

Die Rolle der Geometrie bei Navigationssystemen

Hellmuth Stachel



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
WIEN

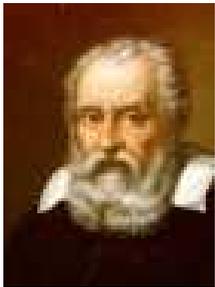


stachel@dmg.tuwien.ac.at — <http://www.geometrie.tuwien.ac.at/stachel>



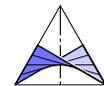
Inhalt

1. Positionierung und Navigation
2. Positionierung mittels Distanzen
3. Distanzen zu Satellitenpositionen
4. Navigation, Algorithmus von Dijkstra



Galileo Galilei:

“Wer die Geometrie begreift, vermag in dieser Welt alles zu verstehen”



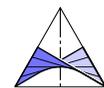
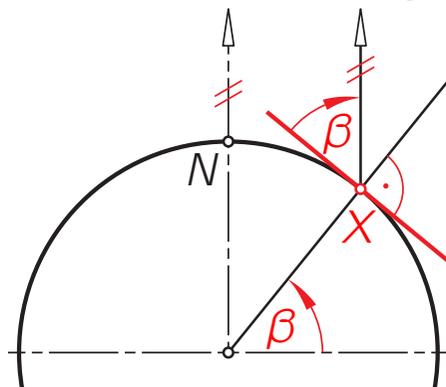
1. Positionierung und Navigation



Seit dem Altertum war es eine große wissenschaftliche Herausforderung, sich auf dem Meer zurechtzufinden. Man konnte **Winkel messen** und orientierte sich nach Leuchttürmen, Sternen oder nach der Sonne.

Mit dem **Sextanten** wird der Erhebungswinkel der Sonne gemessen. Aus diesem Winkel zu Mittag und dem Datum folgt die **geografische Breite β** .

β = Erhebungswinkel des Polarsternes



1. Positionierung und Navigation

Die Bestimmung der **geografischen Länge λ** blieb bis in das 18. Jahrhundert ungelöst. 1714 wurde dafür in England ein hoch dotierter **Preis** ausgesetzt.



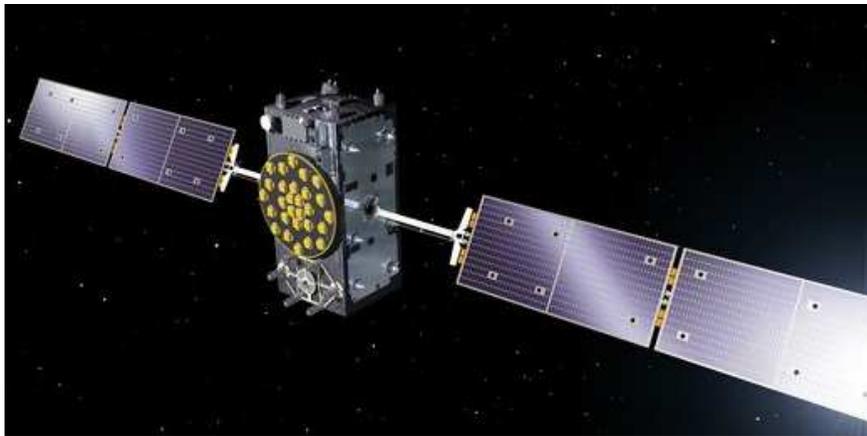
1735 gelang dem englischen Uhrmacher **John Harrison** die Entwicklung einer seetauglichen Uhr. Damit konnte auf See die lokale Mittagszeit mit jener im Heimathafen verglichen werden.

Je vier Minuten Zeitdifferenz bedeuten ein Grad Längenunterschied. Den Preis erhielt Harrison allerdings erst 1773 (siehe Dava Sobel: *Längengrad*, Berliner Taschenbuch Verlag 2003)



1. Positionierung und Navigation

Vor rund 40 Jahren wurde die Winkelmessung durch die **Distanzmessung** zu Satelliten abgelöst.

