

prevela KSENIJA HORVATIĆ-BALDASAR

Hellmuth Stachel

Čemu služi nacrtna geometrija?

Ovo je zauzimanje za nacrtnu geometriju. Od svojih je početaka nacrtna geometrija metoda za proučavanje 3D geometrije preko 2D slika koja nudi uvid u unutrašnju strukturu i metrička svojstva prostornih objekata, postupaka i principa. Obrazovanje s nacrtnom geometrijom omogućuje razvijanje intelektualnih sposobnosti studenata za prostornu percepciju. Crteži nas vode kroz geometriju, ali nisu njezin glavni cilj.

1 Uvod

Ova je konferencija posvećena Rudolfu BEREISU koji se rodio prije točno 100 godina. Kada je 1957. započeo svoju profesorsku karijeru, ovdje na Tehničkom univerzitetu u Dresdenu, bio je pun planova i ideja. Njegovo je nadahnuće djelovanje bilo posvećeno unapređivanju nacrtne geometrije (NG). Planirao je seriju udžbenika. Sudbina je međutim odlučila drukčije: umro je nakon devet godina. Tako je objavljen samo prvi dio zamišljenog ciklusa [1].

Svrha je ovog prikaza objasniti čemu služi nacrtna geometrija, predmet koji je na znanstvenoj ljestvici najbliži matematičkom području, ali je ujedno blizak arhitekturi, strojarstvu i inženjerskoj grafici. Započinjem s definicijama i prilažem nekoliko primjera kako bih pokazao da nacrtna geometrija omogućuje razvijanje studentskih intelektualnih sposobnosti za prostornu percepciju (vidi dijagram u [15], sl. 5.), te da je stoga od neosporne važnosti za sve inženjere i liječnike te znanstvenike prirodnih znanosti.

2 Kako definirati nacrtnu geometriju

Čini se da je u mnogim američkim udžbenicima inženjerske grafike, primjerice [2, 6], sadržaj nacrtne geometrije sveden samo na standardne konstrukcije, kao što su određivanje prave veličine dužine ili presjeka dvaju ravninskih mnogokuta u trodimenzionalnom prostoru. Za takvo je shvaćanje nacrtne geometrije zacijelo prilično neobično da je R. BEREIS planirao seriju udžbenika iz tog predmeta.

2.1 Nacrtna geometrija u Europi

Kako bismo lakše objasnili važnost nacrtne geometrije u središnjoj Europi, započeti ćemo s definicijama iz njemačkih udžbenika objavljenih u posljednjih pedeset godina:

- J. KRAMES definirao je u [9]:

”Darstellende Geometrie” ist die Hohe Schule des räumlichen Denkens und der bildhaften Wiedergabe [u slobodnom prijevodu: NG je visoko umijeće promišljanja prostora i njegovoga grafičkog predočavanja].

Definiciju je citirao i R. BEREIS [1].

- H. BRAUNER je prihvatio je preporuku E. KRUPPA i dao je prednost nazivu ‘Konstruktive Geometrie’ [Konstruktivna geometrija] umjesto Nacrtna geometrija. On je definirao u [4]:

’Konstruktive Geometrie’ umfasst das Studium von Objekten des Anschauungsraumes unter Verwendung jener Methode, die an der graphisch dargestellten Figur durch Konstruktion und Rechnung operiert [’Konstruktivna geometrija’ analizira 3D objekte sredstvima grafičkih ili matematičkih metoda primijenjenih na 2D slike].

- F. HOHENBERG je u svom udžbeniku [7] usmjeren na primjenu nacrtne geometrije u tehnologiji:

’Konstruktive Geometrie’ soll geometrische Formen und Vorgänge verstehen, vorstellen, gestalten und zeichnen lehren [’Konstruktivna geometrija’ uči kako razumjeti, zamišljati, odrediti i crtati geometrijske oblike].

- W.-D. KLIX u svom nedavno objavljenom udžbeniku [8] daje prošireno objašnjenje:

”Darstellende Geometrie” ist wie kaum ein anderes Lehrgebiet geeignet, das für jede ingenieurmässige konstruktiv-schöpferische Tätigkeit

notwendige räumliche Vorstellungsvermögen zu entwickeln sowie die Fähigkeit auszubilden, räumlich Gedachtes richtig und damit auch anderen verständlich darzustellen [NG je jedinstvena u unapređivanju prostornog razmišljanja, temeljnog za svaku stvaralačku inženjersku aktivnost, i vježbanju sposobnosti grafičkog izražavanja prostornih ideja kako bi bile svakome razumljive].

