

Berechnung zum Kardangelenk

Ein Kardangelenk dient zur Übertragung einer Drehung um eine Achse a auf eine schneidende Achse b . Dabei ist allerdings das Übersetzungsverhältnis nicht konstant.

Der Koordinatenursprung O sei der Schnittpunkt von a und b mit den Richtungsvektoren

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} \sin \gamma \\ -\cos \gamma \\ 0 \end{pmatrix} \text{ bzw. } \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

d.h. der Winkel der Achsen hat das Maß γ .

Die Übertragung der Drehung geschieht durch ein rechtwinkeliges Kreuz mit Mitte im Schnittpunkt der Drehachsen a und b (Koordinatenursprung), wobei ein Schenkel PQ normal zu a steht und sich um a dreht, während sich der andere Schenkel $RS \perp PQ$, der normal auf b steht um b dreht.

In der Ausgangslage sei PQ parallel zur z-Achse. Dann liest man aus Aufriss und Seitenrissen, in denen a bzw. b projizierend erscheinen, ab, dass der zu einem Drehwinkel α um a (Antriebswinkel) gehörige Drehwinkel β um b (Abtriebswinkel) durch

$$\tan \beta = \tan \alpha \cos \gamma$$

bestimmt ist.

Eine zum Antriebswinkel α gehörige Lage P, Q, R, S des Kreuzes erhalten wir folgendermaßen: Durch eine Drehung um die y-Achse durch den Abtriebswinkel β bringen wir die Ausgangslage $P_0Q_0R_0S_0$ in die Lage $P_1Q_1R_1S_1$ und drehen dann das Kreuz um die Gerade $[R_1S_1]$ durch den (noch zu berechnenden) Winkel δ in die Lage $PQRS$.

Im folgenden bezeichne $\mathbf{p}$ den Ortsvektor von P, usf.

δ ist der Winkel zwischen $\mathbf{p}$ und $\mathbf{p}_1$.

$\mathbf{p}$ entsteht aus $\mathbf{p}_0$ durch eine Drehung um die y-Achse durch α und eine anschließende Drehung um die z-Achse durch γ und lautet daher:

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} \sin \alpha \cos \gamma \\ \sin \alpha \sin \gamma \\ \cos \alpha \end{pmatrix}$$

$\mathbf{p}_1$ entsteht aus $\mathbf{p}_0$ durch Drehung um die y-Achse durch β und lautet daher:

$$\mathbf{p}_1 = \begin{pmatrix} \sin \beta \\ 0 \\ \cos \beta \end{pmatrix}$$

Da die Vektoren normiert sind erhalten wir den Winkel δ aus

$$\cos \delta = \begin{pmatrix} \sin \alpha \cos \gamma \\ \sin \alpha \sin \gamma \\ \cos \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sin \beta \\ 0 \\ \cos \beta \end{pmatrix}$$

Einsetzen und Vereinfachung mit Unterstützung eines Computeralgebraprogramms liefert:

$$\delta = \arccos(\sqrt{(\sin^2 \alpha) \cos^2 \gamma + \cos^2 \alpha})$$