S^2 und*

seinem Geschwindigkeitsvektor angesehen werden. Die Abbildung $\sigma : G \mapsto (g, \bar{g})$ wird daher auch *infinitesimale sphärisch kinematische Abbildung* genannt [13].

Abbildung 3 zeigt ein paar Geraden einer Kongruenz K und deren sphärisch kinematische Bilder.

Bemerkung.

Durchaus gebräuchlich ist auch die Einführung dualer Einheitsvektoren [1, 18, 20, 26, 27]. Man erklärt dabei $\hat{g} = g + \epsilon \bar{g}$, wobei $\epsilon^2 = 0$ gilt. Die euklidische Liniengeometrie wird damit zur Geometrie der *dual erweiterten* oder *dualen Einheitskugel* $S^2(\mathbb{D})$ in \mathbb{D}^3 , dem drei-dimensionalen Modul über dem kommutativen Ring der *Dualzahlen*. Bewegungen des \mathbb{R}^3 entsprechen den dualen sphärischen Bewegungen und Geradenkongruenzen bestimmten zwei-dimensionalen Teilmannigfaltigkeiten von $S^2(\mathbb{D})$. \diamond

4 Rationale Parametrisierungen

Die rationalen Parametrisierungen von Kongruenzen sind bislang kaum ein Anliegen gewesen. Da aber konkrete Probleme auch konkrete und praktikable Beschreibung erfordern, soll dieser Aspekt keineswegs außer acht gelassen werden. Im Hinblick auf etwaige Anwendungen können rationale Parameterdarstellungen isotroper und nicht isotroper Geradenkongruenzen angegeben und in rationale Bézier-Darstellungen [7] umgewandelt werden [16].

Die von bestimmten Geradenkongruenzen induzierte infinitesimale sphärisch kinematische Abbildung war Gegenstand der Untersuchungen in [13]. Insbesondere wurde gezeigt, daß isotrope Geradenkongruenzen *infinitesimal konforme* Abbildungen induzieren. Nimmt man also an, das sphärische Bild g von K sei isotherm parametrisiert, dann gilt für den Momentenvektor jeder Kongruenzgeraden G

$$\bar{g} = \lambda^1 g_{,1} + \lambda^2 g_{,2}. \quad (6)$$

Hierin ist $g_{,j} = \frac{\partial g}{\partial u^j}$ ($j = 1, 2$) die Tangentialbasis von S^2 in g und λ^1 und λ^2 Real- und Imaginärteil einer holomorphen Funktion

$$\lambda(u^1, u^2) = \lambda^1(u^1, u^2) + i\lambda^2(u^1, u^2), \quad (7)$$

die auf $D \subset \mathbb{R}^2$ definiert ist und von der komplexen Variablen $u = u^1 + iu^2$ abhängt. Für λ^i gelten die Cauchy-Riemannschen Gleichungen

$$\lambda_{,1}^1 = \lambda_{,2}^2 \quad \text{und} \quad \lambda_{,2}^1 = -\lambda_{,1}^2. \quad (8)$$

Nun gilt:

Satz 4.1

Jede isotrope Geradenkongruenz gestattet eine Parametrisierung der Gestalt

$$G(u^1, u^2; u^3) = \lambda^1 g_{,2} - \lambda^2 g_{,1} + u^3 g, \quad (9)$$

wobei g eine isotherme Parametrisierung von S^2 ist und λ^i den Gleichungen (8) genügen. Umgekehrt ist jede Kongruenz eine isotrope, wenn sie eine solche Parametrisierung zuläßt.

Beweis. Es ist nur die Richtigkeit der in (9) angegebenen Darstellung der Leitfläche nachzuweisen. Die Fläche der Fußpunkte ist durch $g \times \bar{g}$ parametrisiert. Aufgrund der isothermen Parametrisierung von g gilt zum einen $\langle dg, dg \rangle = \varphi^2 \delta_{ij} du^i du^j$ und zum anderen $g_{,1} \times g_{,2} = \varphi^2 g$. Mit (6) gilt nun $g \times \bar{g} = \varphi^{-2} (g_{,1} \times g_{,2}) \times (\lambda^1 g_{,1} + \lambda^2 g_{,2}) = \lambda^1 g_{,2} - \lambda^2 g_{,1}$.

