

Österreichische Akademie der Wissenschaften

Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse

Sonderdruck aus **Sitzungsberichte**, Abt. II, Mathematische, Physikalische  
und Technische Wissenschaften 203. Band, Jahrgang 1994

3-11

József Szabó, Hellmuth Stachel und  
Hermann Vogel

**Ein Satz über die Zentralaxonometrie**

# Ein Satz über die Zentralaxonometrie<sup>1</sup>

Von

**József Szabó** (Debrecen), **Hellmuth Stachel** (Wien) und  
**Hermann Vogel** (München)

(Vorgelegt in der Sitzung der math.-nat. Klasse am 3. März 1994 durch das  
k. M. I. Stachel)

## 1. Vorbemerkungen

Die Zentralaxonometrie ist eine projektive Verallgemeinerung der klassischen Axonometrie. Ihre Grundlagen wurden von E. Kruppa entwickelt [6]. Weitere Ergebnisse dazu finden sich im Buch von E. Stiefel [9], lehrbuchmäßige Darstellungen z. B. bei F. Hohenberg [5] und H. Brauner [1].

Nach E. Kruppa [7] ist ein zentralaxonometrisches Bild eines Objekts genau dann ein Zentralriß, wenn eine gewisse, durch die zentralaxonometrische Grundfigur bestimmte elliptische Polarität die Antipolarität an einem Kreis ist<sup>2</sup>. Kruppas Beweis benötigt Methoden der projektiven Geometrie. Von L. Drs [3] stammt ein elementarer, aber längerer Beweis. In [9] — und zwar erst ab der zweiten Auflage — gibt es erstmals ein äquivalentes analytisches Kriterium, allerdings nur für den Sonderfall einer Zentralaxonometrie mit einem uneigentlichen Fluchtpunkt. In der Dissertation von J. Szabó [10] ist ein Satz für den allgemeinen Fall enthalten. Eine andere analytische Kennzeichnung bildet den Inhalt von [12].

In der vorliegenden Arbeit wird für den dreidimensionalen Fall eine elementare Charakterisierung der Zentralrisse unter den Zentralaxonometrien mit eigentlichem Fluchtpunktdreieck angegeben. Außerdem wird in elementarer Weise gezeigt, daß jede Zentralaxonometrie perspektiv affin zu einem Zentralriß ist (vgl. [1], S. 136, Fußnote).

---

<sup>1</sup> Unterstützt durch OTKA 1651 in Debrecen und EG-Stipendium 3767 in München.

<sup>2</sup> In [2] ist als Satz 5 die  $n$ -dimensionale Fassung dieses Kriteriums angegeben.

## 2. Das neue Kriterium

Als Vorbereitung auf unsere Überlegungen zeigen wir zunächst den folgenden elementargeometrischen

**Hilfssatz:** *H sei die Spitze einer dreiseitigen Pyramide mit paarweise orthogonalen Kanten und der Basis  $ABC$  (Abb. 1). Seien  $a_0 = \overline{HA}$ ,  $b_0 = \overline{HB}$ ,  $c_0 = \overline{HC}$  die Längen der Mantelkanten und  $\alpha = \sphericalangle CAB$ ,  $\beta = \sphericalangle ABC$ ,  $\gamma = \sphericalangle BCA$  die Innenwinkel im Basisdreieck. Dann gilt*

$$a_0^2 : b_0^2 : c_0^2 = \cot \alpha : \cot \beta : \cot \gamma. \quad (1)$$

**Beweis:** Für die Längen  $a = \overline{BC}$ ,  $b = \overline{AC}$ ,  $c = \overline{AB}$  der Basiskanten gilt

$$a^2 = b_0^2 + c_0^2, \quad b^2 = a_0^2 + c_0^2, \quad c^2 = a_0^2 + b_0^2.$$

Mit dem Kosinussatz für das Dreieck  $ABC$  erhalten wir daraus weiter

$$\begin{aligned} a_0^2 &= \frac{1}{2} (b^2 + c^2 - a^2) = bc \cos \alpha, \\ b_0^2 &= ac \cos \beta, \quad c_0^2 = ab \cos \gamma; \end{aligned} \quad (2)$$

das Spurdreieck  $ABC$  ist somit stets spitzwinkelig. Mit dem Sinussatz folgt schließlich nach Division durch  $abc$

$$a_0^2 : b_0^2 : c_0^2 = \frac{\cos \alpha}{a} : \frac{\cos \beta}{b} : \frac{\cos \gamma}{c} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} : \frac{\cos \beta}{\sin \beta} : \frac{\cos \gamma}{\sin \gamma}.$$