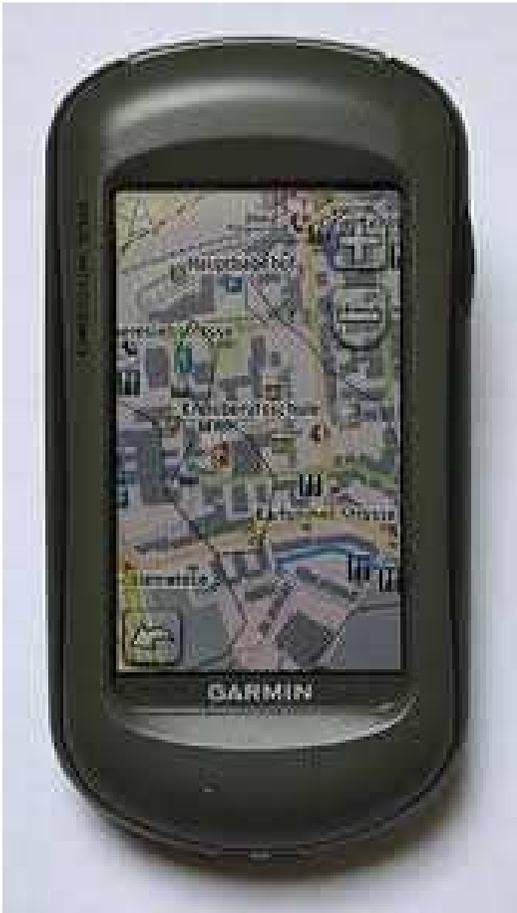


Satellit von Galileo
ca. 730 kg, 23.260 km hoch
Lebensdauer 5–10 Jahre

Es gibt derzeit vier globale **Satelliten-
Navigationssysteme** (GNSS):

- 1. GPS** (Global Positioning System), USA, seit ~ 1990 auch zivil nutzbar
- 2. GLONASS** (Globalnaja nawigazionaja sputnikowaja sistema), Russland
- 3. BeiDou 北斗** ('Großer Bär'), China
- 4. Galileo**, Europäische Union, seit 2016, dzt. 18 Satelliten (bald 27+3 in Reserve). Es ist dies das einzige zivile System.

1. Positionierung und Navigation



Jedes **'Navi'** (Zielführungssystem) erledigt zwei Aufgaben, die **Positionierung** und die **Navigation**.

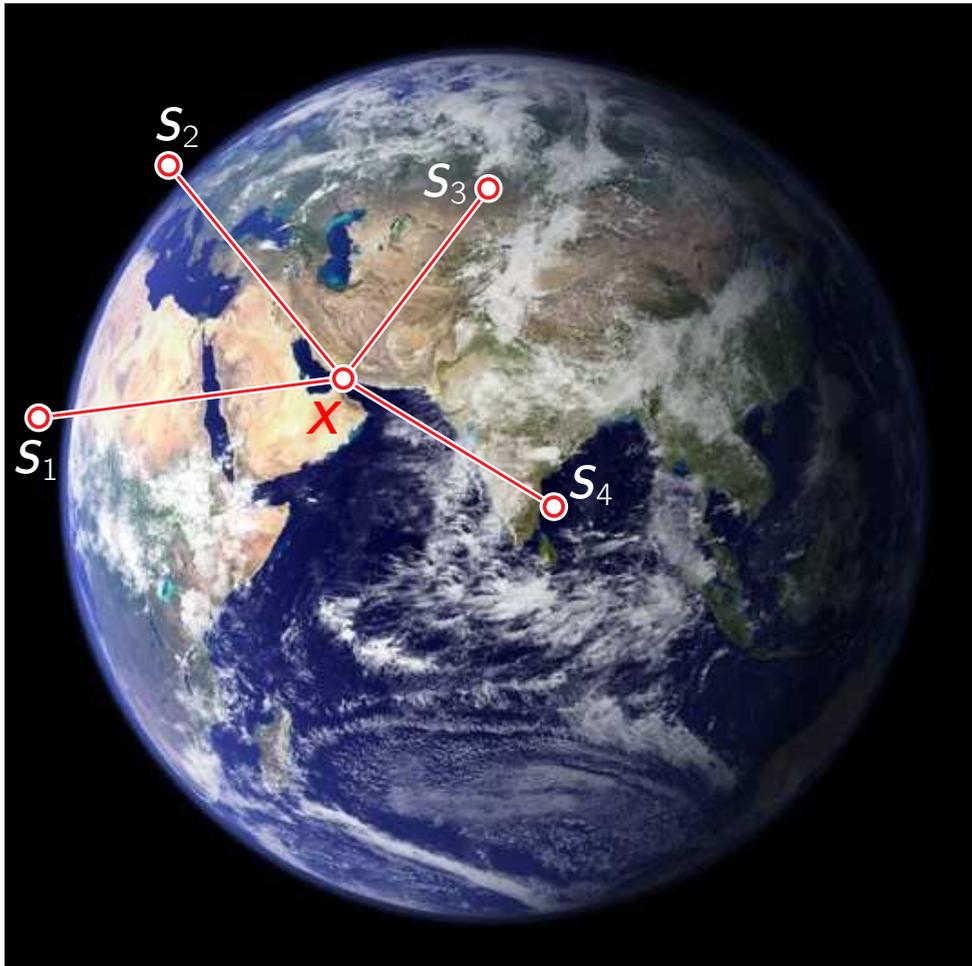
Es besteht aus mindestens vier Komponenten:

- einem **GNSS-Empfänger*** (GPS oder weitere),
- einer **digitalen Karte**,
- einem **Navigationcomputer** und
- einem Gerät zur **Eingabe und Anzeige**.

und allenfalls unterstützende Sensoren wie z.B. Rad-sensoren (in Tunnels).

