W. WUNDERLICHs Beiträge zur Wackeligkeit

Hellmuth Stachel

Technical Report Nr. 22 Oktober 1995

W. WUNDERLICHs Beiträge zur Wackeligkeit

Hellmuth Stachel

Institut für Geometrie, Technische Universität Wien
Wiedner Hauptstraße 8-10/113, A-1040 Wien
email: stachel@geometrie.tuwien.ac.at

0. Einleitung

W. WUNDERLICHs Publikationsliste umfaßt mehr als 200 Titel, und darunter gibt es rund 25 Arbeiten, die sich mit *Wackeligkeit*, also mit der *infinitesimalen Beweglichkeit* geometrischer Strukturen befassen. Die meisten dieser Arbeiten sind erst nach 1975 entstanden; sie stehen daher im letzten Viertel von WUNDERLICHs langer Literaturliste. Wenn in der vorliegenden Note[1]) ein Überblick über einige der in diesen Arbeiten enthaltenen Ideen und Ergebnisse gegeben wird, so möge sich der Leser stets vor Augen halten, daß es sich dabei lediglich um rund ein Achtel von WUNDERLICHs reichhaltigem wissenschaftlichen Œuvre handelt. In der folgenden Zusammenfassung sind vereinzelt auch Publikationen anderer Autoren zitiert, sofern ein unmittelbarer Zusammenhang mit WUNDERLICHs Arbeiten besteht.

1. Starr, kippend, wackelig, endlich beweglich

Die genannten 25 Arbeiten kreisen um die Begriffe "starr", "kippend", "wackelig" und "beweglich" (oder "endlich beweglich"). Ich möchte diese Begriffe nach dem Vorbild WUNDERLICHs anhand eines Beispiels erklären:

Jeder weiß, daß ein Dreieck mit Drehgelenken in den Ecken *starr* ist. Ein Viereck hingegen ist *endlich beweglich.* Erst wenn eine Diagonale als zusätzlicher Stab in diesem *Stabwerk* (oder *Fachwerk*) eingefügt wird, wird dieses starr. Ähnlich kann man versuchen, ein ebenes Gelenksechseck durch Einfügen der drei Hauptdiagonalen starr zu machen. Die insgesamt neun Stäbe führen auf neun quadratische Gleichung zwischen den unbekannten Eckenkoordinaten. Um dabei die nicht interessierenden Bewegungen des Gesamtsystems herauszufiltern, kann eine Ecke in den Ursprung und ein anliegender Stab in die x-Achse verlegt werden. Dieses System nichtlinearer Gleichungen kann mehrere reelle, paarweise inkongruente Lösungen haben oder auch Mehrfachlösungen.

[1]) Nach einem am 13.9.1995 in Balatonföldvár gehaltenen Vortrag im Rahmen der Tagung über "Konstruktive Geometrie", die aus Anlaß des 85. Geburtstages von W. WUNDERLICH veranstaltet worden ist.

Liegen zwei inkongruente Lösungen hinreichend nahe beieinander, so kann ein Modell dank Gelenkspiel und Materialverformung aus der einen Lage in die andere springen; es entsteht eine *kippendes* Form. WUNDERLICH nennt den Grenzfall einer Mehrfachlösung, bei dem diese zwei Formen zusammenfallen, *wackelig.* Hier läßt sich jedem Gelenkspunkt $\mathfrak{p}_i$ noch ein Geschwindigkeitsvektor $\mathfrak{v}_i$ derart zuordnen, daß für jeden Stab $\mathfrak{p}_i\mathfrak{p}_j$ die Gleichung

$$(\mathfrak{p}_i - \mathfrak{p}_j) \cdot (\mathfrak{v}_i - \mathfrak{v}_j) = 0$$

erfüllt ist. Das ist der bekannte, durch Differenzieren der Bedingung $\|\mathfrak{p}_i - \mathfrak{p}_j\| = const.$ herleitbare *Projektionssatz* der ebenen Kinematik. Zur Kennzeichnung eines wackeligen Stabwerkes muß nur noch verlangt werden, daß diese Geschwindigkeitszuordnung $\mathfrak{p}_i \mapsto \mathfrak{v}_i$ nicht von einer gemeinsamen Bewegung des insgesamt starren Stabwerkes stammt.

Das durch die Diagonalen verfestigte ebene Sechseck ist übrigens genau dann wackelig, wenn die Ecken auf einer Kurve 2. Ordnung liegen, ein sehr altes Ergebnis, dessen Ursprung sich gar nicht genau festlegen läßt. WUNDERLICH hat in einer späteren Arbeit [44] gezeigt, daß die $\mathfrak{v}_i$ in diesem Fall orthogonal zum Kegelschnitt wählbar sind, und zwar abwechselnd einmal nach außen, einmal nach innen.