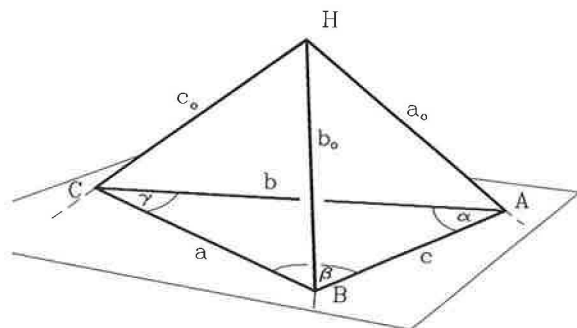


Abb. 1

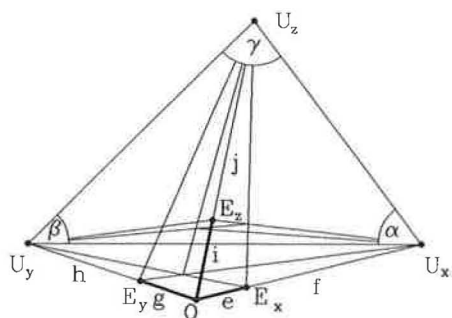


Abb. 2

**Satz 1:** Es seien  $O, E_x, E_y, E_z, U_x, U_y, U_z$  die Bilder des Ursprungs, der Einheitspunkte und der Achsenfernpunkte in einer Zentralaxonometrie. Wir bezeichnen die Winkel des als endlich vorausgesetzten Fluchtpunktdreiecks mit  $\alpha = \sphericalangle U_z U_x U_y$ ,  $\beta = \sphericalangle U_x U_y U_z$ ,  $\gamma = \sphericalangle U_y U_z U_x$ , weiters die Streckenlängen auf den Achsenbildern mit  $e = \overline{OE_x}$ ,  $f = \overline{E_x U_x}$ ,  $g = \overline{OE_y}$ ,  $h = \overline{E_y U_y}$ ,  $i = \overline{OE_z}$ ,  $j = \overline{E_z U_z}$  (vgl. Abb. 2).

Die dadurch bestimmte Zentralaxonometrie ist dann und nur dann ein Zentralriß, wenn gilt

$$\left(\frac{e}{f}\right)^2 : \left(\frac{g}{h}\right)^2 : \left(\frac{i}{j}\right)^2 = \tan \alpha : \tan \beta : \tan \gamma. \quad (3)$$

**Beweis:** Die Bedingung (3) ist notwendig:

Betrachten wir die ein kartesisches Koordinatensystem bestimmenden Urbilder  $\tilde{O}, \tilde{E}_x, \tilde{E}_y, \tilde{E}_z, \tilde{U}_{x\infty}, \tilde{U}_{y\infty}, \tilde{U}_{z\infty}$  im Raum und deren Zentralrisse  $O, E_x, E_y, E_z, U_x, U_y, U_z$ . Es sei  $Z$  das Zentrum der Projektion. Die zu den Koordinatenachsen parallelen Geraden durch  $Z$  schneiden die Bildebene im Dreieck  $U_x U_y U_z$  der Fluchtpunkte. Auf die Pyramide  $Z U_x U_y U_z$  wenden wir nun den obigen Hilfsatz an, setzen  $a_0 = \overline{Z U_x}$ ,  $b_0 = \overline{Z U_y}$ ,  $c_0 = \overline{Z U_z}$  und erhalten

$$a_0^2 : b_0^2 : c_0^2 = \cot \alpha : \cot \beta : \cot \gamma.$$

Wir sehen diese Kantenlänge unverkürzt, wenn wir die Mantel Ebenen dieser Pyramide in die Bildebene drehen (Abb. 3).  $(Z)$  bzw.  $((Z))$  seien Drehlagen von  $Z$  bei Drehung um die Spurgeraden  $U_x U_z$  bzw.  $U_x U_y$ .



$$\frac{e}{f} = \frac{\overline{E_x O}}{\overline{E_x U_x}} = \frac{\overline{OR}}{\overline{U_x(Z)}} = \frac{1}{a_0}, \quad \frac{g}{h} = \frac{1}{b_0}, \quad \frac{i}{j} = \frac{1}{c_0}, \quad (4)$$

gleichgültig, ob  $E_x$  zwischen  $O$  und  $U_x$  liegt oder nicht. Nun folgt (3) unmittelbar aus (4) und (1). Bei einer Parallelverschiebung der Bildebene ändern sich  $a_0$ ,  $b_0$  und  $c_0$  proportional.