*) GNSS = global navigation satellite system

2. Positionierung mittels Distanzen



Aus den gemessenen Distanzen zwischen dem Empfänger X und mindestens vier gegebenen Satellitenpositionen S_1, S_2, \dots werden die Koordinaten von X berechnet.

Satellitenavigationssysteme sind das Resultat eines höchst erfolgreichen Zusammenwirkens von Geodäsie, Informatik, Mathematik, Physik, Nachrichten- und Raumfahrttechnik.

2. Positionierung mittels Distanzen



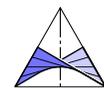
einundzwanzig, zweiundzwanzig, ...

Distanzmessung mittels Laufzeit des Schalles; dessen Geschwindigkeit (in der Luft bei 20°) beträgt 0.340 km/s (Mach 1 = 1.224 km/h).

Bei der Satellitennavigation ist es die Laufzeit des Funksignals mit der Geschwindigkeit $c = 300.000 \text{ km/s}$.

Dabei betrachten wir die Zeitansage durch den Rundfunk als verbindlich. Funkuhren gelten als höchst präzise.

Ein Funksignal von Wien nach Innsbruck benötigt ca. 0.0013 s . Das TV-Signal von Wien über Astra (ca. 36.000 km über Äquator) und zurück benötigt rund 0.5 s !



2. Positionierung mittels Distanzen



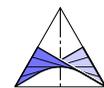
einundzwanzig, zweiundzwanzig, ...

Distanzen mittels Laufzeitmessung des **Schalles**; dessen Geschwindigkeit (in der Luft bei 20°) beträgt **0.340 km/s** (Mach 1 = 1.224 km/h).

Bei der Satellitennavigation ist es die **Laufzeit des Funksignals** mit der Geschwindigkeit $c = 300.000 \text{ km/s}$.

Dabei betrachten wir die **Zeitansage** durch den Rundfunk als verbindlich. **Funkuhren** gelten als höchst präzise.

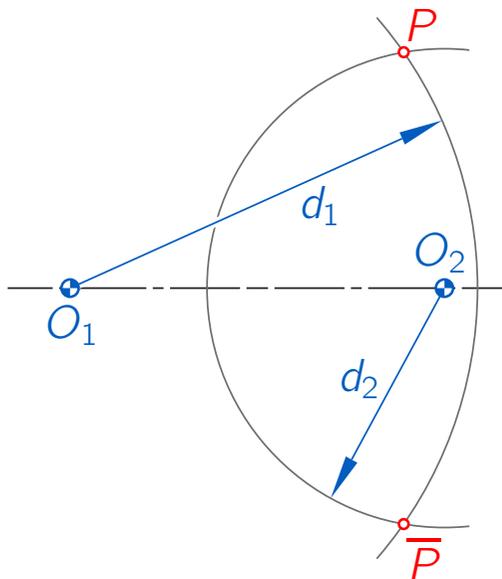
Ein Funksignal von Wien nach Innsbruck benötigt ca. 0.0013s. Das **TV-Signal** von Wien über Astra (ca. 36.000 km über Äquator) und zurück benötigt rund **0.5 s!**



2. Positionierung mittels Distanzen

Gegeben: Punkte O_1 und O_2 ($\neq O_1$):

Die Distanzen $d_1 = \overline{O_1P}$ und $d_2 = \overline{O_2P}$ heißen **bipolare Koordinaten** von P (nach Schoenflies, 1925), wobei $d_1 + d_2 \geq \overline{O_1O_2}$ und $|d_1 - d_2| \leq \overline{O_1O_2}$.