Nach einem einigermaßen tiefliegenden Resultat von DIXON [7] (1899) gibt es genau zwei Fälle, wo unser Gleichungssystem sogar unendlich viele, untereinander inkongruente Lösungen hat. Diese führen jeweils auf ein *bewegliches* Stabwerk; in der Kinematik spricht man von einem *übergeschlossenen Mechanismus.* WUNDERLICH hat in der Arbeit [22] diese Spezialfälle vorgestellt und neu begründet. Sie liegen dann vor, wenn sich die 6 Eckpunkte entweder abwechselnd auf zwei orthogonale Geraden verteilen oder auf zwei Rechtecke mit gemeinsamen Symmetrieachsen.

Um die Begriffe "starr, kippend, wackelig, endlich beweglich" hat sich in den letzten Jahrzehnten eine ganze Theorie entwickelt. Das kürzlich bei der American Mathematic Society erschienene Buch [14] mit dem Titel *Combinatorial Rigidity*, das – nebenbei bemerkt – im Literaturverzeichnis gleich 17 Arbeiten WUNDERLICHs zitiert, unterscheidet z.B. zwischen folgenden Begriffen:

1. *Starrheit im engeren Sinn* (strong rigidity): Je zwei Realisierungen mit denselben Stablängen sind kongruent.

2. *Starrheit* (rigidity): In einer "Umgebung" der gegebenen Realisierung gibt es keine dazu inkongruente.

3. *Infinitesimale Starrheit* (infinitesimal rigidity): Jede mit dem Projektionssatz verträgliche Zuordnung von Geschwindigkeitsvektoren $\mathfrak{v}_i$ zu den Knoten $\mathfrak{p}_i$ des Stabwerks stellt nur die Geschwindigkeitsverteilung einer Bewegung des gesamten Stabwerkes dar.

4. *Generische Starrheit* (generic rigidity): Der generisch Fall des Stabwerkes, also eher der kombinatorische Typ, ist starr.

Gemäß dieser Terminologie wird ein wackeliges Stabwerk zwar infinitesimal beweglich, aber trotzdem noch "starr" genannt, ein Umstand, den W. WUNDERLICH immer bemängelt hat, weil dies der Anschauung widerspricht.

In dieser Theorie der Starrheit gibt es eine Reihe allgemeiner struktureller Aussagen, wie etwa

$$\textit{infinitesimal starr} \Longrightarrow \textit{generisch starr}$$

oder die später noch zu erwähnende projektive Invarianz wackeliger Fachwerke. Aber für den konkreten Fall liefert diese Theorie keine Aussage, und gerade das war es, was WUNDERLICH sosehr interessiert hat.

2. "Gefährliche Lagen" in der Geodäsie

Bevor ich mich weiteren Wackelstrukturen zuwende, möchte ich darauf zu sprechen kommen, was "Wackeligkeit" in der Geodäsie bedeutet. Zunächst zu einer frühen Arbeit [19] aus dem Jahr 1943, die noch in Kiel verfaßt worden ist:

2.1 Der räumliche Rückwärtsschnitt

Als *räumlichen Rückwärtsschnitt* bezeichnet man in der Geodäsie die Aufgabe, aus einer photographischen Aufnahme (mit bekannter innerer Orientierung) eines der Lage nach bekannten Dreiecks ABC auf den Standort O des Aufnahmezentrums zurückzuschließen. Das bedeutet, daß durch das Dreieck ABC ein vorgegebenes Dreikant zu legen. Diese Aufgabe ist kubisch. Der Fall einer Mehrfachlösung führt auf eine "infinitesimale Unbestimmtheit", also auf eine gewisse Ungenauigkeit der Lösung, was die Bezeichnung *"gefährlich"* rechtfertigt.

WUNDERLICHs Bestimmung des erstmals von S. FINSTERWALDER ([8], S. 28) entdeckten gefährlichen Ortes lautet wie folgt: Denken wir uns das Dreikant festgehalten. Dann sind den wackeligen Ecken A, B, C Geschwindigkeitsvektoren in Richtung der Kanten zuzuordnen. Nach einem grundlegenden Satz der Raumkinematik gehören zu jedem Zeitpunkt einer Raumbewegung alle Bahnnormalen einem linearen Geradenkomplex an. Daher müssen die der Verbindungsebene $\pi = ABC$ angehörenden Bahnnormalen von A, B und C durch den Nullpunkt P von π gehen. Da diese Bahnnormalen normal sind zu den in π gelegenen Normalrissen der Pyramidenkanten, liegen die Eckpunkte A, B und C notwendig auf jenem Kreis, dem P und der Normalriß O' der Spitze O als diametrale Punkte angehören.

Diese notwendige Bedingung, derzufolge umgekehrt O auf dem Drehzylinder durch den Umkreis des Dreiecks ABC liegt, erweist sich auch als hinreichend. Im übrigen hat WUNDERLICH in dieser Arbeit auch die Unsicherheitsrichtungen von O bei festgehaltenem Dreieck ABC bestimmt.

