

Zur Bewegung von Ellipsen auf Ellipsoiden

H. Stachel

Der Erinnerung an Walter Wunderlich und Heinrich Brauner gewidmet

1 Einführung



W. Wunderlich (1910–1998)



H. Brauner (1928–1990)

Vor 40 Jahren gab es am Institut für Geometrie der TU Wien zwei herausragende Persönlichkeiten, die Professoren Walter Wunderlich (1910–1998) und Heinrich Brauner (1928–1990). Wunderlich war weltbekannt durch seine rund 180 wissenschaftlichen Publikationen und seine Hochschul-Taschenbücher über Darstellende Geometrie und Ebene Kinematik. Diese zeichnen sich aus durch elegante Formulierungen und Beweise, oft gestützt auf einprägsame Figuren, und sie bieten eine Fülle geometrischer Kostbarkeiten.

Heinrich Brauner war ein Verfechter der deduktiven Methode. Auf der Grundlage klar formulierter Axiome und Begriffe entwickelte er die Theorien vorwiegend durch ‘begriffliches Schließens’, wie er es nannte. Berühmt sind seine Monographien zur Projektiven Geometrie und zur Differentialgeometrie, aber auch seine Lehrbücher zur Konstruktiven Geometrie sowie zur Baugeometrie.

Beide waren hervorragende Vortragende und inspirierende Lehrer, und jeder hatte seine Fans innerhalb der Gemeinschaft der Lehramtskandidaten. Leider verstarb Brauner viel zu früh, mit 62 Jahren, nach einem langen schweren Leiden. Neben seiner Forschungstätigkeit hatte er sich auch unschätzbare Verdienste um die Erhaltung und Modernisierung des Unterrichts aus Darstellender Geometrie an AHS und BHS erworben. In vielen Fortbildungsseminaren sorgte er für zum Teil heftige Diskussionen mit seinem Bemühen, konsequente Bezeichnungen und präzise Beweise einzuführen. Legendär sind z.B. sein Eintreten für Rechts-Koordinatensysteme, für die konsequente Benutzung des mathematischen Abbildungsbegriffes und, damit verbunden, für die Unterscheidungen von ‘Riss’ und ‘Projektion’. Aus Sicht des heutigen Unterrichts sind dies wohl ‘tempi passati’.

In einem meiner ersten Gespräche mit Brauner, nach meinem Dienstantritt als Nachfolger Wunderlichs, sprachen wir über die Kinematik. Auch Brauner anerkannte die hohe Qualität von Wunderlichs Kinematikbuch [9]. Aber er bemängelte, dass dieses Buch zwar voll von verschiedensten Bewegungen ist, aber nirgends definiert ist, was eine Bewegung eigentlich ist. Und dann berichtete er, dass es eine dreiparametrische Menge von Ebenen gäbe, die ein gegebenes Ellipsoid nach Ellipsen schneiden. Eine Ellipse ist jedoch durch ihre beiden Achsenlängen bereits eindeutig bestimmt. Demnach muss es Ellipsen geben, zu welchen unendlich viele kongruente Kopien auf dem Ellipsoid existieren, die also auf dem Ellipsoid bewegt werden können. Brauner endete mit der rhetorische Frage: “Was weiß man über diese Bewegungen?”

Brauner hatte mir damals nicht verraten, dass er selbst bereits darüber publiziert hatte (siehe [2]) und auch noch eine zweite Arbeit [3] über die Bewegung einer gleichseitigen Hyperbel auf einem gleichseitigen hyperbolischen Paraboloid geschrieben hatte. Beide Arbeiten Brauners zeigen deutlich den damals noch vorherrschenden Einfluss seines Doktorvaters Wunderlich.

Die folgende Abhandlung ist eine späte Antwort auf das von Brauner gestellt Problem, von dem er selbst in [3] schreibt, dass “sich die Untersuchung der Bewegung des erzeugenden Kegelschnittes im allgemeinen Fall außerordentlich schwierig gestaltet”. Natürlich stehen uns heute ganz andere Mittel zur Visualisierung zur Verfügung, und auch Brauners algebraische Untersuchungen in [2] fallen uns dank der verfügbaren Computer-Algebra-Systeme um vieles leichter.