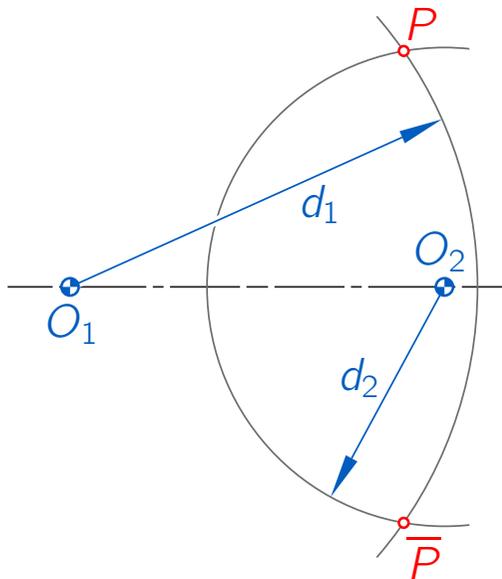


bipolare Koordinaten von P

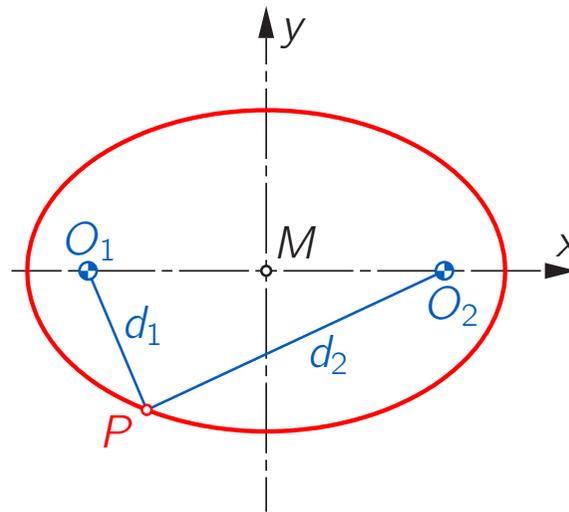
2. Positionierung mittels Distanzen

Gegeben: Punkte O_1 und O_2 ($\neq O_1$):

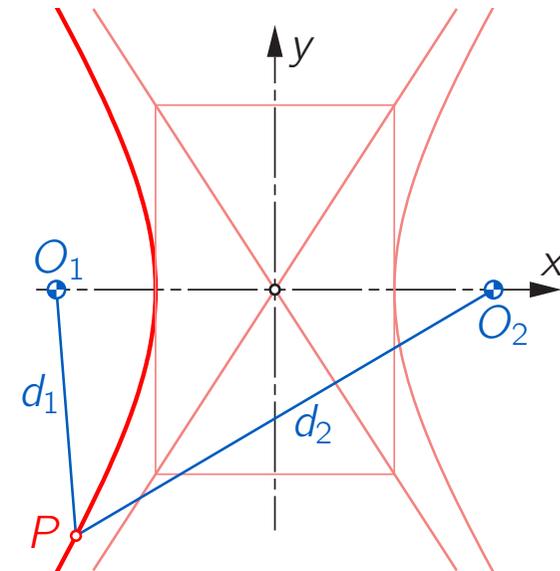
Die Distanzen $d_1 = \overline{O_1P}$ und $d_2 = \overline{O_2P}$ heißen **bipolare Koordinaten** von P (nach Schoenflies, 1925), wobei $d_1 + d_2 \geq \overline{O_1O_2}$ und $|d_1 - d_2| \leq \overline{O_1O_2}$.