Für die Umkehrung genügt es, den Momentenvektor \bar{g} aus der Darstellung (9) zu berechnen. \square

In [9] wurden Geradenkongruenzen ebenfalls mit Hilfe harmonischer Funktionen erzeugt. Die dort angegebenen Darstellungen stützen sich auf trigonometrische Funktionen und sind keineswegs frei von Integralen.

Um zu rationalen Parametrisierungen isotroper Geradenkongruenzen zu gelangen, wählen wir für das Richtungsvektorfeld der Geradenkongruenz

$$g = [2u^1, 2u^2, 1 - (u^1)^2 - (u^2)^2]^T / N, \quad (10)$$

wobei $N = 1 + (u^1)^2 + (u^2)^2$ ist. Jede andere rationale und isotherme Parametrisierung von S^2 ist ebenso geeignet, hingegen ist (10) vom Grad 2 in u^1 und u^2 und liefert somit Darstellungen von relativ niedrigem algebraischen Grad.

5 Eigenschaften

Mit (9) und (10) ist die Rationalität der Mittenfläche und der Mitteneinhüllenden nicht verwunderlich. Es gilt sogar:

Satz 5.1

Die Brennflächen einer rationalen isotropen Geradenkongruenz gestatten rationale Parametrisierungen.

Beweis. Wir berechnen die Mittenfläche der Kongruenz indem wir mit (9) und (10) das Fokalpolynom (4) bestimmen und erhalten nach dem Satz von Vietá den Koeffizienten des linearen Gliedes als u^3 -Koordinate der Mittelpunkte der Kongruenzgeraden. Es gilt daher für die Mittenfläche

$$M = \lambda^1 g_{,2} - \lambda^2 g_{,1} + (\lambda_{,1}^2 - \lambda^1 \varphi_{,2} \varphi^{-1} + \lambda^2 \varphi_{,1} \varphi^{-1}) g, \quad (11)$$

mit $\varphi = 2/N$. Wählt man diese nun als Leitfläche der Kongruenz K , so vereinfacht sich das Fokalpolynom (4) zu

$$F = (u^3)^2 \varphi^2 + \mu^2 \varphi^{-2}, \quad (12)$$

wobei abkürzend $\mu = \lambda^2_2\varphi^2 + \lambda^1\varphi_{,1}\varphi + \lambda^2\varphi_{,2}\varphi$ steht. Daher sind die Brennflächen durch

$$B_1 = M + i\mu\varphi^{-2}g \quad \text{und} \quad B_2 = \overline{B_1} \quad (13)$$

gegeben. Da alle in (13) auftretenden Funktionen und Vektorfunktionen rational sind, sind es die Parametrisierungen der beiden Mäntel der Brennfläche auch. \square

Bemerkung.

Die beiden Mäntel (13) der Brennfläche von K sind ein Paar konjugiert komplexer Flächen, wie dies für isotrope Geradenkongruenzen allgemein der Fall ist. \diamond

Nach Ribaucour [21] können aus einer isotropen Geradenkongruenz K weitere konstruiert werden. Sind M die Mittenfläche und g das Richtungsfeld einer isotropen Geradenkongruenz K und ist $v \in \mathbb{R}^3$ ein konstanter Vektor, so sind mit

$$G' = M + v \times g + u^3g, \quad (14)$$

die Geraden einer weiteren isotropen Geradenkongruenz K' parametrisiert. Die erzeugende Funktion λ' von K' berechnet sich aus λ und v durch

$$\lambda^{1'} = \lambda^1 - \langle v, g_{,1} \rangle \varphi^{-2} \quad \text{und} \quad \lambda^{2'} = \lambda^2 - \langle v, g_{,2} \rangle \varphi^{-2}. \quad (15)$$

Für K' aus (17) sind neben der Mittenfläche und der Mitteneinhüllenden nach Satz 5.1 die Brennflächen ebenfalls rational parametrisiert.