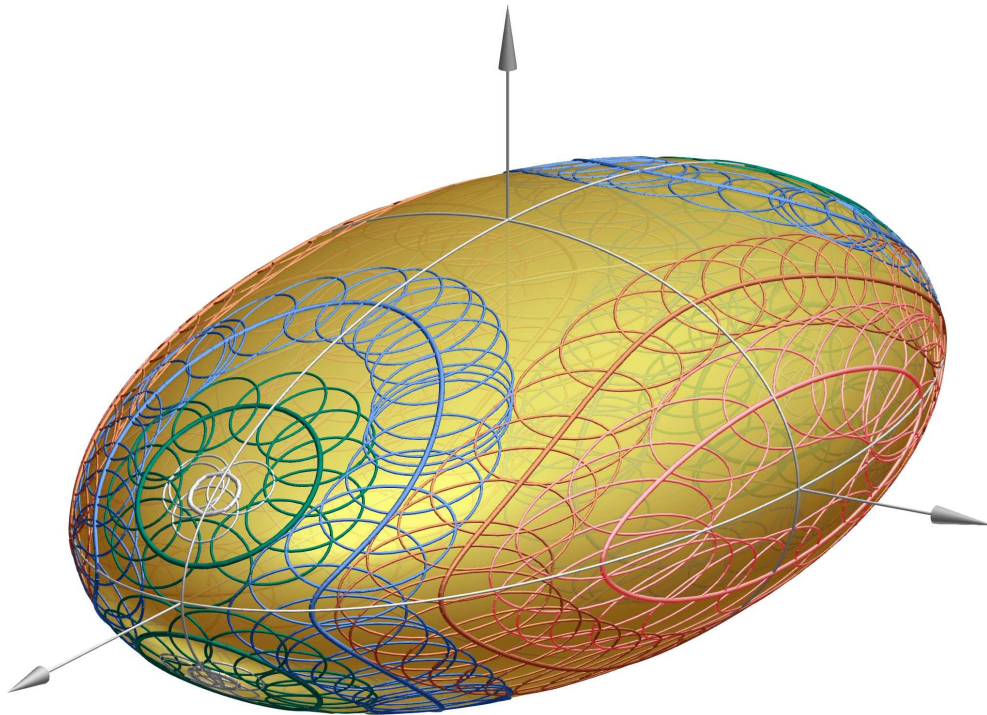


Abbildung 1: Kongruente Ellipsen auf einem Ellipsoid (Graphik: Franz Gruber).

Eine besondere Anregung zu diesem Beitrag war die von Franz Gruber (Universität für Angewandte Kunst Wien) bereitgestellte graphische Darstellung derartiger Bewegungen (siehe Abb. 1), die er binnen kurzer Zeit mit Hilfe eines numerischen Algorithmus produzieren konnte.

2 Konfokale Flächen

Es gibt triviale Beispiele von Kegelschnitten, die auf Quadriken beweglich sind. Dazu gehören die Kegelschnitte auf Drehquadriken und die Parabeln als Schiebkurven auf elliptischen und hyperbolischen Paraboloiden. Wir beschränken uns im folgenden auf das dreiachsige Ellipsoid

$$\mathcal{E}: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \text{ mit } a > b > c. \quad (2.1)$$

Das Diagramm in Abb. 2 zeigt die Halbachsen (a_e, b_e) aller auf \mathcal{E} möglichen Ellipsen e . Es wird sich zeigen, dass alle Ellipsen, die zu inneren Punkten des markierten Bereichs gehören, auf \mathcal{E} bewegt werden können. Die Achsenverhältnisse der in Frage kommenden Ellipsen unterliegen somit der Beschränkung

$$1 < \frac{a_e}{b_e} < \frac{a}{c}. \quad (2.2)$$

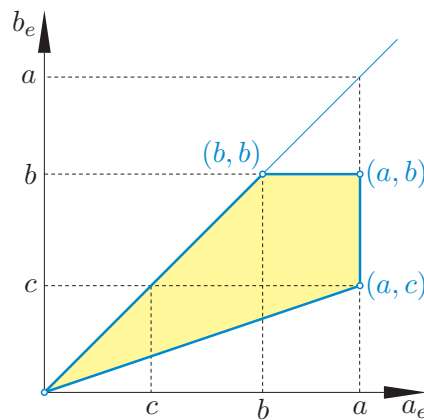


Abbildung 2: Die Halbachsen (a_e, b_e) der Ellipsen auf dem Ellipsoid \mathcal{E} mit den Halbachsenlängen a , b und c .

Für die Bestimmung kongruenter Ellipsen auf dem Ellipsoid \mathcal{E} ist wesentlich, dass zwei in parallelen Ebenen ε_1 und ε_2 gelegene Ellipsen $e_1, e_2 \subset \mathcal{E}$ stets homothetisch sind, d.h., parallele Achsen und gleiches Verhältnis der Achsenlängen haben. Die Mittelpunkte dieser Ellipsen liegen auf einer Durchmessergeraden, welche auch die Spitzen der längs ε_i ($i = 1, 2$) berührenden Tangentialkegel enthält. Diese Durchmessergerade schneidet \mathcal{E} in Punkten P mit zu ε_i paralleler Tangentialebene τ_P (Abb. 3).