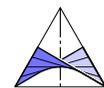
bipolare Koordinaten von P



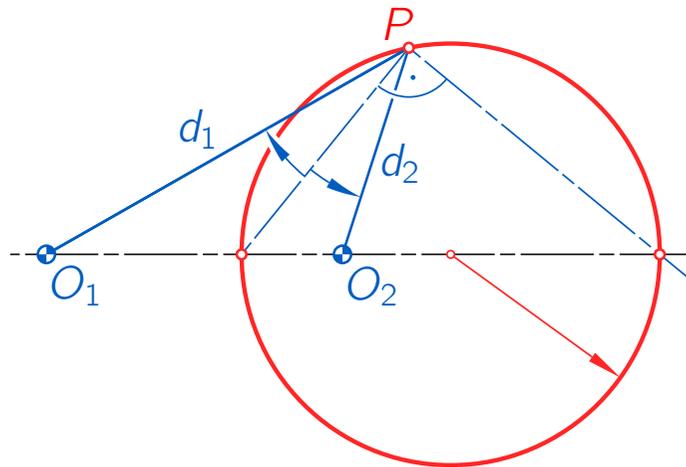
$$d_1 + d_2 = \text{konst.}$$



$$d_2 - d_1 = \text{konst.} > 0$$



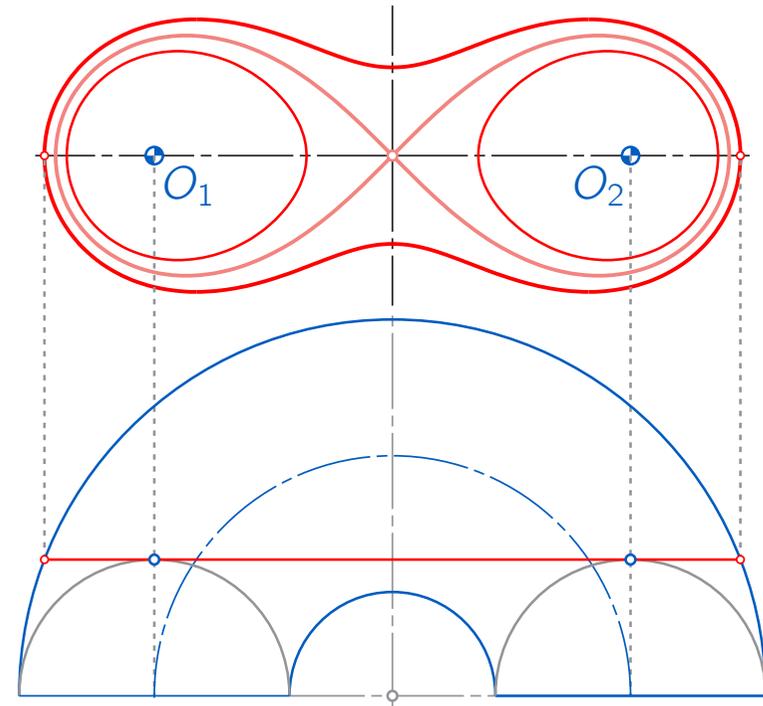
2. Positionierung mittels Distanzen



$$d_1 : d_2 = \text{konst.}$$

Kreis des Apollonius

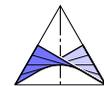
Apollonius von Perga (in heutiger
Provinz Antalya) 262 – 190 v. Chr.



$$d_1 \cdot d_2 = \text{konst.}$$

Cassinische Kurven

Sonderfall: Bernoullische Lemniskate

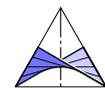


2. Positionierung mittels Distanzen

Gegeben: Dreieck $O_1O_2O_3$, **tripolare Koordinaten** (d_1, d_2, d_3) mit $d_i = \overline{O_iP}$
 $P \notin O_1O_2O_3 \iff F_{\Delta O_1O_2O_3} < F_{\Delta PO_1O_2} + F_{\Delta PO_2O_3} + F_{\Delta PO_3O_1}$ und drei weitere Ungleichungen mit Flächeninhalten (Izumi, 2016).

Jacobische Fokaleigenschaft der Quadriken:

Ort der Punkte P , deren tripolare Koordinaten d_i gleich sind den Entfernungen $d_i = \overline{O'_iP'}$ der Ecken eines Dreiecks $O'_1O'_2O'_3$ von einem in der Dreiecksebene gelegenen Punkt P' , ist eine Fläche zweiten Grades.



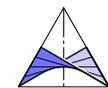
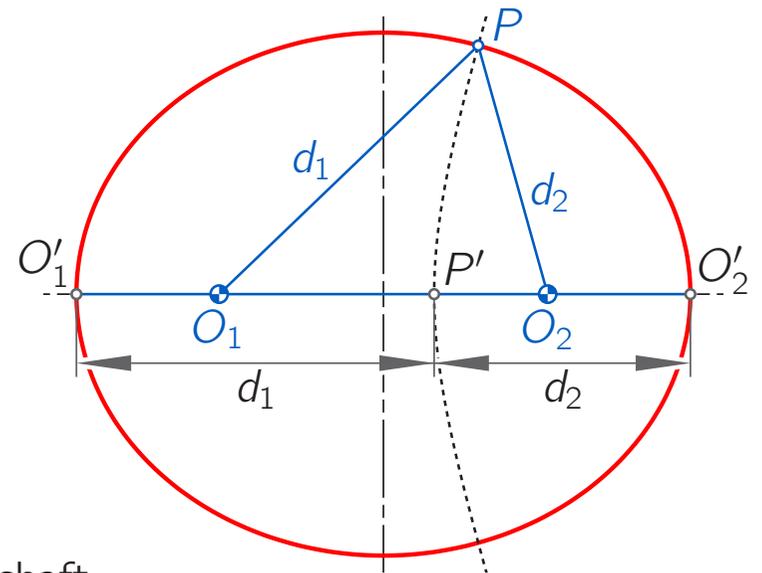
2. Positionierung mittels Distanzen

Gegeben: Dreieck $O_1O_2O_3$, **tripolare Koordinaten** (d_1, d_2, d_3) mit $d_i = \overline{O_iP}$
 $P \notin O_1O_2O_3 \iff F_{\Delta O_1O_2O_3} < F_{\Delta PO_1O_2} + F_{\Delta PO_2O_3} + F_{\Delta PO_3O_1}$ und drei weitere Ungleichungen mit Flächeninhalten (Izumi, 2016).

Jacobische **Fokaleigenschaft** der Quadriken:

Ort der Punkte P , deren tripolare Koordinaten d_i gleich sind den Entfernungen $d_i = \overline{O'_iP'}$ der Ecken eines Dreiecks $O'_1O'_2O'_3$ von einem in der Dreiecksebene gelegenen Punkt P' , ist eine Fläche zweiten Grades.