Wie in [1] gezeigt wurde, handelt es sich bei den Brennflächen isotroper Kongruenzen um Paare konjugiert komplexer Torsen B_1 und $B_2 = \overline{B_1}$. Mit Satz 5.1 gilt:

Satz 5.2

Die Brennflächen rationaler isotroper Geradenkongruenzen sind ein Paar rationaler konjugiert komplexer Torsen. Ihre Gratlinien sind ein Paar konjugiert komplexer isotroper Kurven.

Bemerkung.

Das Wort *isotrop* erscheint in dieser Arbeit mit zwei Bedeutungen. Zum einen heißen Geradenkongruenzen isotrop, wenn es in ihnen keine Hauptrichtungen gibt. Andererseits wird eine Kurve, die konstante Steigung i oder $-i$ hat, auch als isotrop bezeichnet. \diamond

Nach [1] gestatten die Gratlinien r_1 und r_2 die Darstellung

$$r_1 = M + i\mu g + i(\mu_{,1} + \mu_{,2})\varphi^{-2}(g_{,1} - ig_{,2}) \quad \text{und} \quad r_2 = \overline{r_1}. \quad (16)$$

Die Mitteneinhüllende R von K ist nach [21] eine Minimalfläche. Eine Parametrisierung von R liegt nach [1] mit

$$R = M - \mu_{,2}\varphi^{-2}g_{,1} + \mu_{,1}\varphi^{-2}g_{,2} \quad (17)$$

vor und gestattet nach [18] auch die Darstellung

$$R = \zeta g + \zeta_{,1} \varphi^{-2} g_{,1} + \zeta_{,2} \varphi^{-2} g_{,2}. \quad (18)$$

Daß es sich hierbei um eine Minimalfläche handelt, liegt auf der Hand. Nach S. LIE können *Minimalflächen als Schiebflächen eines Paares konjugiert komplexer isotroper Kurven* erzeugt werden. Hier dienen r_1 und r_2 als Schiebkurven, denn es gilt $2R = r_1 + r_2$. R ist für beliebige Wahlen rationaler Funktionen λ eine rational parametrisierte Minimalfläche. Umso überraschender gilt daher:

Satz 5.3

Die Mitteneinhüllende R einer rational parametrisierten isotropen Geradenkongruenz ist polynomial parametrisiert, wenn λ ein Polynom ist.

Beweis. Aus (11) und (17) ergibt sich für die Mitteneinhüllende

$$R = \begin{bmatrix} \lambda_{,22}^1 u^1 u^2 + \frac{1}{2} \lambda_{,11}^2 (1 - (u^1)^2 + (u^2)^2) + \lambda_{,1}^2 u^1 + \lambda_{,2}^2 u^2 - \lambda^2 \\ \lambda_{,22}^2 u^1 u^2 + \frac{1}{2} \lambda_{,11}^1 (1 + (u^1)^2 - (u^2)^2) - \lambda_{,1}^1 u^1 - \lambda_{,2}^1 u^2 + \lambda^1 \\ \lambda_{,22}^2 u^1 - \lambda_{,11}^1 u^2 + \lambda_{,1}^2 \end{bmatrix}. \quad (19)$$

Ist $\lambda = \lambda(u^1 + iu^2)$ ein Polynom, dann sind es Real- und Imaginärteil λ^1 und λ^2 ebenfalls. Das gilt auch für deren partielle Ableitungen beliebiger Ordnung. \square

Auch für nicht rational parametrisierte isotrope Geradenkongruenzen ist der folgende Satz leicht zu beweisen:

Satz 5.4

Die Geradenbündel sind die einzigen isotropen Geradenkongruenzen, die gleichzeitig Normalkongruenzen sind.

Für den Beweis dieses Satzes sei auf die Beispiele im nächsten Abschnitt verwiesen.