*Die Bedingung (3) ist auch hinreichend:*

Das Fluchtpunktdreieck muß spitzwinklig sein, denn nach (3) haben die Tangenswerte aller drei Innenwinkel dasselbe Vorzeichen. Wir können daher über  $U_x$ ,  $U_y$ ,  $U_z$  eine Pyramide mit paarweise orthogonalen Mantelkanten aufbauen. Wir zeigen, daß die gegebene Zentralaxonometrie übereinstimmt mit einem Zentralriß zum Zentrum  $Z$  in der Pyramidenspitze. Hinreichend dafür ist, daß die nach dem obigen Konstruktionsverfahren bestimmten Längen  $r = \overline{OR}$ ,  $s = \overline{OS}$  und  $t = \overline{OT}$  gleich sind (Abb. 4).

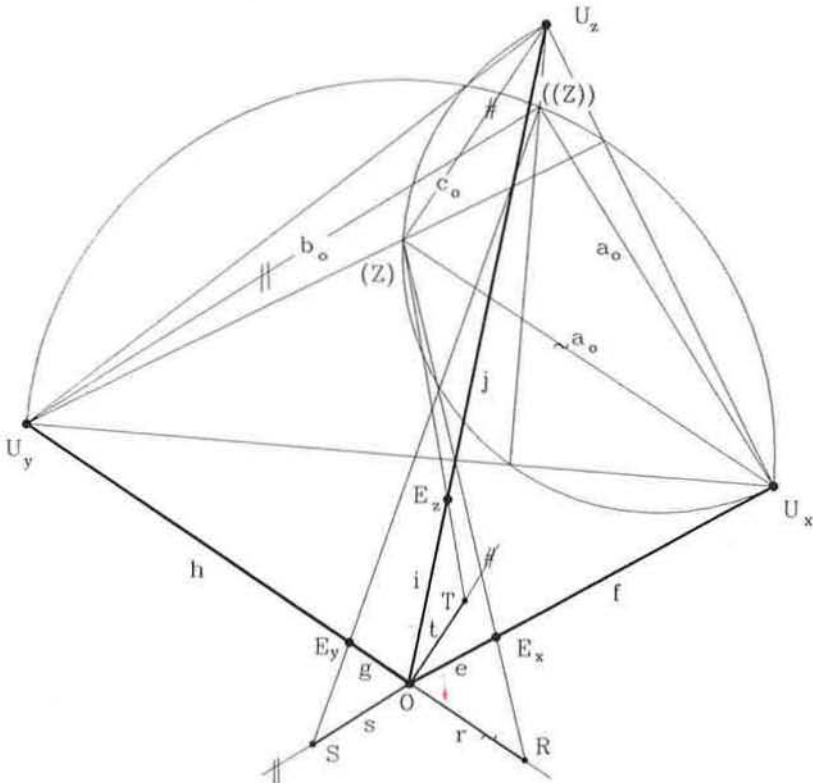


Abb. 4

Wie oben folgt aus den ähnlichen Dreiecken  $(Z) U_x E_x$  und  $RO E_x$  sowie aus dem Paar  $(Z) U_y E_y$  und  $SO E_y$

$$\frac{r}{a_0} = \frac{e}{f}, \quad \frac{s}{b_0} = \frac{g}{h}. \quad (5)$$

Daraus ergibt sich mit der Bedingung (3) und mit (1)

$$\frac{r^2}{s^2} = \frac{a_0^2}{b_0^2} \frac{\tan \alpha}{\tan \beta} = 1.$$

Die gegebene zentralaxonometrische Grundfigur stimmt also mit einem Zentralriß eines kartesischen Koordinatensystems überein.