Rechts: Zweidimensionale Version der Jacobischen Fokaleigenschaft



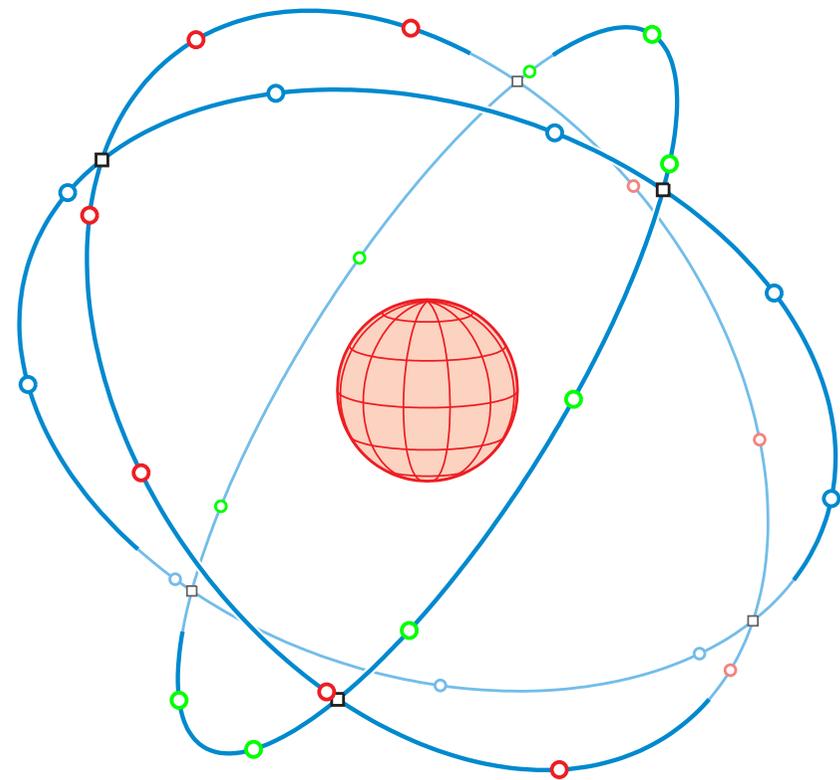
3. Distanzen zu Satellitenpositionen

Galileo Endausbau: 30 Satelliten, je 9 (+1 Reserve) verteilt auf 3 Bahnebenen (Neigungswinkel 56° gegenüber Äquator).

Umlaufzeit ~ 14 h; daher nach 7 Tagen (bzw. $(24 \cdot 7)/14 = 12$ Umläufen) Wiederholung relativ zur Erde.

Sie laufen auf einer Kreisbahn (Keplerbahn) in 23.260 km Höhe über der Erde mit einer Geschwindigkeit von $13.300 \text{ km/h} = 3.693 \text{ m/s}$ (\sim Mach 11).

Fast überall (außer in Polnähe) sind 6 bis 8 Satelliten sichtbar.



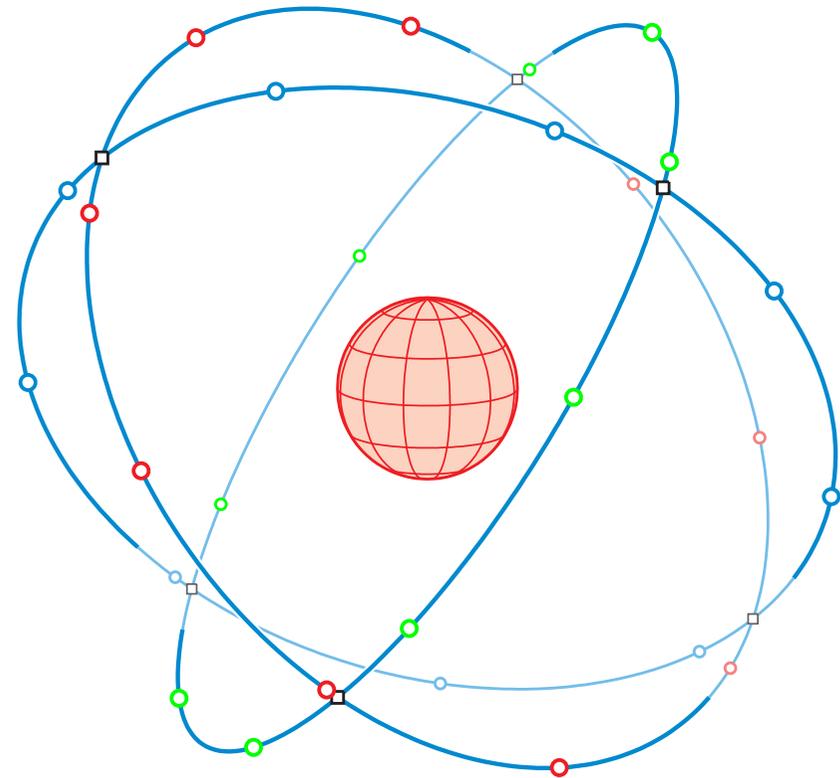
3. Distanzen zu Satellitenpositionen

Galileo Endausbau: 30 Satelliten, je 9 (+1 Reserve) verteilt auf 3 Bahnebenen (Neigungswinkel 56° gegenüber Äquator).