Na kraju bih ukratko želio zaključiti sljedeće.¹

Definicija:

Darstellende Geometrie umfasst das auf Bilder gestützte Studium von Formen, Vorgängen und Gesetzmässigkeiten der Raumgeometrie.

[NG je metoda proučavanja 3D geometrije s pomoću 2D slika. Omogućuje uvid u strukturu i metrička svojstva prostornih objekata, postupaka i principa.]

Charakteristisch für Darstellende Geometrie ist das Wechselspiel

[Za NG je tipično uzajamno djelovanje]

a) *zwischen der räumlichen Situation und deren bildlicher Darstellung*

[između 3D situacije i njezine 2D reprezentacije]

b) *zwischen anschaulichem Erfassen und begrifflichem Schliessen*

[između intuitivnog razumijevanja i strogog logičkog zaključivanja].

Prema tome kolegiji iz nacrtne geometrije u središnjoj Europi ne pokrivaju samo teoriju projiciranja nego i tehnike modeliranja za krivulje, plohe i tijela dajući ujedno uvid u veliku raznolikost geometrijskih oblika. Pritom su uključena neka diferencijalno-geometrijska svojstva krivulja i ploha te dio analitičke geometrije [12, 13]. Razvijanje i usavršavanje studentskih vještina u rješavanju problema dodatni je cilj tih kolegija.

2.2 G. MONGEOVA definicija

Gaspard MONGE (1746.-1818.) smatra se osnivačem znanstvene nacrtne geometrije. No, to ne znači da je on sam razvio sve grafičke metode. Naprotiv, većinu se može pronaći u prijašnjim knjigama, primjerice u onima Amédée François FREZIERA.

Ipak, G. MONGE bio je najdjelotvorniji znanstvenik i promicatelj koji je izdavanjem svoje knjige 'Leçons de

géométrie descriptive' (1799.) proširio ideje o nacrtnoj geometriji iz Francuske po cijeloj Europi. U [10], str. 1, nalazimo sljedeće uvodne iskaze:

La Géométrie descriptive a deux objets:

- **le premier, de donner les méthodes pour représenter** sur une feuille de dessin qui n'a que deux dimensions, savoir, longueur et largeur, tous les corps de la nature qui en ont trois, longueur, largeur et profondeur, pourvu néanmoins que ces corps puissent tre définis rigoureusement.
- **Le second objet est de donner la manière de reconnaître**, d'après une **description exacte**, les formes des corps, et d'en **déduire toutes les vérités qui résultent et de leur forme et de leurs positions respectives.**

^a[Nacrtna geometrija ima dva cilja:

- Prvo, ona treba dati metode po kojima se na crtačem papiru, koji ima samo dvije dimenzije, duljinu i širinu, mogu prikazati sve prostorne tvorevine, koje imaju tri dimenzije, duljinu, širinu i visinu, a uz pretpostavku da se te tvorevine mogu točno definirati.
- Drugo, ona treba dati postupak, po kojem se iz točnog crteža neke prostorne tvorevine može upoznati njezin oblik, te mogu izvesti svi zakoni koji izlaze iz oblika i međusobnog položaja njezinih dijelova]

^aU izvornom članku francuski tekst nije preveden. Uredništvo navodi prijevod iz knjige J. JUSTINIJANOVIĆ: *Nacrtna geometrija*, Sveučilište u Zagrebu, Zagreb, 1961.

To dokazuje da dva glavna cilja nacrtne geometrije - zamišljanje i analiziranje 3D objekata - postoje od njezinog osnivača. Ta dva cilja mogu se pronaći i u novim enciklopedijama, poput BROCKHAUS [5]:

Darstellende Geometrie, Teilgebiet der Mathematik,... *Ziel der DG ist sowohl das Darstellen von dreidimensionalen Gebilden... als auch die Interpretation vorliegender Bilder..*

[NG=subjekt matematike... Cilj je NG prikazivanje 3D objekata... kao i interpretacija danih slika...]

2.3 Odabir naziva

Znakovito je da se riječ 'crtanje' ne pojavljuje u MONGEOVOJ definiciji. U nacrtnoj geometriji crtanje² *uvodi u geometriju* (usporedi [14]), ali joj nije glavna svrha; predajemo geometriju umjesto konstrukcijske tehnike. Valja uočiti da na francuskom 'descriptive' znači 'opisan', 'predočen' ali ne nužno 'grafički opisan slikom'.