### 3. Über das Äquivalent

In der Arbeit [12] wurde bewiesen, daß in der Bezeichnungsweise von Satz 1 die Zentralrisse unter den Zentralaxonometrien mit endlichen Fluchtpunkten durch folgende drei Bedingungen zu kennzeichnen sind:

- (A)  $\alpha, \beta, \gamma$  sind spitze Winkel,
- (B)  $\left(\frac{f}{e}\right)^2 \sin^2 \alpha \cos 2\beta + \left(\frac{h}{g}\right)^2 \sin^2 \beta \cos 2\alpha = -\left(\frac{j}{i}\right)^2 \sin^2 \gamma,$
- (C)  $\left(\frac{eh}{fg}\right)^2 = \frac{\sin \alpha \cos \beta}{\sin \beta \cos \alpha}.$

Wir zeigen, daß (A), (B), (C) zusammengenommen zu (3) äquivalent sind.

I. Sind (B) und (C) gültig, so setzen wir (C) in der Form

$$\left(\frac{h}{g}\right)^2 = \left(\frac{f}{e}\right)^2 \frac{\sin \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \sin \beta}$$

in (B) ein und erhalten

$$\begin{aligned} -\left(\frac{j}{i}\right)^2 \sin^2 \gamma &= \left(\frac{f}{e}\right)^2 \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} [\sin \alpha \cos \alpha \cos 2\beta + \\ &\quad + \sin \beta \cos \beta \cos 2\alpha] = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{f}{e}\right)^2 \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \sin 2(\alpha + \beta) = \\ &= \left(\frac{f}{e}\right)^2 \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} (-\sin \gamma \cos \gamma), \end{aligned}$$

also



$$\left(\frac{e}{f}\right)^2 : \left(\frac{i}{j}\right)^2 = \tan \alpha : \tan \gamma.$$

Aus (C) folgt direkt:

$$\left(\frac{e}{f}\right)^2 : \left(\frac{g}{h}\right)^2 = \tan \alpha : \tan \beta.$$

Damit läßt sich wie oben die Bedingung (A) aus den Bedingungen (B) und (C) herleiten; sie ist damit überflüssig.

II. Es gelte (3) aus Satz 1: Daraus folgt (C) unmittelbar. Ferner gilt

$$\left(\frac{f}{e}\right)^2 = \left(\frac{j}{i}\right)^2 \frac{\tan \gamma}{\tan \alpha}, \quad \left(\frac{h}{g}\right)^2 = \left(\frac{j}{i}\right)^2 \frac{\tan \gamma}{\tan \beta}.$$

Dies wird in die linke Seite der Bedingung (B) eingesetzt:

$$\begin{aligned} \left(\frac{j}{i}\right)^2 &\neq \tan \gamma \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \sin^2 \alpha \cos 2\beta + \left(\frac{j}{j}\right)^2 \neq \tan \gamma \frac{\cos \beta}{\sin \beta} \sin^2 \beta \cos 2\alpha = 1 \text{ v} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{j}{j}\right)^2 \neq \tan \gamma (\sin 2\alpha \cos 2\beta + \sin 2\beta \cos 2\alpha) = \frac{1}{2} \left(\frac{j}{i}\right)^2 \neq 1 \text{ j} \\ &\neq \tan \gamma (\sin 2\gamma) = - \left(\frac{j}{i}\right)^2 \neq \sin^2 \gamma. \end{aligned}$$

#### 4. Anwendungen

1. Der Zentralriß eines räumlichen Objekts erweckt nur dann einen geometrisch richtigen Eindruck, wenn die relative Lage des betrachtenden Auges zum Riß übereinstimmt mit jener des Projektionszentrums zur Bildebene zum Zeitpunkt der Aufnahme. Ansonsten vermittelt das Bild nach H o h e n b e r g [4] die Ansicht eines Objekts, das aus dem dargestellten durch eine Kollineation hervorgeht. Ein falsch betrachteter Zentralriß wirkt also auf das Betrachterauge genauso wie eine Zentralaxonometrie.

Mit Satz 1 läßt sich nachprüfen, ob ein gegebenes lineares Bild von einem den Abmessungen nach bekannten Raumobjekt ein Zentralriß ist oder nicht. Wenn das Bild nicht unmittelbar eine zentralaxonometrische Grundfigur enthält, so könnte diese nachträglich nach Übertragung von Doppelverhältnissen eingetragen werden. In diesem Zusammenhang sei daran erinnert, daß jede Zentralaxonometrie das Bild des Raumes in einer singulären Kollineation vom Defekt 1 darstellt. Eine derartige Kollineation ist aber nicht so wie im regulären



Fall festlegbar durch die Risse von fünf Raumpunkten, von welchen keine vier komplanar liegen (vgl. [11]). Dies überrascht, weil bei Affinitäten kein derartiger Unterschied zwischen dem regulären und dem singulären Fall besteht.