Umlaufzeit ~ 14 h; daher nach 7 Tagen (bzw. $(24 \cdot 7)/14 = 12$ Umläufen) Wiederholung relativ zur Erde.

Sie laufen auf einer **Kreisbahn** (Keplerbahn) in **23.260 km Höhe** über der Erde mit einer Geschwindigkeit von $13.300 \text{ km/h} = 3.693 \text{ m/s}$ (\sim Mach 11).

Fast überall (außer in Polnähe) sind **6 bis 8 Satelliten sichtbar**.



3. Distanzen zu Satellitenpositionen

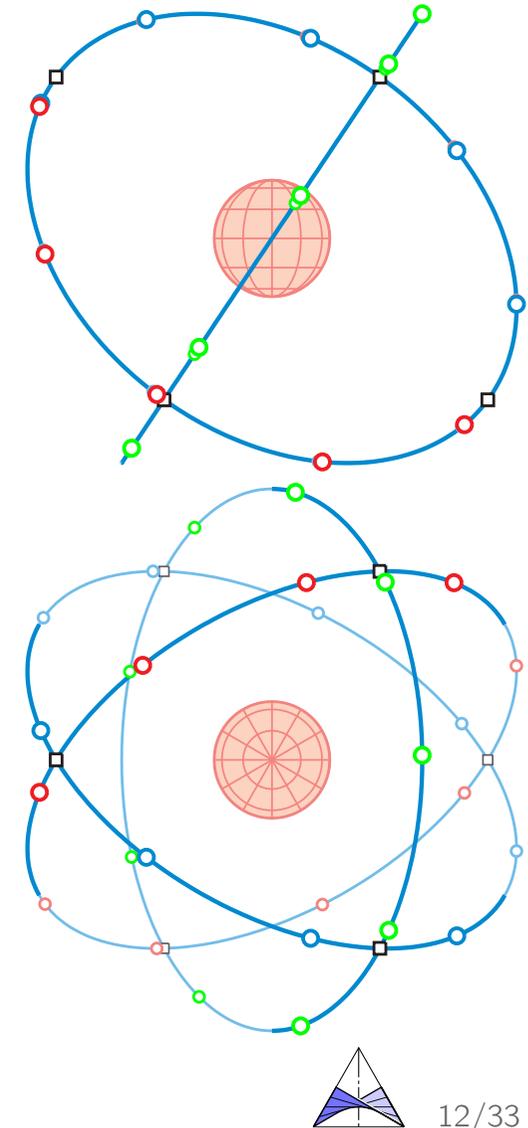
Verteilung bei anderen Navigationssystemen:

- **GPS:** 6 Bahnebenen, 55° Neigung, 20.180 km Bahnhöhe, 11 h, 58 min Umlaufzeit;
- **GLONASS:** 3 Bahnebenen, 64.1° Neigung, 19.140 km Bahnhöhe, 11 h, 15 min Umlaufzeit.

Größere Bahnhöhe ermöglicht größere Reichweite bei günstigerem Einfallswinkel der Funksignale, allerdings mehr gefährliche Strahlung, höhere Transportkosten und schwächere Signale auf der Erde.

Mehr Bahnebenen erhöhen die Anzahl möglicher Kollisionsstellen, nachdem je zwei Bahnkreise in gleicher Höhe zwei Schnittpunkte haben.

Rechts: Galileo-Verteilung in Grund- und Aufriss

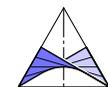


3. Distanzen zu Satellitenpositionen

Bodenstationen informieren jeden Satelliten über seine genauen Bahndaten und Zeitkorrekturen. Pro Satellit gibt es 4 Atomuhren, jeweils auf $1 \cdot 10^{-10} \text{ s}$ genau; 1 Takt Laufzeit entspricht 3 cm Weg des Funksignals. In Standard-Empfängern beträgt die Genauigkeit nur **1 %** davon (auf 3 m genau).

Die Bahndaten beziehen sich auf die in WGS 84 (World Geodetic System) festgelegte Approximation der Erde durch ein Drehellipsoid mit Halbachsen $a = 6378.137 \text{ km}$ und $b = 6356.752 \text{ km}$. Das Geoid, die überall zur Gravitationsrichtung orthogonale Fläche, weicht bis zu $\pm 100 \text{ m}$ von diesem Ellipsoid ab.