Wichtig ist ferner, dass die Ellipsen e_i auch homothetisch sind zur Dupinschen Indikatrix in P . Man kann dies durch Rechnung bestätigen, oder das Ellipsoid durch eine geeignete Kollineation in das in P oskulierende Scheitelparaboloid überführen, wobei die zu τ_P parallelen Schnitte ähnlich transformiert werden. Die zu τ_P parallelen Schnitte des Scheitelparaboloids sind bekanntlich homothetisch zur Dupinschen Indikatrix (vgl. [7, p. 50] oder [4, p. 248]).

Daraus ergeben sich zwei wichtige Folgerungen: (i) Die Achsen der Ellipsen e_i sind parallel zu den Hauptkrümmungsrichtungen im Punkt P , und (ii) die Achsenlängen dieser Ellipsen verhalten sich wie die Kehrwerte der Wurzeln aus den Hauptkrümmungen κ_1 und κ_2 von \mathcal{E} im Punkt P , also

$$a_e : b_e = \sqrt{\kappa_1} : \sqrt{\kappa_2}, \quad (2.3)$$

sofern $\kappa_1 > \kappa_2$.

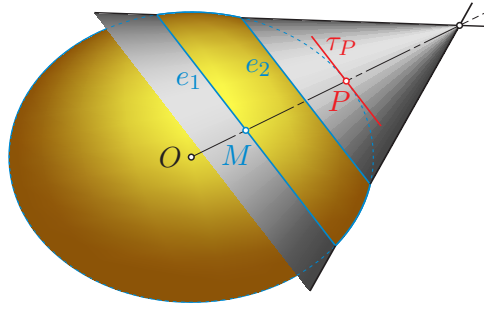


Abbildung 3: Schnitte eine Ellipsoids mit parallelen Ebenen sind homothetisch.

Die Krümmungslinien auf \mathcal{E} sind eng mit der Schar der zu \mathcal{E} konfokalen Quadriken verbunden, und dasselbe gilt übrigens auch für die Hauptkrümmungen. Deshalb wenden wir uns als nächstes dieser Konfokalschar zu (siehe [6, p. 187] oder [7, p. 80]). Deren Flächen sind bestimmt durch die Gleichungen

$$\frac{x^2}{a^2 + k} + \frac{y^2}{b^2 + k} + \frac{z^2}{c^2 + k} = 1 \quad (2.4)$$

mit $k \in \mathbb{R} \setminus \{-a^2, -b^2, -c^2\}$ als Scharparameter. In dieser Schar sind enthalten

$$\text{bei } \begin{cases} -c^2 < k < \infty & \text{dreiachsige Ellipsoide,} \\ -b^2 < k < -c^2 & \text{einschalige Hyperboloide,} \\ -a^2 < k < -b^2 & \text{zweischalige Hyperboloide.} \end{cases} \quad (2.5)$$

Konfokale Quadriken schneiden die gemeinsamen Symmetrieebenen nach konfokalen Kegelschnitten. Als Grenzfälle mit $k \rightarrow -c^2$ und $k \rightarrow -b^2$ ergeben sich

$$\begin{aligned} \text{die Fokalellipse } f_e: & \quad \frac{x^2}{a^2 - c^2} + \frac{y^2}{b^2 - c^2} = 1, \quad z = 0, \\ \text{und die Fokalhyperbel } f_h: & \quad \frac{x^2}{a^2 - b^2} - \frac{z^2}{b^2 - c^2} = 1, \quad y = 0. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Zusätzlich gibt es bei $k \rightarrow -a^2$ einen nullteiligen Kegelschnitt in der Ebene $x = 0$. Die Dualgleichungen der Quadriken (2.4) zeigen, dass diese Kegelschnitte zusammen mit dem absoluten Kegelschnitt die in der Linearschar enthaltenen singularen Flächen darstellen.

Durch jeden Raumpunkt $P = (\xi, \eta, \zeta)$ außerhalb der Koordinatenebenen, also mit $\xi\eta\zeta \neq 0$, gehen genau ein Ellipsoid, ein einschaliges und ein zweischaliges Hyperboloid. Dies zeigt sich, wenn man die Koordinaten von P in die Gleichung (2.4) einsetzt und die Nullstellen der entstehenden kubischen Gleichung für die Unbekannte k bestimmt. Diese drei Nullstellen definieren die *elliptischen Koordinaten* von P .