Es gibt eine Reihe weiterer Publikationen, in denen sich WUNDERLICH mit gefährlichen Örtern bei geodätischen Aufgaben befaßt hat. Die behandelten Probleme lassen sich in zwei Gruppen teilen, in Triangulationsaufgaben und in Trilaterationsaufgaben:

2.2 Triangulationsaufgaben

Die Arbeit [24] beginnt mit dem *Achtpunkteproblem von* LAMBERT (1765): Die bis auf eine Ähnlichkeitstransformation eindeutige Lage von vier Standpunkten $P_1, .., P_4$ und vier Zielpunkten $Q_1, .., Q_4$ in der Ebene wird dadurch bestimmt, daß von jedem Standpunkt aus alle vier Zielpunkte anvisiert werden, was jeweils drei Winkelmaße liefert. Beim *Achtpunkteproblem von* CLAUSEN (1843) sind drei Standpunkte und fünf Zielpunkten gegeben, was wiederum $3 \cdot 4 = 12$ Angaben für die $(8-2) \cdot 2$ unbekannten Koordinaten liefert. Beide Probleme sind quadratischer Natur.

In beiden Fällen ist die Lage dann gefährlich, wenn alle Stand- und Zielpunkte auf einer (nicht notwendig irreduziblen) zirkularen Kubik liegen, und die Gefährlichkeit bleibt auch nach Hinzufügung weiterer Punkte bestehen. Zusätzlich ist das CLAUSENsche Problem auch dann stets gefährlich, wenn bei beliebig vielen und beliebig verteilten Zielpunkten die drei Standpunkte auf einer Geraden liegen.

Schließlich wird in [24] auch noch ein *Fünfpunkteproblem von* K. KILLIAN (1934) behandelt: Dabei geht es um drei Standpunkte P_1, P_2, P_3 und zwei Zielpunkte Q_1, Q_2. Von jedem Standpunkt werden die beiden Zielpunkte anvisiert und zudem die vorangegangenen Standpunkte, also von P_2 aus zusätzlich P_1 und von P_3 aus P_1 und P_2, was schließlich $1 + 2 + 3 = (5-2) \cdot 2$ Winkelmaße liefert. Abermals stellt sich eine zirkulare Kubik als gefährlicher Ort ein, allerdings nun eine stets rationale.

In [29] wird nocheinmal auf die CLAUSENsche Aufgabe eingegangen und gezeigt, daß bei einer gefährlichen Annahme sogar unendlich viele Lösungen existieren. Eine ähnliche Situation tritt in [31] beim LAMBERT*schen Sechspunkteproblem* ein: Hier werden von drei Standpunkten aus die Azimute der drei Zielpunkte bestimmt. Diesmal erweist sich ein Kegelschnitt als gefährlicher Ort. Dabei zeigt sich ein unmittelbarer Bezug zur Aufgabe von OTTAIANO, derzufolge einem Kegelschnitt ein Dreieck einzuschreiben ist, dessen Seiten der Reihe nach durch drei gegebene Punkte (hier Fernpunkte) gehen.

2.3 Trilaterationsaufgaben

Fortschritte in der elektronischen Entfernungsmessung brachten es mit sich, daß Methoden der Triangulation zunehmend durch Methoden der Längenmessung, also der Trilateration ersetzt wurden, vor allem in der Satellitengeodäsie. Dies führt auf das in den Arbeiten [26] und [27] behandelte *Trilaterationsproblem*, nämlich, die gegenseitige Lage von m Standpunkten (Bodenstationen) $P_1, \ldots, P_m$ dadurch zu ermitteln, daß die jeweiligen Entfernungen zu n Zielpunkten (Satellitenpositionen) $Q_1, \ldots, Q_n$ gemessen werden.

Im ebenen Fall reichen $m = 3$ Standpunkte und $n = 3$ Zielpunkte aus, um aus den $3 \cdot 3$ Distanzen die $6 \cdot 2$ Koordinaten bis auf eine Bewegung festzulegen. Denkt man sich die gemessenen Distanzen durch Stäbe P_iQ_j realisiert, so bekommt man genau das Stabwerk des durch Diagonalen versteiften Gelenksechsecks. Dies zeigt unmittelbar die nahe Bindung zwischen Trilaterationsproblemen und Stabwerken. Durch Übertragung der früheren Ergebnisse bekommen wir sofort den gefährlichen Ort des ebenen Trilaterationsproblems, nämlich eine Kurve 2. Ordnung, sowie jene Fälle mit einer mindestens einparametrigen Lösungsschar.

In dieser Hinsicht konnte auch ich in [15] einen kleinen Beitrag leisten. Das Stabwerk mit den Stäben P_iQ_j für $i = 1, \ldots, m$ und $j = 1, \ldots, n$ stellt einen *bipartiten Graph* dar. Ich konnte zeigen, daß je zwei inkongruente Realisierungen in der Ebene sich in eine derartige gegenseitige Lage bringen lassen, daß die jeweilige Längengleichheit der Kanten genau zur Aussage des *Satzes von* IVORY über konfokale Kegelschnitte wird. Das analoge Ergebnis gilt im Raum – und eigentlich bei beliebig hoher Dimension.