¹Nastavljam s dvojezičnim verzijama i naglašavam da je njemačka verzija originalna. Moglo bi se dogoditi da moj engleski prijevod ne izražava egzaktno značenje njemačkog iskaza.

²Priča se da je Felix KLEIN jednom izjavio: "Među svim matematičarima, geometričari imaju prednost da mogu vidjeti ono što proučavaju."



Slika 1: Spomenik G. MONGEU, Place de Monge, Beaune (mjesto rođenja), Dep. Côte-d'Or, Francuska

Štoviše, u javnosti je nacrtana geometrija postala pogrešnim sinonimom za 'ručno crtanje slika 3D objekata'. Kako je tijekom posljednjih desetljeća ručno crtanje tradicionalnim priborom zamijenjeno s CAD-om ili matematičkim softverom s grafičkim outputom, često mnogi zaključuju da je nacrtana geometrija zastarjela. No to je sasvim pogrešno i upravo suprotno: oni s dobrim znanjem nacrtne geometrije sposobni su proširiti upotrebu CAD programa, budući da je komunikacija obično zasnovana na *pogledima*. Što je snažniji i sofisticiraniji softver za modeliranje, to je potreban viši nivo geometrijskog znanja. Loš dizajner neće nikad postati dobar samo upotrebom CAD-a umjesto tradicionalnih pomagala. Zbog sličnih se razloga važnost matematike i dalje povećava, iako računala preuzimaju dio povezan s računanjem.

Druga pogrešna interpretacija nacrtne geometrije je u tome da se smatra samo teoretskim, isključivo 'akademskim' predmetom. F. HOHENBERG uvjerljivo osporava to mišljenje u svom udžbeniku [7]. Na mnogim je primjerima pokazao da je za stvarni svijet bitna primjena nacrtne geometrije.

U pokušajima obrane pravog značenja nacrtne geometrije bilo je mnogo pokušaja preimenovanja tog predmeta. Njezina je primjenjivost isticana uporabom naziva 'tehnička geometrija' ili 'primijenjena geometrija' umjesto nacrtne geometrije. Kao što je već rečeno drugi je izbor 'konstruktivna geometrija' - 'konstruktivna' u figurativnom značenju. To bi moglo značiti da u ovom slučaju nije uporabljeno samo ručno crtanje nego i matematičko izračunavanje.

Zapravo izvorna MONGEOVA definicija nacrtne geometrije svojim širokim značenjem pokriva sva ta gledišta. Dakle, smatram da je originalni naziv još uvijek prikladan. Samo strateški razlozi (primjerice radi ojačavanje položaja nacrtne geometrije u popisu kolegija) mogu opravdati nove i možda atraktivnije nazive.

I za one koji vole prevoditi 'descriptive' s 'grafički opisna' dodajem *Nacrtana geometrija je više od 'nacrtne' geometrije kao što je 'geometrija' mnogo više od njezina izvornog značenja – 'mjerenje Zemlje'*.

3 Što bi studenti trebali pamtiti

Za procjenu obrazovnog učinka bilo kojeg predmeta u popisu kolegija može se pokušati utvrditi što je ostalo u pamćenju studenata nakon što su svi detalji zaboravljeni. Želim potvrditi da čak i slabim studentima nacrtana geometrija omogućuje razvoj sljedećih sposobnosti:

- shvatiti prostorne objekte iz danih glavnih pogleda i
- razlučiti posebne poglede. Osim toga
- studenti dobivaju uvid u geometrijske idealizacije (apstrakcije), raznolikost geometrijskih oblika i geometrijsko razmišljanje.

Prve dvije sposobnosti čine se elementarnima. Ipak, te su intelektualne sposobnosti tako fundamentalne da mnogi kasnije zaboravljaju koliko su teško morali raditi za njihovo stjecanje.

3.1 Važnost glavnih pogleda

Glavni pogledi - *pogled odozgo*, *pogled naprijed* i *pogled sa strane* - više ili manje su apstraktni jer ne odgovaraju osobnom vizualnom dojmju. Ipak apstrakcija sve to pojednostavnjuje. U većini slučajeva glavni pogledi pokazuju bitna svojstva prostornih struktura, a ispitivanje tih ravninskih pogleda mnogo je lakše, nego usredotočiti se na pravu 3D strukturu.