Die Tangentialebene τ_P in P an \mathcal{E} genügt der Gleichung

$$\tau_P: \frac{\xi}{a^2} x + \frac{\eta}{b^2} y + \frac{\zeta}{c^2} z = 1. \quad (2.7)$$

Für ihre Distanz h zum Mittelpunkt O von \mathcal{E} gilt

$$h^2 = \overline{O\tau_P}^2 = \frac{1}{\frac{\xi^2}{a^4} + \frac{\eta^2}{b^4} + \frac{\zeta^2}{c^4}}. \quad (2.8)$$

Die Flächennormale n_P von \mathcal{E} in P hat den Richtungsvektor

$$\mathbf{n}_P = \left(\frac{\xi}{a^2}, \frac{\eta}{b^2}, \frac{\zeta}{c^2} \right) \text{ mit } \|\mathbf{n}_P\|^2 = \frac{1}{h^2}. \quad (2.9)$$

Ähnliche Formeln gelten für alle anderen Flächen der Konfokalschar.

Wir konzentrieren uns von nun an auf Punkte P des Ellipsoids \mathcal{E} mit $k = 0$ und verwenden die Parameter (k_1, k_2) der durch P gehenden Hyperboloide, des einschaligen \mathcal{H}_1 und des zweischaligen \mathcal{H}_2 , als *elliptische* Koordinaten auf \mathcal{E} . Damit sind neben

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} + \frac{\zeta^2}{c^2} = 1 \quad (2.10)$$

auch, für $i = 1, 2$, die Gleichungen

$$\mathcal{H}_i: \frac{\xi^2}{a^2 + k_i} + \frac{\eta^2}{b^2 + k_i} + \frac{\zeta^2}{c^2 + k_i} = 1 \quad (2.11)$$

erfüllt, wobei die elliptischen Koordinaten (k_1, k_2) von P durch

$$-a^2 < k_2 < -b^2 < k_1 < -c^2 < 0 \quad (2.12)$$

eingegrenzt sind. Man beachte, beide elliptischen Koordinaten sind stets negativ. Die Ebenennormalen in P an \mathcal{H}_1 und \mathcal{H}_2 haben die Richtungen der Vektoren \mathbf{v}_1 bzw. \mathbf{v}_2 , wobei

$$\mathbf{v}_i = \left(\frac{\xi}{a^2 + k_i}, \frac{\eta}{b^2 + k_i}, \frac{\zeta}{c^2 + k_i} \right). \quad (2.13)$$

Zu gegebenen elliptischen Koordinaten (k_1, k_2) eines Punktes auf \mathcal{E} gibt es acht symmetrisch angeordnete Schnittpunkte von \mathcal{E} mit den beiden konfokalen Hyperboloiden. Die kartesischen Koordinaten (ξ, η, ζ) dieser Punkte ergeben sich aus

$$\xi^2 = \frac{a^2(a^2 + k_1)(a^2 + k_2)}{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)}, \quad \eta^2 = \frac{b^2(b^2 + k_1)(b^2 + k_2)}{(b^2 - c^2)(b^2 - a^2)}, \quad \zeta^2 = \frac{c^2(c^2 + k_1)(c^2 + k_2)}{(c^2 - a^2)(c^2 - b^2)} \quad (2.14)$$

durch verschiedene Vorzeichenkombinationen. Umgekehrt sind die elliptischen Koordinaten (k_1, k_2) eines gegebenen Punktes $P = (\xi, \eta, \zeta) \in \mathcal{E}$ die beiden Nullstellen der quadratischen Gleichung

$$k^2 + Lk + M = 0 \quad (2.15)$$

mit den Koeffizienten

$$\begin{aligned} L &= a^2 + b^2 + c^2 - \xi^2 - \eta^2 - \zeta^2 = \frac{(b^2 + c^2)\xi^2}{a^2} + \frac{(c^2 + a^2)\eta^2}{b^2} + \frac{(a^2 + b^2)\zeta^2}{c^2}, \\ M &= a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 - \xi^2(b^2 + c^2) - \eta^2(a^2 + c^2) - \zeta^2(a^2 + b^2) = \frac{a^2b^2c^2}{h^2}, \end{aligned} \quad (2.16)$$

mit $h^2 = \overline{O\tau_P}^2$ gemäß (2.8). Der zweite Ausdruck für L in (2.16) folgt aus dem ersten durch Multiplikation mit der linken Seite von (2.10). Multipliziert man denselben Faktor im ersten Ausdruck für M mit dem Term $a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2$, so entsteht der letzte Ausdruck in (2.16).