6 Beispiele

In diesem Abschnitt sollen ein paar einfache Beispiele die Sachverhalte verdeutlichen. Wir nehmen an, $\lambda : D \rightarrow \mathbb{C}$ sei eine Polynomfunktion

$$\lambda(u) = \sum_{i=0}^N A_i u^i, \quad u = u^1 + iu^2, \quad (A_0, \dots, A_N) \in \mathbb{C}^{N+1} \setminus (0, \dots, 0). \quad (20)$$

Wählt man $A_2 = -(c + ia/2)$, $A_1 = ib$ und $A_0 = \overline{A_2}$ und $A_i = 0$ für $i \geq 3$, wobei $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ gilt, so erhält man genau die Geradenbündel, wie in Satz 5.4 beschrieben. Der Bündelscheitel, der in diesem Falle die Rolle der Brennfläche, der Mittenfläche und der Mitteneinhüllenden übernimmt, hat die Koordinaten $[-a, -2c, -b]^T$.

Bemerkung.

Die Geradenbündel sind die einzigen isotropen Geradenkongruenzen, deren Brennflächen reell sind. \diamond

Sind A_0, A_1 und A_2 reell und nicht gleichzeitig Null, hingegen aber $A_i = 0$ für $i \geq 3$, so sind die Brennflächen von K konjugiert komplexe isotrope Drehkegel mit den Spitzen

$$S_1 = [i(A_0 - A_2), A_0 + A_2, iA_1]^T \quad \text{und} \quad S_2 = \overline{S_1}. \quad (21)$$

Bemerkung.

Die Erzeugenden der hier auftretenden isotropen Drehkegel weisen einen Anstieg von i beziehungsweise $-i$ auf. \diamond

In diesem Falle ist die Mitteneinhüllende die Ebene mit der Gleichung

$$(A_2 - A_0)x_1 + A_1x_3 = 0, \quad (22)$$

welche man durchaus zu den Minimalflächen zählen kann.

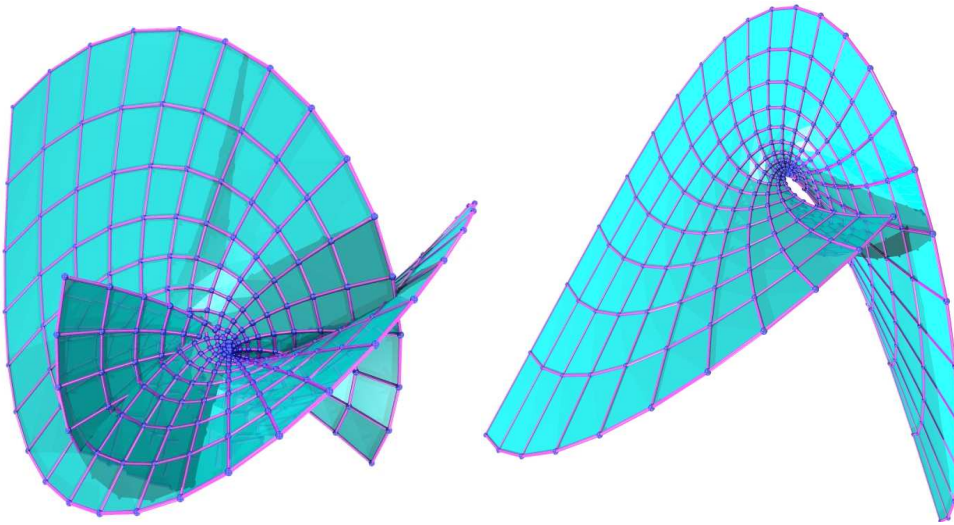


Abbildung 4: Zwei Stücke der Mitteneinhüllenden der durch $\lambda(u) = u^4 - 3u^2$ definierten isotropen Geradenkongruenz.

Ist in (20) mindestens ein A_i , für $i \geq 3$ nicht Null, so erhält man als Mitteneinhüllende nicht triviale Minimalflächen. Es handelt sich hierbei um verallgemeinerte Enneperflächen [14]. Abbildung 4 zeigt eine solche für $\lambda(u) = u^4 - 3u^2$.