Eine Zählung der Unbekannten zeigt, daß das räumliche Trilaterationsproblem bei $m = 4$ und $n = 6$, also etwa bei 4 Bodenstationen und 6 Satellitenpositionen eine Ermittlung der gesuchten Relativpositionen ermöglichen sollte. Während das ebene Problem von WUNDERLICH als Aufgabe 8. Grades erkannt worden ist, lassen die 24 quadratischen Gleichungen bei der räumlichen Version zunächst nur auf ein Problem einer Ordnung $\leq 8 \cdot 6^5 = 62208$ schließen. Mit der genauen Gradbestimmung hat sich später noch Herr O. GIERING in einigen Arbeiten genauer auseinandergesetzt. Er konnte in [9] zeigen, daß sich das System der 24 Gleichungen nach geschickten Substitutionen auf eine Gleichung 6. Grades und fünf Gleichungen 5. Grades in sechs Unbekannten zurückführen läßt. Einzelne dieser Gleichungen haben gemeinsame Lösungsscharen, die aber fast alle auszuscheiden sind. Deshalb erlaubt der Satz von BÉZOUT für den allgemeinen Fall nach wie vor keine genaue Aussage über den Grad des Problems.

Die Frage nach dem gefährlichen Ort ist in der Regel etwas einfacher. WUNDERLICH konnte zeigen, daß genau dann Gefährlichkeit vorliegt, wenn die Stand- und Zielpunkte zusammengenommen auf einer Fläche 2. Ordnung liegen. Auch Fälle mit endlicher Beweglichkeit wurden entdeckt, etwa dann, wenn sich die Standpunkte und die Zielpunkte auf zwei konfokale Kegelschnitte verteilen, ein Fall, der bereits von R. BRICARD betrachtet worden war. In [23] und [25] gibt es Verallgemeinerungen dazu, und auch die Arbeit [16] des Referenten wurde dadurch initiiert.

WUNDERLICH konnte in einer weiteren Arbeit [28] zeigen, daß überraschenderweise eine sogar zweiparametrige Lösungsschar immer dann auftritt, wenn die vier Standpunkte in einer Ebene liegen. Und wenn sogar beliebig viele Standpunkte demselben Kegelschnitt angehören, gibt es noch immer eine mindestens einparametrige Lösungsschar, und das bei beliebig vielen Zielpunkten im Raum. In einer Fußnote dieser Arbeit ist zu lesen: "Diese Entdeckung ist einem von Frl. Elisabeth KURKA für einen Seminarvortrag angefertigten Stabmodell der vorhin geschilderten Art zu verdanken, das statt der erwarteten Wackeligkeit eine stetige Deformabilität aufwies."

Die Tatsache, daß man wegen der verhältnismäßig geringen Höhe der Satelliten bei Standpunkten auf der ellipsoidförmigen Erdoberfläche fast immer in der Nähe gefährlicher Lagen ist, hat dazu geführt, daß diese Art der Positionsbestimmung in der Praxis nicht weiterverfolgt worden ist. An seine Stelle trat das heute weit verbreitete *GPS (Global Positioning System)*, mit dem sich übrigens W. WUNDERLICHs Sohn Thomas mehrfach beschäftigt hat (siehe [18]):

Dieses ursprünglich für militärische Zwecke eingerichtete System erlaubt es, mit Hilfe von Geräten in der Größe eines Taschenrechners die Position auf der Erde auf etwa 1 m genau zu bestimmen, und das innerhalb weniger Sekunden. Die sozusagen "klinisch saubere" Kriegsführung mittels zielgenauer Laserbomben oder "cruise missiles" ist eine andere Konsequenz dieses auf 17 Erdsatelliten beruhenden Positionierungssystems. Es ist höchst erstaunlich, daß dabei die Distanzen zwischen dem Standpunkt auf der Erde und den einzelnen Satelliten aus der (unglaublich genau gemessenen) Zeit ermittelt werden, die das Funksignal vom Satelliten bis zum Beobachter braucht. Wegen der nicht möglichen Zeitabstimmung zwischen den Satelliten und dem Beobachter sind mindestens vier Satelliten zur selben Zeit notwendig. In der Regel steht auch ein fünfter zur Verfügung. In [18] wird der Bezug zum bekannten Apollonischen Kugelproblem hergestellt. Gefährlich ist die Lage genau dann, wenn die Visierlinien auf einem Drehkegel liegen.