Die Differenz von je zwei Gleichungen aus (2.10) und (2.11) ergibt

$$\begin{aligned} \frac{\xi^2}{a^2(a^2 + k_i)} + \frac{\eta^2}{b^2(b^2 + k_i)} + \frac{\zeta^2}{c^2(c^2 + k_i)} &= \mathbf{n}_P \cdot \mathbf{v}_i = 0, \quad i = 1, 2, \quad \text{und} \\ \frac{\xi^2}{(a^2 + k_1)(a^2 + k_2)} + \frac{\eta^2}{(b^2 + k_1)(b^2 + k_2)} + \frac{\zeta^2}{(c^2 + k_1)(c^2 + k_2)} &= \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 0. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Es verschwinden also die Skalarprodukte je zweier der insgesamt drei Normalvektoren in P an \mathcal{E} , \mathcal{H}_1 und \mathcal{H}_2 . Dies beweist, dass die konfokalen Quadriken ein dreifach orthogonales Flächensystem bilden. Nach einem Satz von Ch. Dupin schneiden derartige Flächen einander in den Krümmungslinien (siehe, z.B., [6, p. 187] or [7, p. 80]). Die Krümmungslinien des Ellipsoids sind demnach, von den Hauptschnitten in den Symmetrieebenen abgesehen, Raumkurven vierter Ordnung (Abb. 4). In allen Punkten $P \in \mathcal{E}$ sind die beiden Hauptkrümmungsrichtungen durch die Flächennormalen der beiden Hyperboloide durch P bestimmt, also durch die Vektoren \mathbf{v}_1 und \mathbf{v}_2 aus (2.13).

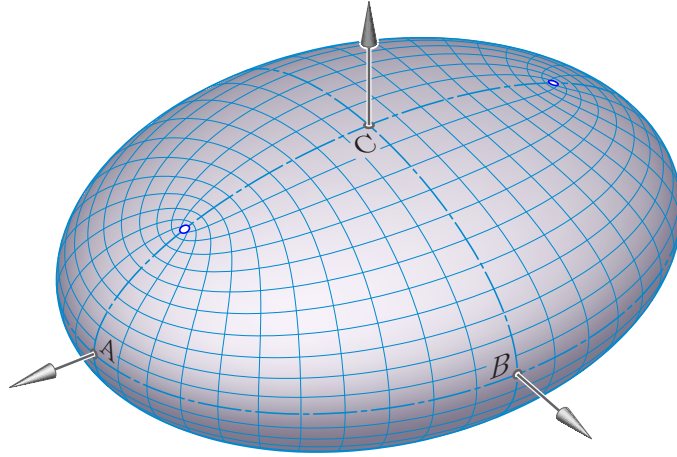


Abbildung 4: Krümmungslinien eines dreiachsigen Ellipsoids samt Nabelpunkten.

Aber auch die Hauptkrümmungen (κ_1, κ_2) in P hängen eng mit den elliptischen Koordinaten von P zusammen. Die in Abb. 5 dargestellte Konstruktion der Krümmungsmitte P^* der Ellipse e im Punkt P [5, p. 340–343] gilt in analoger Weise auch im Raum: Sind \mathcal{H}_1 und \mathcal{H}_2 die beiden konfokalen Hyperboloide durch den Punkt $P \in \mathcal{E}$, so sind die Pole T_1, T_2 der Tangentialebene τ_P bzgl. \mathcal{H}_1 und \mathcal{H}_2 die Krümmungsmitten der durch die Hauptkrümmungsrichtungen in P gelegten Normalschnitte von \mathcal{E} . Der Kürze wegen wird hier auf einen Beweis verzichtet.

Der Pol T_i von τ_P bzgl. des Hyperboloids \mathcal{H}_i ($i = 1, 2$) hat die Koordinaten

$$T_i = \left(\frac{\xi(a^2 + k_i)}{a^2}, \frac{\eta(b^2 + k_i)}{b^2}, \frac{\zeta(c^2 + k_i)}{c^2} \right) = (\xi, \eta, \zeta) + k_i \left(\frac{\xi}{a^2}, \frac{\eta}{b^2}, \frac{\zeta}{c^2} \right).$$

Als Distanz zu P folgt wegen (2.8) $\overline{PT_i} = -k_i/h$ und daher als zugehörige Hauptkrümmung

$$\kappa_i = 1/\overline{PT_i} = -\frac{h}{k_i}, \quad i = 1, 2. \quad (2.18)$$

Dies zeigt mit (2.3) einen einfachen Zusammenhang zwischen den Halbachsen (a_e, b_e) der bewegten Ellipse e und den elliptischen Koordinaten (k_1, k_2) des Punktes P , nämlich

$$a_e : b_e = \sqrt{\kappa_1} : \sqrt{\kappa_2} = \sqrt{-k_2} : \sqrt{-k_1}. \quad (2.19)$$

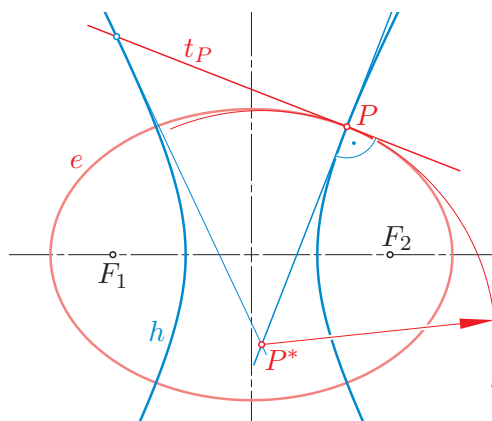


Abbildung 5: Die Krümmungsmitte P^* der Ellipse e in P ist der Pol der Tangent t_P bzgl. der konfokalen Hyperbel h durch P .