Literatur

- [1] BLASCHKE, W.: *Vorlesungen über Differentialgeometrie I*. Springer Verlag, Berlin, 1921.
- [2] BLASCHKE, W.: *Kinematik und Quaternionen*. VEB Verlag Deutscher Wissenschaften, Berlin, 1960.
- [3] CARATHÉODORY, C.: *Geometrische Optik*. *Ergeb. d. Math. und ihrer Grenzgeb.*, IV/5, Springer Verlag, Berlin 1937.
- [4] HAMANN, M.: *Zur Differentialgeometrie zwei-parametrischer Geradenmengen im Kleinschen Bild*. Diss., TU Dresden, 2005.
- [5] HLAVATÝ, V.: *Differentielle Liniengeometrie*. P. Noordhoff, Groningen, 1945.
- [6] HOSCHEK, J.: *Liniengeometrie*. Bibliographisches Institut, Zürich, 1971.
- [7] HOSCHEK, J. & LASSER, D.: *Grundlagen der geometrischen Datenverarbeitung*. B. G. Teubner, Stuttgart, 1992.
- [8] KOCH, R.: *Zur Geometrie der zweiten Grundform der Geradenkongruenzen des E^3* . Verhandelingen Koninkl. Acad. Wetenschappen, Letteren an Schone Kunsten van België. **162**, 1981.
- [9] KOCH, R.: *Über die Mittelfläche einer isotropen Geradenkongruenz*. *J. Geom.* **23** (1984), 152–169.
- [10] KUMMER, E.E.: *Allgemeine Theorie der gradlinigen Strahlensysteme*. *J. Reine Angew. Math.* **57** (1860), 189–230.
- [11] LIE, S.: *Beiträge zur Theorie der Minimalflächen*. *Math. Ann.* **14** (1879), 331.
- [12] MÜLLER, H.R.: *Sphärische Kinematik*. VEB Verlag Deutscher Wissenschaften, Berlin, 1962.
- [13] MÜLLER, H.R.: *Über eine infinitesimale kinematische Abbildung*. *Mh. Math.* **54** (1950), 108–129.
- [14] NITSCHKE, J.C.C.: *Vorlesungen über Minimalflächen*. Springer Verlag, Berlin, 1975.
- [15] ODEHNAL, B. & POTTMANN, H.: *Computing with discrete Models of ruled surfaces and line congruences*. *Electron. J. Comput. Kinematics* **1/1** (2001) §20.
- [16] ODEHNAL, B.: *Geometric Optimization Methods For Line Congruences*. Diss., TU Wien, 2002.
- [17] ODEHNAL, B.: *Zur geometrischen Erzeugung linearer Geradenabbildungen*. *Sb. Akad. Wiss. Wien*, 2004.
- [18] ODEHNAL, B.: *On rational isotropic congruences of lines*. *J. Geom.* **81** (2005), 126–138.

- [19] ODEHNAL, B.: *On isotropic congruences of lines in elliptic three-space*. Math. Pann. **16** (2005), 119–135
- [20] POTTMANN, H. & WALLNER, J.: *Computational Line Geometry*. Springer Verlag, Berlin, 2001.
- [21] RIBAUCCOUR, A.: *Étude des élassoïdes ou surfaces à courbure moyenne nulle*. Mém. Cour. et Mém. Sav. Étr. Acad. Roy. Sci. Belg. Bruxelles **44** (1882), VI+236pp.
- [22] STAMOU, G.: *Über die isotropen Strahlensysteme*. Manuscr. Math. **18** (1976), 15–23.
- [23] STEPHANIDIS, N.K.: *Minimalflächen und Strahlensysteme*. Arch. Math. **41** (1983), 544–554.
- [24] STEPHANIDIS, N.K.: *Über eine invariante Differentialform für Strahlensysteme*. Sb. Akad. Wiss. Wien, **198** (1989), 267–279.
- [25] STEPHANIDIS, N.K.: *Über die III-Hauptflächen eines Strahlensystems*. Sb. Akad. Wiss. Wien, **199** (1990), 53–57.
- [26] STUDY, E.: *Geometrie der Dynamen*. B.G. Teubner, Leipzig, 1903.
- [27] WEISS, E.A.: *Einführung in die Kinematik und Liniengeometrie*, B.G. Teubner, Leipzig, 1937.

Boris Odehnal
Institut für Diskrete Mathematik und Geometrie
Technische Universität Wien
Wiedner Hauptstraße 8-10
A-1040 Wien