3. Kippende und wackelige Stabwerke

3.1 Oktaeder und Gelenkvierecke

Die erste Arbeit, die sich mit kippenden und wackeligen Mechanismen befaßt, ist jene aus dem Jahr 1965 über Oktaeder [20]. Nach einem bekannten Satz von CAUCHY (1812) sind konvexe Polyeder starr, genauer, infinitesimal starr. Fehlt jedoch die Forderung nach Konvexität, so kann ein Polyedernetz mehrere, untereinander inkongruente Realisierungen zulassen.

Um z.B. *kippende Oktaeder* zu erhalten, wählt man im Raum zwei kongruente Dreiecke ABC und $A'B'C'$, die nicht allzuweit voneinander entfernt liegen. Jede Gerade in der Symmetrieebene σ_A zu A und A' ist Achse einer Drehung, die A nach A' bringt. Die Symmetrieebenen $\sigma_A, \sigma_B, \sigma_C$ bilden in der Regel ein Dreikant. Das Dreieck DEF sei ein ebener Schnitt dieses Dreikants. Wenn wir dieses einmal mit ABC, einmal mit $A'B'C'$ zu einem Antriprisma verbinden, so entstehen zwei Oktaeder mit kongruenten Netzen. Ein danach angefertigtes Modell ermöglicht nach Anwendung "sanfter Gewalt" einen kippenden Übergang von der einen in die andere Position. Dazu als nützliche Anmerkung aus [20]: "Wird ein solches Modell mit sämtlichen acht Flächen ausgeführt, so empfiehlt es sich, irgendwo ein Loch für den Durchtritt der eingeschlossenen Luft vorzusehen".

Der Grenzfall, bei dem die zwei Lagen gegeneinander konvergieren, ergibt eine wackelige Form. Derartige, mit einem MOEBIUSschen Tetraederpaar in Beziehung stehende *Wackeloktaeder* sind auch bereits von W. BLASCHKE [3] behandelt worden. Dort ist allerdings die projektive Natur der zugehörigen Kennzeichnung übersehen worden; BLASCHKE spricht nur von affiner Invarianz.

In der genannten Arbeit [20] geht WUNDERLICH aber auch sehr ausführlich auf die beweglichen Formen der BRICARD*schen Oktaeder* [4] ein. Für jeden der insgesamt drei Typen wird ein metrischer Spezialfall mit genauen Bastelanweisungen angegeben. Wegen der auftretenden Selbstdurchdringungen müssen bei diesen interessanten Polyedermodellen stets zwei der insgesamt acht Seitenflächen weggelassen werden.

Ähnliche Überlegungen werden in [21] für *räumliche Gelenkvierecke* mit Drehachsen, also für RRRR-Mechanismen angestellt. Diese während WUNDERLICHs Gastprofessur in Pullman im Staate Washington entstandene Arbeit enthält ebenfalls genaue Bauanleitungen für die Modelle. Man findet dort bereits die heutzutage gerne nach DENAVIT-HARTENBERG bezeichneten Formparameter. In dieser Arbeit wird aber auch auf das BENNET-*Isogramm* gemäß [1] und [2] ausführlich hingewiesen. Es ist dies nach R. BRICARD die einzige bewegliche Form – neben den ebenen und sphärischen Gelenkvierecken.

3.2 Andere wackelige oder kippende Polyeder

Angeregt durch die in [12] behandelte BRICARDsche Drehgelenkskette befaßt sich WUNDERLICH in zwei Arbeiten [30] und [32] mit drehsymmetrisch angeordneten Antiparallelogrammen. Dies führt neben wackeligen Formen auch zu besonders ansprechenden beweglichen Stabmodellen, für die – erstmals – eine Anfertigung mit Strohhalmen und durchgezogenen Fäden empfohlen wird.

Auf eine Publikation von Michael GOLDBERG [10] reagiert WUNDERLICH mit einem bunten Strauß bemerkenswerter Polyederformen: In [33] werden als Verallgemeinerung der Oktaeder kippende und wackelige *Antriprismen* mit einer n-zähligen Symmetrieachse vorgestellt. In [34] (=[40]) folgen *Wackelikosaeder* mit drei paarweise orthogonalen Symmetrieebenen. Den Ausgangspunkt bilden dabei in Anlehnung an den regulären Fall drei in den Symmetrieebenen gelegene Rechtecke. Neben kippenden Formen werden unter den wackeligen Beispielen auch solche mit lauter 90- oder 270-grädigen Winkeln längs der 30 Ikosaederkanten vorgestellt. Derartige *orthogonale Ikosaeder* sind erstmals von B. JESSEN 1967 [11] entdeckt worden. In Verallgemeinerung eines Resultates von M. GOLDBERG gelingt WUNDERLICH in [38] der Nachweis, daß alle orthogonalen Ikosaeder wackelig sind. Der Beweis beruht auf einer geschickten und zugleich sehr anschaulichen Erzeugung eines derartigen Oktaeders mit Hilfe eines nichtebenen Fünfeckes.