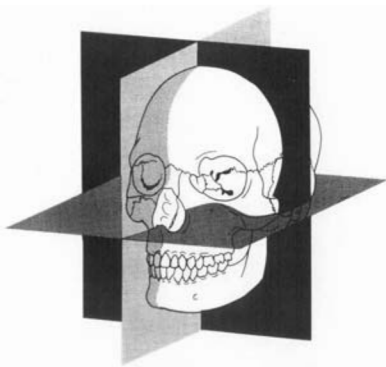
Ipak treba vježbati da se usvoji ta vrsta predočavanja i da se shvati oblik bilo kojeg 3D objekta upravo na temelju glavnih pogleda. Nitko neće posumnjati u potrebu trajnog treninga sportaša. Ali u slučaju nacrtne geometrije često se

odbacuje ta potreba pa se govori o čisto akademskom predmetu kao kada se, primjerice, u uvodnim vježbama dva trokuta u prostoru moraju presjeći.

Liječnici često cijene svoje obrazovanje iz nacrtne geometrije. U anatomiji mnogo jednostavnije shvaćaju tok krvnih žila ili živaca, uočavajući ih upravo glavnim pogledima. I u ortopediji su sposobni shvatiti kako ljudski zglobovi funkcioniraju i zašto iščašenje uzrokuje različite smetnje.

Nedavno je austrijska televizija uživo prenosila operaciju na ljudskoj lubanji: Kirurg je trebao ispraviti iščašenje kosti na licu nastalo u saobraćajnoj nesreći. U predoperativnom je zahvatu ispravan položaj kosti bio označen na zaslonu. U pretapanju slika taj je virtualni položaj kombiniran s aktualnim. Rad se kirurga, dakle, sastojao u tome da ta dva položaja ručno izjednači na pacijentu.

Kako je kirurg kontrolirao svoj rad? Pažljivo je ispitao tri glavna pogleda jer su oni omogućavali rastaviti stvarni 3D pomak u ravninske pokrete.



Slika 2: Objasnjenje glavnih pogleda u udžbeniku za stomatologe

3.2 Umijeće određivanja posebnih pogleda

Aksonometrijski pogledi su važni i svakome shvatljivi. Primjereni su za podsjećanje na poznati objekt ili za uspoređivanje sa stvarnim objektom u blizini. Ipak se ni kut, ni duljina, ni ravninski oblik ne pojavljuju u pravoj veličini. Ortogonalnost se može zamisliti samo s pomoću nekih dodatnih pretpostavki, zasnovanih na iskustvu ili procjeni. Dakle, ti pogledi nisu nikad dovoljni za 'description exacte', kao što to zahtijeva MONGEOVA definicija.³

Za detaljnu analizu 3D objekta često posebni pogledi (pomoćni pogledi), koji ravnine prikazuju kao pravce a pravce kao točke, otkrivaju stvarnu prostornu situaciju. Takvi pogledi često su ključ rješavanja 3D problema. Smatram da su ti posebni pogledi uzvišeno umijeće nacrtne geometrije. Studenti samo u kolegiju iz nacrtne geometrije

uče koji uvjeti u posebnim pogledima trebaju biti ispunjeni i kako se mogu odrediti.

Sljedeći primjer (sl. 3. [11]) zorno će predočiti prednosti posebnih pogleda:

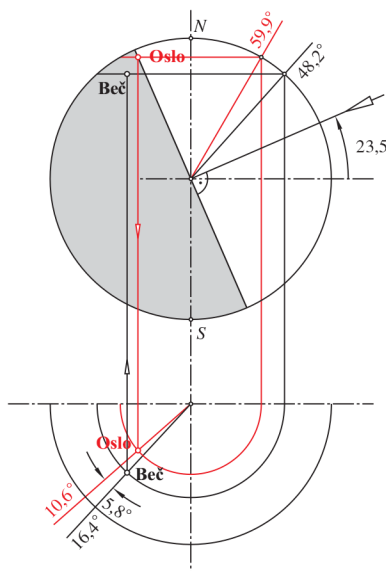
Primjer: Gdje sunce ranije izlazi 21. lipnja, u Oslu ili u Beču?

grad	istočna duljina	sjeverna širina
Oslo	10.6°	59.9°
Beč	16.4°	48.2°

Na slici 3 određujemo pogled naprijed sa sunčevim zrakama koje su paralelne s ravinom slike. Tada pretpostavimo da je to pogled u trenutku kada sunce u Oslu izlazi 21. lipnja. Čim se Beč prikaže u tom pogledu, lako se uočava odgovor na postavljeno pitanje.