Dabei ist die Hauptachse von e parallel zum Normalvektor \mathbf{v}_2 an das zweischalige Hyperboloid \mathcal{H}_2 durch P .

Satz 1. *Damit die Ellipse e auf dem Ellipsoid \mathcal{E} bewegt werden kann, muss der zugehörige Punkt P auf \mathcal{E} (siehe Abb. 3) eine Kurve durchlaufen, längs welcher das Verhältnis der elliptischen Koordinaten $k_1 : k_2$ konstant ist.*

Für eine Parametrisierung einer derartigen Bahnkurve wählen wir $t := -k_2$ als Parameter und setzen

$$v := \frac{k_2}{k_1} = \frac{a_e^2}{b_e^2} = \text{konst.} \quad (2.20)$$

und somit $k_1 = t/v$. Aus (2.14) folgt für den im Oktanten $x, y, z > 0$ gelegenen Bogen

$$\mathbf{p}(t) = \left(\sqrt{\frac{a^2(a^2 - t/v)(a^2 - t)}{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)}}, \sqrt{\frac{b^2(b^2 - t/v)(b^2 - t)}{(b^2 - c^2)(b^2 - a^2)}}, \sqrt{\frac{c^2(c^2 - t/v)(c^2 - t)}{(c^2 - a^2)(c^2 - b^2)}} \right), \quad (2.21)$$

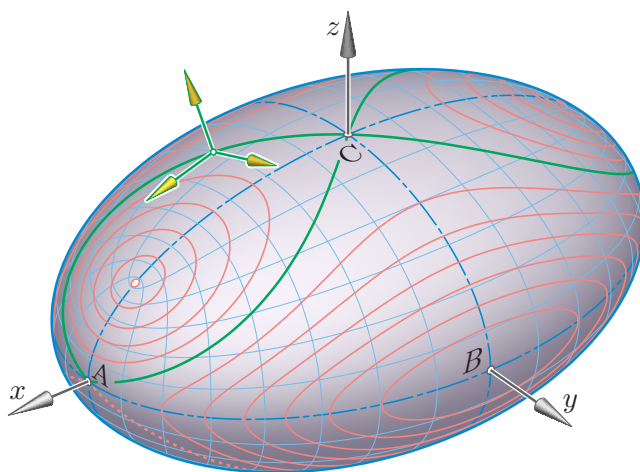


Abbildung 6: Kurven mit $\kappa_1 : \kappa_2 = \text{konst.}$ im Fall 2, $ac = b^2$, sowie Orientierung des Gangsystems bei der Bewegung einer Ellipse mit $a_e^2 : b_e^2 = \kappa_1 : \kappa_2$.

wobei wegen (2.11) der Kurvenparameter t begrenzt ist durch

$$\max\{b^2, vc^2\} \leq t \leq \min\{a^2, vb^2\}.$$

Spiegelungen an Koordinatenebenen erzeugen daraus schließlich geschlossene Kurven auf dem Ellipsoid. Diese Kurven wurden übrigens bereits von W. Wunderlich in [8, p. 680] diskutiert. Er spricht dort auch von einer Bewegung einer infinitesimal kleinen Ellipse auf dem Ellipsoid.

Hinsichtlich des Verlaufs dieser Kurven konstanter Hauptkrümmungsverhältnisse sind drei Typen dreiachsiger Ellipsoide zu unterscheiden, (1) $ac < b^2$ (Abb. 7), (2) $ac = b^2$ (Abb. 6) und (3) $ac > b^2$ (Abb. 8). Kurven mit $1 < v < \min\{a^2/b^2, b^2/c^2\}$ umrunden einen der Scheitel auf der y -Achse. Kurven mit $\max\{a^2/b^2, b^2/c^2\} < v < a^2/c^2$ umrunden jeweils einen Nabelpunkt. Die Kurven zu $v = a^2/b^2$ und $v = b^2/c^2$ sind bei Typ 2 identisch (siehe grüne Bahn in Abb. 6). Andernfalls (siehe punktierte Kurven in den Abbildungen 7 und 8) verläuft zwischen beiden eine Schar geschlossene Kurven, die bei Typ 1 etwa wie Diametralschnitte verlaufen, während sie bei Typ 3 Paare von Nabelpunkten umrunden.