Weitere Wackelstrukturen sind die in [41] präsentierten, einer Sanduhr ähnlichen Wackelikosaeder mit einer dreizähligen Symmetrieachse, die wackeligen fünfseitigen *Doppelpyramiden* in [35] mit dem Sonderfall neuer, "fast beweglicher" Kippoktaeder [46] bei einer vierseitigen Basis. In [37] (=[43]) werden merkwürdige *Wackel-12-Flächner* gezeigt in Form zweier, längs Mantelkanten aufgeschnittener und versetzt zusammengesetzter dreiseitiger Doppelpyramiden.

In all diesen Arbeiten ist einerseits die Kreativität beim "Erfinden" kippender und wackeliger Polyeder zu bewundern, andererseits aber auch die geschickte Parameter- und Koordinatenwahl. Dort, wo die Wackelbedingung numerisch zu kompliziert ausfällt, gibt WUNDERLICH Kurventafeln an, mit deren Hilfe sich jeder Leser selbst die Abmessungen seiner wackeligen Modelle zusammenstellen kann. Die Fähigkeit, solche Tafeln "mit der Hand" anzufertigen, ist der heutigen, durch programmierbare Taschenrechner, Personalcomputer und inbesondere durch Symbol-Manipulationsprogramme verwöhnten Generation bereits völlig abhanden gekommen.

3.3 Projektive Invarianz der Wackeligkeit

Überraschenderweise hat H. LIEBMANN bereits 1920 bewiesen, daß die Wackeligkeit von Stabwerken projektiv invariant ist. WUNDERLICH lenkt erneut die Aufmerksamkeit auf dieses alte Resultat, und in [36] sowie später in [39] gibt er einen neuen Beweis dafür an, wobei sich eine von LIEBMANN noch benutzte Zusatzvoraussetzung als überflüssig herausstellt. WUNDERLICH berechnet explizit die Geschwindigkeitsvektoren $\mathfrak{v}_i'$ in den Knoten des kollinear transformierten Stabwerkes. Der Rechenaufwand hiefür ist erheblich, vor allem im Dreidimensionalen.

WUNDERLICH mußte wenige Jahre später neidlos anerkennen, daß Herrn B. WEGNER in [17] ein überaus eleganter Beweis gelungen ist, der zudem für beliebig hohe Dimensionen gilt: WEGNER bettet das wackelige n-dimensionale Stabwerk in den $(n+1)$-dimensionalen Raum ein und fügt einen Knoten $\mathfrak{p}_0$ mit dem Geschwindigkeitsvektor $\mathfrak{v}_0 = \mathfrak{o}$ hinzu, der mit allen bisherigen Knoten $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_k$ durch zusätzliche Stäbe verbunden wird. Dann wird zu jedem bisherigen $\mathfrak{v}_i$ ein zur Trägerhyperebene normaler Vektor derart addiert, daß als Summe ein zum Stab $\mathfrak{p}_0\,\mathfrak{p}_i$ orthogonaler Vektor entsteht. Damit bleibt der Projektionssatz für alle bisherigen Stäbe bestehen, und er gilt auch für die neu dazugekommenen Stäbe.

Der umgekehrte Vorgang zeigt schließlich, daß das n-dimensionale Stabwerk genau dann wackelig ist, wenn auch das erweiterte "konische" Stabwerk wackelig ist. Da im Reellen jede Kollineation aus Perspektivitäten zusammensetzbar ist, folgt unmittelbar die projektive Invarianz.

3.4 Bewegliche und fast bewegliche Polyeder

Einen Paukenschlag in der Theorie der beweglichen Formen bedeutete im Jahr 1976 Bob CONNELLYs Nachweis eines zur Kugel topologisch äquivalenten, überschneidungsfreien, beweglichen Polyeders. Das ursprüngliche 18-Flach in [5] wurde 1978 von STEFFEN auf ein bewegliches 14-Flach verbessert (siehe [6]). Nach dem Bau eines derartigen Modelles bemerkte WUNDERLICH leicht ironisch, daß dieses endlich bewegliche Polyeder "weit weniger beweglich" wäre als manche seiner wackeligen oder kippenden Formen.

Zu dieser Bemerkung paßt sehr gut die Arbeit [45] aus dem Jahr 1986: Herr C. SCHWABE aus Zürich hatte 1984 auf der Schweizerischen Wissenschaftsaustellung "Phänomena" ein scheinbar bewegliches Polyeder ausgestellt, das *Vierhorn.* Es gab auch Ausschneidebögen zu kaufen. Nicht nur die Gestalt des Polyeders war bemerkenswert, auch die Tatsache, daß es offensichtlich zwei platte Formen zuließ. Herr SCHWABE war wegen gewisser Unstimmigkeiten seiner Sache schließlich doch nicht ganz sicher, und er wandte sich an W. WUNDERLICH. Diesem gelang der Nachweis, daß dieses interessante geschlossene Polyeder lediglich zwischen drei Formen kippend ist, wovon zwei überdies wackelig sind. Eine subtile numerische Analyse klärte die annähernde Beweglichkeit des Modelles und führte auch zu einer Empfehlung günstiger Abmessungen.