Taj je pogled također koristan jer može razjasniti dodatne probleme kao i one s više detalja, primjerice:

- Može li se dogoditi da tijekom jednogodišnjeg razdoblja sunce izađe istodobno u Oslu i u Beču?
- Povećati preciznost obraćajući pozornost činjenici da je sunce zbog *refrakcije* u atmosferi približno 0.6° ispod lokalnog horizonta kada se promatraču na zemlji čini da izlazi.
- U zoni astronomske zore sunce je između 6° i 18° ispod lokalnog horizonta. Istražujući poseban pogled koji smo prije predstavili, lako je shvatiti zašto je vrijeme dnevne zore kraće što je promatrač bliže ekvatoru.



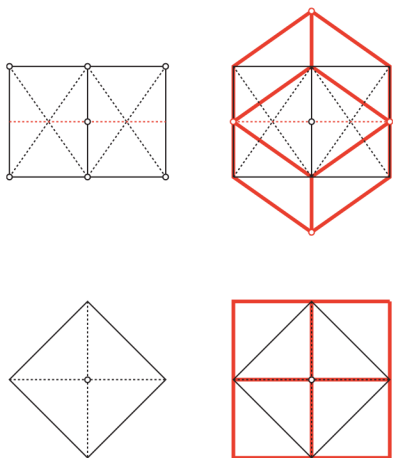
Slika 3: Gdje sunce 21. lipnja ranije izlazi, u Oslu ili u Beču?

³Isto vrijedi za slike koje su *osjenčane* poput fotografije i koje mogu biti krajnje varljive. Čiste *linijske grafike* izgledaju manje privlačno, ali su apstraktnije. No to je često prednost, jer kad je uključeno više informacija, linijske grafike pružaju mogućnost usredotočivanja na bitno.

3.3 Pogledi su vodič u prostornu geometriju

Nije mi poznato je li itko sposoban manipulirati virtualnim 3D objektima, bez ikakvog pomagala i samo u imaginaciji, te može li predočiti kako ti objekti izgledaju u različitim položajima. Možda kipari ili piloti imaju tu sposobnost. Osobno je zaista nemam i *rompski dodekaedar* služi mi kao uvjerljiv primjer.

Taj se konveksni poliedar može izgraditi podizanjem kvadratske piramide sa 45° nagnutim plohama iznad svake pobočke kocke (vidi sl. 4.).



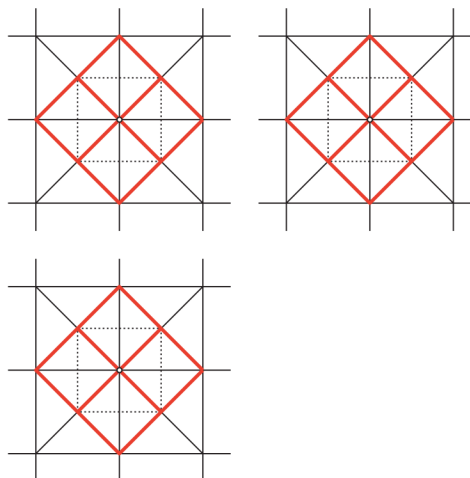
Slika 4: Kocka i rompski dodekaedar

Budući da svaka dva komplanarna trokuta mogu biti slijepljena i tako tvoriti romb, taj poliedar ima 12 kongruentnih pobočki te se čini da je sasvim shvatljiv. Unatoč tome nisam sposoban zatvorenim očima zamisliti kako taj poliedar izgleda odozgo kad je s jednom pobočkom položen na stol. Srećom, jednostavna prostoručna skica omogućuje predočavanje tog pogleda kao i sljedećih važnih svojstava:

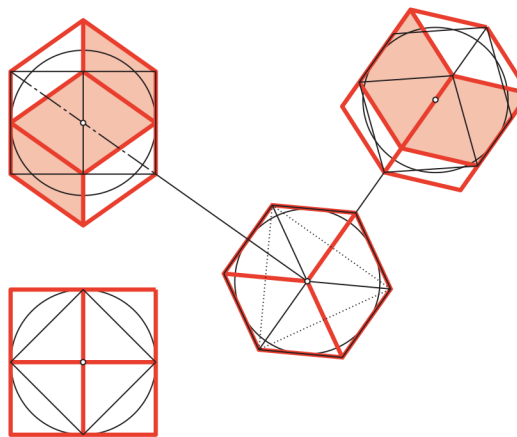
- Postoje dva tipa vrhova rompskog dodekaedra: 8 vrhova pripada početnoj kocki; ostalih 6 su zrcalne slike središta kocke pri zrcaljenju na ploham.
- Rompski dodekaedar je prodor triju kvadratskih prizmi od kojih po dvije imaju ortogonalne osi (vidi sl. 5.).
- Rompski dodekaedar je prodor heksagonalnih prizmi čije su osi u smjeru dijagonala kocke. Postoje lanci od 6 susjednih ploha (vidi zasjenjene rombove na sl. 6.) koji su smješteni na istoj heksagonalnoj prizmi.