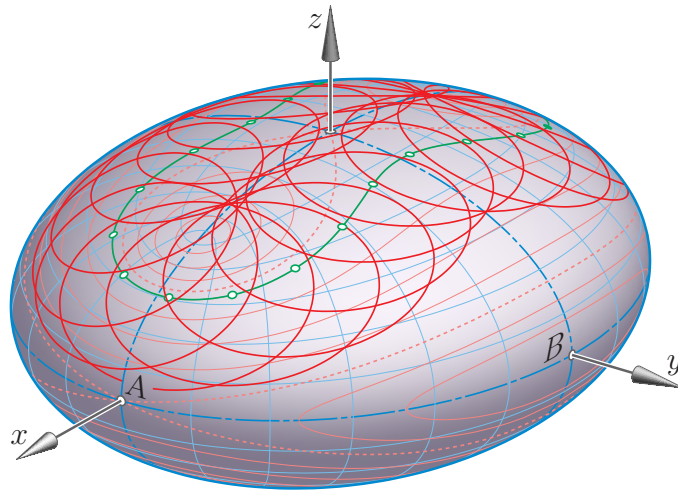


Abbildung 7: Bewegung einer Ellipse e auf einem Ellipsoid vom Typ 1

3 Die Bewegung einer Ellipse auf dem Ellipsoid

Ist eine zu bewegend Ellipse $e \subset \mathcal{E}$ gegeben, so bestimmt deren Achsenverhältnis $a_e : b_e$ mit (2.20) bereits die Bahn des Punktes P . Der Mittelpunkt M von e ist nun derart zwischen P und der Ellipsoidmitte O einzupassen, dass die Hauptachsenlänge die gewünschte Größe a_e hat. Das ist nur möglich, wenn e nicht größer ist als die Schnittellipse von \mathcal{E} mit der zu τ_P parallelen Durchmessersebene. Für deren Achsenlängen a_P und b_P gilt die überraschend einfache Formel

$$a_P = \sqrt{-k_2}, \quad b_P = \sqrt{-k_1}, \quad (3.1)$$

die bereits in [1, p. 517] zu finden ist.

Beweis: Nachdem die Richtungen der Achsen dieses Diametralschnittes bereits durch \mathbf{v}_1 und \mathbf{v}_2 aus (2.13) bekannt sind, ist ein $\lambda \in \mathbb{R}$ gesucht mit $\lambda \mathbf{v}_i \in \mathcal{E}$, also

$$\lambda^2 \left[\frac{\xi^2}{(a^2 + k_i)^2 a^2} + \frac{\eta^2}{(b^2 + k_i)^2 b^2} + \frac{\zeta^2}{(c^2 + k_i)^2 c^2} \right] = 1.$$

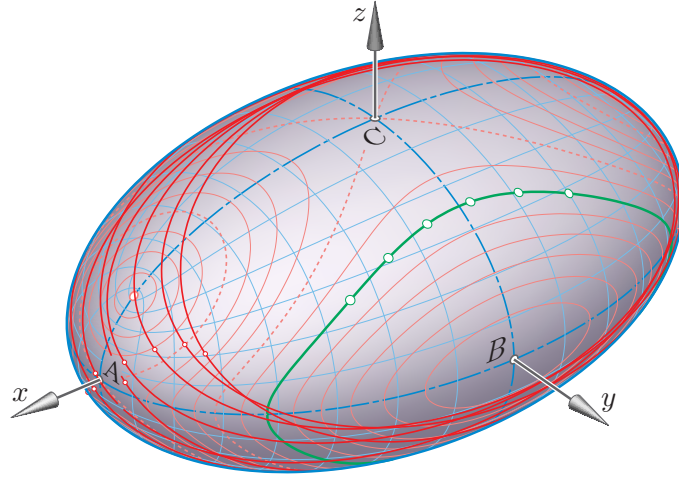


Abbildung 8: Bewegung einer Ellipse e mit markiertem Hauptscheitel auf einem Ellipsoid vom Typ 3 mit $ac > b^2$.

Diese Bedingung bleibt unverändert, wenn wir in der eckigen Klammer noch die durch k_i dividierte linke Seite der ersten Gleichung in (2.17) subtrahieren. Das ergibt

$$\lambda^2 \left[\frac{\xi^2}{(a^2 + k_i)^2 a^2} - \frac{\xi^2}{k_i (a^2 + k_i) a^2} + \dots \right] = 1$$

und schließlich

$$-\frac{\lambda^2}{k_i} \left[\frac{\xi^2}{(a^2 + k_i)^2} + \frac{\eta^2}{(b^2 + k_i)^2} + \frac{\zeta^2}{(c^2 + k_i)^2} \right] = -\frac{\lambda^2}{k_i} \|\mathbf{v}_i\|^2 = 1,$$

also $a_P = |\lambda| \|\mathbf{v}_2\| = \sqrt{-k_2}$ und $b_P = |\lambda| \|\mathbf{v}_1\| = \sqrt{-k_1}$. \square

Die Formeln in (3.1) bestätigen erneut, dass sich die elliptischen Koordinaten von P genauso verhalten wie $a_e^2 : b_e^2$.