Das Vierhorn besteht aus zwei, längs zweier Kanten zusammengefügten 4-seitigen Pyramiden. Dabei wird entlang des offen gebliebenen windschiefen Isogrammes die gespiegelte und unter 90° verdrehte Zwillingspyramide angeklebt. Während CONNELLYs Polyeder ein bewegungsinvariantes Volumen aufwiesen, zeigt das Vierhorn bei seiner annähernden Bewegung eine Wirkung wie ein "Blasebalg". Dies scheint die ursprünglich geäußerte Vermutung zu widerlegen, daß stetig bewegliche geschlossene Dreieckspolyeder stets ein konstantes Volumen aufweisen müssen.

In [42] zeigt WUNDERLICH ein ringartiges Wackelpolyeder und in [47] – als Verallgemeinerung – Wackelpolyeder beliebigen Geschlechtes. Diese entstehen durch drehsymmetrische Wiederholung und Spiegelung aus einem Grundelement, das ein ebenes Deltoid mit einem windschiefen Viereck verbindet.

3.5 Nachwort

W. WUNDERLICH hatte die Modelle für seine Stabwerke und Polyeder meist selbst gebastelt, manche mit Unterstützung durch seine Frau. Einige wurden im Auftrag WUNDERLICHs von seinen Assistenten hergestellt. Alle diese faszinierenden und höchst ästhetischen Formen zeigen, daß für WUNDERLICH "Geometrie" immer etwas mit "begreifen" im doppelten Wortsinn zu tun hatte – und auch mit Schönheit. Es ist überaus betrüblich zu sehen, daß allein die schwindende Sehkraft dazu führte, daß W. WUNDERLICH am Ende der Achtzigerjahre seine Publikationstätigkeit völlig einstellen mußte. Was wäre nicht noch alles zu erwarten gewesen!

Literatur

[1] G.T. BENNET: *A new mechanism.* Engineering **76** (1903), 777.

[2] G.T. BENNET: *The skew isogram mechanism.* Proc. London Math. Soc., Sec. Series **13** (1913), 151-173.

[3] W. BLASCHKE: *Wackelige Achtflache.* Math. Z. **6** (1920), 85-93.

[4] R. BRICARD: *Mémoire sur la théorie de l'octaèdre articulé.* J. math. pur. appl. **3** (1897), 113-148.

[5] R. CONNELLY: *An immersed polyhedral surface which flexes.* Indiana Univ. Math. J. **25** (1976), 965-972.

[6] R. CONNELLY: *A flexible sphere.* Math. Intelligencer **3** (1978), 130-131.

[7] A.C. DIXON: *On certain deformable frameworks.* Mess. Math. **29** (1899/1900), 1-21.

[8] S. FINSTERWALDER: *Die geometrischen Grundlagen der Photogrammetrie.* Jahresber. Dtsch. Math.-Ver. **6** (1899), 3-41.

[9] O. GIERING: *Über den Grad eines räumlichen Trilaterationsproblems.* Sitzungsber., Abt. II, österr. Akad. Wiss., Math.-Naturw. Kl. **199** (1990), 23-36.

[10] M. GOLDBERG: *Unstable polyhedral structures.* Math. Magazine **51** (1978), 165-170.

[11] B. JESSEN: *Orthogonal icosahedra.* Nordisk Mat. Tidsskr. **15** (1967), 90-96.

[12] S. KUNZE, H. STACHEL: *Über ein sechsgliedriges räumliches Getriebe.* Elem. Math. **29** (1974), 25-32.

[13] H. LIEBMANN: *Ausnahmefachwerke und ihre Determinante.* Sitzungsber. Bayer. Akad. Wiss. 1920, 197-227.

[14] J. GRAVER, B. SERVATIUS, H. SERVATIUS: *Combinatorial Rigidity.* Graduate Studies in Mathematics, Vol. 2, American Mathematical Society, Providence 1993.

[15] H. STACHEL: *Bemerkungen über zwei räumliche Trilaterationsprobleme.* Z. Angew. Math. Mech. **62** (1982), 329-341.

[16] H. STACHEL: *Deformable frameworks with common knot-paths.* Proceedings of the International Conference on Engineering and Computer Graphics, Beijing 1984, 76-80.

[17] B. WEGNER: *On the projective invariance of shaky structures in Euclidean space.* Acta Mechanica **53** (1984), 163-171.

[18] TH.A. WUNDERLICH: *Die geometrischen Grundlagen der GPS-Einzelpunktbestimmung.* In Ingenieurvermessung 92, Ferd. Dümmlers Verlag, Bonn 1992, Band 1, I 2/1-2/12..

[19] W. WUNDERLICH: *Über den „gefährlichen" Rückwärtseinschnitt.* Jahresber. Dtsch. Math.-Ver. **53** (1943), 41-48.