⁴Striktno bi se mogao nazvati *prvim* rompskim dodekaedrom. Prema S. BILINSKOM [3] postoji i *drugi*. U tom slučaju dvostrani kut ima 144° . Taj je poliedar dobiven iz triakontaedra, duala od ikosidodekaedra, odbacivanjem dviju prizmatičnih zona i spajanjem preostalih komada. Autor je zahvalan H. MARTINIJU što je usmjerio svoju pozornost na tu činjenicu.

- Bočni i stražnji zidovi saća pripadaju rompskom dodekaedru.
- Svaki dvostrani kut ima 120° i u njemu je jedna unutarnja kugla (dodiruje sve bridove početne kocke).
- Rompski dodekaedar⁴ dualan je kubnom oktaedru.
- Rompski dodekaedar je prostorno punjenje poliedra. To se može zamisliti tako da se započne s '3D šahovskom pločom' izgrađenom od kocaka. Tada se 'bijele' kocke mogu razdijeliti u 6 kvadratskih piramida. Svaka se može pridodati susjednoj 'crnoj' kocki i proširiti u rompski dodekaedar.



Slika 5: Rompski dodekaedar kao prodor triju kvadratskih prizmi.



Slika 6: Različiti pogledi rompskog dodekaedra.

Literatura

- [1] R. BEREIS: *Darstellende Geometrie I*. Akademie-Verlag, Berlin 1964.
- [2] G.R. BERTOLINE, E.W. WIEBE, C.L. MILLER, L.O. NASMAN: *Engineering Graphics Communication*. R. D. Irwin Inc., Chicago 1995, Chapter 11, pp. 597-695.
- [3] S. BILINSKI: *Über die Rhombensoeder*. Glasnik mat. fiz. i astr. **15**, 251-263 (1960).
- [4] H. BRAUNER: *Lehrbuch der konstruktiven Geometrie*. Springer-Verlag, Wien 1986.
- [5] *Brockhaus, die Enzyklopädie in 24 Bänden*. 20. Aufl., F.A. Brockhaus GmbH, Leipzig 2001.
- [6] J.H. EARLE: *Engineering Design Graphics*. 4th ed., Addison-Wesley Publ. Comp., Reading/Mass. 1983, chapter 27, pp. 550-610.
- [7] F. HOHENBERG: *Konstruktive Geometrie in der Technik*. 3. Aufl., Springer-Verlag, Wien 1966.
- [8] W.-D. KLIX: *Konstruktive Geometrie, darstellend und analytisch*. Fachbuchverlag, Leipzig 2001.
- [9] J.L. KRAMES: *Darstellende und kinematische Geometrie für Maschinenbauer*. 2. Aufl., Franz Deuticke, Wien 1967.
- [10] G. MONGE: *Géométrie descriptive*. Nouvelle édition, J. Klostermann fils, Paris 1811.
- [11] H. STACHEL: *Darstellende Geometrie und Graphische Datenverarbeitung*. In J.L.W. ENCARNAÇÃO, J. HOSCHEK, J. RIX (eds.): *Geometrische Verfahren der Graphischen Datenverarbeitung*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg 1990, 168-179.
- [12] H. STACHEL: *Descriptive Geometry, the Art of Grasping Spatial Relations*. Proceedings 6th ICECGDG, Tokyo 1994: vol. 2, 533-535.
- [13] H. STACHEL: *Why shall we also teach the theory behind Engineering Graphics*. Institut für Geometrie, TU Wien, Technical Report **35** (1996).
- [14] H. STACHEL: *A Way to Geometry Through Descriptive Geometry*. Прикладна геометрія інженерна графіка (Applied Geometry and Engineering Graphics, Kyiv) **70**, 14-19 (2002).
- [15] K. SUZUKI: *Activities of the Japan Society for Graphic Science - Research and Education*. J. Geometry Graphics **6**, no. 2, 221-229.
- [16] W. WUNDERLICH: *Darstellende Geometrie I, II*. BI-Hochschultaschenbücher Bd. 96, 133, Bibliographisches Institut, Mannheim 1966, 1967.