Die Hauptscheitel aller zu τ_P parallelen Ellipsen auf \mathcal{E} liegen auf einer Ellipse, für welche OP und die Hauptachse des Diametralschnittes konjugierte Durchmesser bestimmen. Ist somit \mathbf{p} der Ortsvektor von P und $\mathbf{m} = \mu \mathbf{p}$ mit $0 \leq \mu < 1$ jener der Mitte einer Ellipse e aus dieser Schar, so gilt für deren Hauptachsenlänge

$$a_e = a_P \sqrt{1 - \mu^2}, \text{ also } \mu^2 = 1 - \frac{a_e^2}{a_P^2} = 1 - \frac{a_e^2}{t}. \quad (3.2)$$

Erreicht während der Bewegung der Ellipse e deren Mitte M das Zentrum O des Ellipsoids \mathcal{E} , so hat der zugehörige Punkt P das Limit erreicht, und entweder springt P in den diametralen Punkt oder μ wird negativ. Dies bedeutet, dass in Hinblick auf die Bewegung der Ellipse e auf \mathcal{E} die Parametrisierung von $\mathbf{p}(t)$ in (2.21) noch weiter eingeschränkt werden muss, nämlich auf

$$\max\{b^2, vc^2, a_e^2\} \leq t \leq \min\{a^2, vb^2\}. \quad (3.3)$$

Das ermöglicht schließlich eine *Matrizendarstellung* der Bewegung einer den Bedingungen (2.2) genügenden Ellipse e auf dem Ellipsoid \mathcal{E} wie folgt:

$$\mathbf{x}_{\text{fest}} = \mu(t) \mathbf{p}(t) + \left[\frac{\mathbf{v}_2}{\|\mathbf{v}_2\|}, \frac{\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|}, \frac{\mathbf{n}_P}{\|\mathbf{n}_P\|} \right] \mathbf{x}_{\text{bew}}. \quad (3.4)$$

Dabei bedeuten \mathbf{x}_{bew} und \mathbf{x}_{fest} Gang- bzw. Rastkoordinaten. Die eckigen Klammern kennzeichnen eine dreireihige orthogonale Matrix mit den angegebenen Spaltenvektoren nach (2.13) und (2.9). Die Parametrisierung von $\mathbf{p}(t)$ erfolgt gemäß (2.21) mit $v = a_e^2/b_e^2$ unter Berücksichtigung des Definitionsbereichs in (3.3), während sich der skalare Faktor $\mu(t)$ aus (3.2) ergibt. Fortsetzungen dieser Bewegung mittels geeigneter Spiegelungen an den Koordinatenebenen führen schließlich zu geschlossenen Bewegungsvorgängen.

Abb. 7 zeigt eine derartige Bewegung einer Ellipse auf einem Ellipsoid von Typ 1, wobei die gesamte Bahn des Punktes P durchlaufen wird. Hingegen zeigt Abb. 8 die Bewegung einer hinreichend großen Ellipse auf einem Ellipsoid vom Typ 3, bei welcher nur ein Teil der Bahn von P durchlaufen wird und der Punkt P beim Erreichen der Grenzen in die jeweils diametralen Punkte wechselt.

Literatur

- [1] L. Bianchi: *Vorlesungen über Differentialgeometrie*. B.G. Teubner, Leipzig 1899.
- [2] H. Brauner: *Quadriken als Bewegflächen*. Monatsh. Math. **59**, 45–63 (1955).
- [3] H. Brauner: *Erzeugung eines gleichseitigen hyperbolischen Paraboloides durch Bewegung einer gleichseitigen Hyperbel*. Arch. Math. **6/4**, 330–334 (1955).
- [4] H. Brauner: *Differentialgeometrie*. Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig/Wiesbaden 1981.
- [5] G. Glaeser, H. Stachel, B. Odehnal: *The Universe of Conics*. Springer Spektrum, Heidelberg 2016.
- [6] D. Hilbert, St. Cohn-Vossen: *Anschauliche Geometrie*. Julius Springer, Berlin 1932, 2. Aufl. Springer-Verlag, Berlin 1996.
- [7] K. Strubecker: *Differentialgeometrie, III. Theorie der Flächenkrümmung*. Sammlung Götschen Bd. 1180/1180a, Walter de Gruyter & Co, Berlin, 1959.
- [8] W. Wunderlich: *Überblick über die Krümmungsverhältnisse des Ellipsoids*. Österr. Z. Vermessungswesen, Festschrift E. Doležal, 1952, pp. 673–681.
- [9] W. Wunderlich: *Ebene Kinematik*. Bibliographisches Institut, Mannheim, Wien, Zürich 1970.