[20] W. WUNDERLICH: *Starre, kippende, wackelige und bewegliche Achtflache.* Elem. Math. **20** (1965), 25-32.

[21] W. WUNDERLICH: *Starre, kippende, wackelige und bewegliche Gelenkvierecke im Raum.* Elem. Math. **26** (1971), 73-83.

[22] W. WUNDERLICH: *On deformable nine-bar linkages with six triple joints.* Proc. Nederl. Akad. Wetensch. **79** (1976), 257-262.

[23] W. WUNDERLICH: *Fokalkurvenpaare in orthogonalen Ebenen und bewegliche Stabwerke.* Sitzungsber., Abt. II, österr. Akad. Wiss., Math.-Naturw. Kl. **185** (1976), 275-290.

[24] W. WUNDERLICH: *Über die gefährlichen Örter bei zwei Achtpunktproblemen und einem Fünfpunktproblem.* Österr. Z. Vermessungsw. u. Photogrammetrie **64** (1977), 119-128.

[25] W. WUNDERLICH: *Bewegliche Stabwerke vom Bricardschen Typus.* Z. Angew. Math. Mech. **57** (1977), 51-52.

[26] W. WUNDERLICH: *Gefährliche Annahmen der Trilateration und bewegliche Fachwerke I.* Z. Angew. Math. Mech. **57** (1977), 297-304.

[27] W. WUNDERLICH: *Gefährliche Annahmen der Trilateration und bewegliche Fachwerke II.* Z. Angew. Math. Mech. **57** (1977), 363-367.

[28] W. WUNDERLICH: *Untersuchungen zu einem Trilaterationsproblem mit komplanaren Standpunkten.* Sitzungsber., Abt. II, österr. Akad. Wiss., Math.-Naturw. Kl. **186** (1977), 263-280.

[29] W. WUNDERLICH: *Über gefährliche Annahmen beim Clausenschen und Lambertschen Achtpunktproblem.* Sitzungsber. Bayer. Akad. Wiss. 1978, 23-46.

[30] W. WUNDERLICH: *Windschiefe Gelenksechsecke mit schneidenden Diagonalen.* Rad Jugosl. Akad. Zagreb **382** (1978), 115-127.

[31] W. WUNDERLICH: *Das Lambertsche Sechspunktproblem und seine gefährlichen Fälle.* Österr. Z. Vermessungsw. u. Photogrammetrie **67** (1979), 33-42.

[32] W. WUNDERLICH: *Eine merkwürdige Familie von beweglichen Stabwerken.* Elem. Math. **34** (1979), 132-137.

[33] W. WUNDERLICH: *Snapping and shaky antiprisms.* Math. Magazine **52** (1979), 235-236.

[34] W. WUNDERLICH: *Neue Wackelikosaeder.* Anz. österr. Akad. Wiss., Math.-Naturwiss. Kl. **117** (1980), 28-33.

[35] W. WUNDERLICH: *Wackelige Doppelpyramiden.* Anz. österr. Akad. Wiss., Math.-Naturwiss. Kl. **117** (1980), 82-87.

[36] W. WUNDERLICH: *Zur projektiven Invarianz von Wackelstrukturen.* Z. Angew. Math. Mech. **60** (1980), 703-708.

[37] W. WUNDERLICH: *Wackeldodekaeder.* Math. stat. Sekt. FZ Graz **149** (1980), 1-8.

[38] W. WUNDERLICH: *Wackelikosaeder.* Geom. Dedicata **11** (1981), 137-146.

[39] W. WUNDERLICH: *Projective invariance of shaky structures.* Acta Mechanica **42** (1982), 171-181.

[40] W. WUNDERLICH: *Kipp-Ikosaeder I.* Elem. Math. **36** (1981), 153-158.

[41] W. WUNDERLICH: *Kipp-Ikosaeder II.* Elem. Math. **37** (1982), 84-89.

[42] W. WUNDERLICH: *Ringartige Wackelpolyeder.* Anz. österr. Akad. Wiss., Math.-Naturwiss. Kl. **119** (1982), 71-77.

[43] W. WUNDERLICH: *Wackeldodekaeder.* Elem. Math. **37** (1982), 153-163.

[44] W. WUNDERLICH: *Über Ausnahmefachwerke, deren Knoten auf einem Kegelschnitt liegen.* Acta Mechanica **47** (1983), 291-300.

[45] W. WUNDERLICH, C. SCHWABE: *Eine Familie von geschlossenen gleichflächigen Polyedern, die fast beweglich sind.* Elem. Math. **41** (1986), 88-98.

[46] W. WUNDERLICH: *Fast bewegliche Oktaeder mit zwei Symmetrieebenen.* Rad Jugosl. Akad. Zagreb **428**, Mat. Znan. **6** (1987), 129-135.

[47] W. WUNDERLICH: *Shaky polyhedra of higher connection.* Publ. Math. Debrecen **37** (1990), 355-361.