2. Soll eine Zentralaxonometrie durch eine Affinität in einen Zentralriß transformiert werden, so kann man wie E. Stiefel in [9] vorgehen. Einfacher ist es mit Satz 1: Die linke Seite von (3) ist invariant gegenüber Affinitäten. Also suchen wir eine ebene Affinität, welche das gegebene Fluchtpunktdreieck  $U_x U_y U_z$  in ein der Bedingung (3) genügendes Dreieck  $U_x^* U_y^* U_z^*$  überführt.

Aus (3) lassen sich explizite Formeln für die Winkel im Fluchtpunktdreieck herleiten. Die Gleichung

$$\tan \gamma = -\tan(\alpha + \beta)$$

erlaubt nämlich die Berechnung der Proportionalitätskonstanten in (3). Nach einfacher Rechnung folgt

$$\tan \alpha = k \left( \frac{e}{f} \right)^2, \quad \tan \beta = k \left( \frac{g}{h} \right)^2, \quad \tan \gamma = k \left( \frac{i}{j} \right)^2, \quad (6)$$

$$k = + \sqrt{\left( \frac{f}{e} \frac{h}{g} \right)^2 + \left( \frac{f}{e} \frac{j}{i} \right)^2 + \left( \frac{h}{g} \frac{j}{i} \right)^2}.$$

Wir können nun  $U_x^* = U_x$  und  $U_y^* = U_y$  wählen und die Werte von  $\alpha$  und  $\beta$  gemäß (6) für die Konstruktion von  $U_z^*$  verwenden. Damit ist eine sogar *perspektive Affinität* festgelegt, die das zentralaxonometrische Bild in einen Zentralriß verwandelt.

#### Literatur

- [1] Brauner, H.: Lehrbuch der Konstruktiven Geometrie, Springer-Verlag Wien 1986, S. 135—137.
- [2] Brauner, H.: Lineare Abbildungen aus euklidischen Räumen. Beiträge Algebra Geom. **21** (1986), 5—26.
- [3] Drs, L.: V základni vete centralni axonometrie. Časopis pro pestování matematiky, roc. **82** (1957), 165—173.
- [4] Hohenberg, F.: Konstruktive Geometrie für Techniker, Wien 1956, S. 272.
- [5] Hohenberg, F., und J. Tschupik: Grundzüge der darstellenden Geometrie. In: H. Behnke (ed.): Grundzüge der Mathematik, Bd. IIB, 2. Aufl., Göttingen 1971, S. 294—295.
- [6] Kruppa, E.: Zur achsonometrischen Methode der darstellenden Geometrie, Sb. Akad. Wiss. Wien (math.-nat. Kl.) **119** (1910), 487—506.

- [7] Müller, E., und E. Kruppa: Vorlesungen über darstellende Geometrie, I. Bd.: E. Kruppa: Die linearen Abbildungen, Wien, 1923, S. 183.
- [8] Stiefel, E.: Zum Satz von Pohlke. *Comment. Math. Helv.* **10** (1938), 208—225.
- [9] Stiefel, E.: Lehrbuch der darstellenden Geometrie, 3. Aufl. Basel, Stuttgart, 1971, S. 177.
- [10] Szabó, J.: Az Eckhart-féle összemetszési eljárás egy általánosítása és annak néhány komputergrafikai alkalmazása. Disszertáció, Debrecen, 1978. 149 old.
- [11] Szabó, J.: Parallele und zentrale Axonometrie, Vortragssammlung Konstruktive Geometrie, Debrecen 1990 (ISBN 963 471 810 8), 149—158.
- [12] Szabó, J.: Eine analytische Bedingung dafür, daß eine Zentralaxonometrie Zentral-projection ist. *Publ. Math. Debrecen* (im Druck).

Anschrift der Autoren: József Szabó, Univ. Debrecen, Inst. f. Math. und Inform., Egyetem tér 1, H-4010 Debrecen, Pf. 12; Hellmuth Stachel, TU Wien, Inst. für Geometrie, Wiedner Hauptstraße 8–10, A-1040 Wien; Hermann Vogel, TU München, Institut für Mathematik, Arcisstraße 21, D-80290 München.