Wie ist eine hochpräzise Distanzmessung zwischen dem Empfänger X auf der Erde und den sich sehr schnell bewegenden Satelliten möglich ?

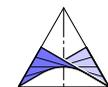


3. Distanzen zu Satellitenpositionen

Bodenstationen informieren jeden Satelliten über seine genauen Bahndaten und Zeitkorrekturen. Pro Satellit gibt es 4 Atomuhren, jeweils auf $1 \cdot 10^{-10}$ s genau; 1 Takt Laufzeit entspricht 3 cm Weg des Funksignals. In Standard-Empfängern beträgt die Genauigkeit nur 1 % davon (auf 3 m genau).

Die **Bahndaten** beziehen sich auf die in **WGS 84** (World Geodetic System) festgelegte Approximation der Erde durch ein **Drehellipsoid** mit Halbachsen $a = 6378.137$ km und $b = 6356.752$ km. Das **Geoid**, die überall zur Gravitationsrichtung orthogonale Fläche, weicht bis zu ± 100 m von diesem Ellipsoid ab.

Wie ist eine hochpräzise Distanzmessung zwischen dem Empfänger X auf der Erde und den sich sehr schnell bewegenden Satelliten möglich ?

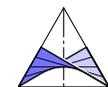


3. Distanzen zu Satellitenpositionen

Bodenstationen informieren jeden Satelliten über seine genauen Bahndaten und Zeitkorrekturen. Pro Satellit gibt es 4 Atomuhren, jeweils auf $1 \cdot 10^{-10}$ s genau; 1 Takt Laufzeit entspricht 3 cm Weg des Funksignals. In Standard-Empfängern beträgt die Genauigkeit nur 1 % davon (auf 3 m genau).

Die **Bahndaten** beziehen sich auf die in **WGS 84** (World Geodetic System) festgelegte Approximation der Erde durch ein **Drehellipsoid** mit Halbachsen $a = 6378.137$ km und $b = 6356.752$ km. Das **Geoid**, die überall zur Gravitationsrichtung orthogonale Fläche, weicht bis zu ± 100 m von diesem Ellipsoid ab.

Wie ist eine **hochpräzise Distanzmessung** zwischen dem Empfänger X auf der Erde und den sich sehr schnell bewegenden Satelliten **möglich** ?



3. Distanzen zu Satellitenpositionen

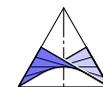
Satelliten senden permanent Daten. Jede Navigationsmitteilung (alle 30 s) umfasst die Kennung des Satelliten, die aktuelle Zeit sowie Korrekturen für Zeitmessung und Bahndaten. Das Empfangsgerät berechnet aus Zeit und Bahndaten die Position \mathbf{s}_i .

Funkt der Satellit in der Position \mathbf{s}_i die Zeitansage “8:00 Uhr”, und erreicht diese den Empfänger \mathbf{x} gemäß dessen Uhr um $8:00 + t_i$, so ergibt die Multiplikation mit der Lichtgeschwindigkeit c die **scheinbare** Distanz $\tilde{d}_i = c t_i$.

Warum ‘scheinbar’? Die Atomuhren in den Satelliten sind sehr genau synchronisiert; bei den Empfängeruhren ist dies technisch nicht möglich. Geht die Empfängeruhr um t_0 vor, so erscheinen alle Distanzen um dasselbe $d_0 = c t_0$ vergrößert.

Deshalb lautet die **wahre** Distanz

$$d_i = \|\mathbf{s}_i - \mathbf{x}\| = \tilde{d}_i - d_0.$$



3. Distanzen zu Satellitenpositionen

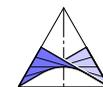
Satelliten senden permanent Daten. Jede Navigationsmitteilung (alle 30 s) umfasst die Kennung des Satelliten, die aktuelle Zeit sowie Korrekturen für Zeitmessung und Bahndaten. Das Empfangsgerät berechnet aus Zeit und Bahndaten die Position \mathbf{s}_i .

Funkt der Satellit in der Position \mathbf{s}_i die Zeitansage "8:00 Uhr", und erreicht diese den Empfänger \mathbf{x} gemäß dessen Uhr um $8:00 + t_i$, so ergibt die Multiplikation mit der Lichtgeschwindigkeit c die **scheinbare** Distanz $\tilde{d}_i = c t_i$.

Warum 'scheinbar'? Die Atomuhren in den Satelliten sind sehr genau synchronisiert; bei den Empfängeruhren ist dies technisch nicht möglich. Geht die Empfängeruhr um t_0 vor, so erscheinen alle Distanzen um dasselbe $d_0 = c t_0$ vergrößert.

Deshalb lautet die **wahre** Distanz

$$d_i = \|\mathbf{s}_i - \mathbf{x}\| = \tilde{d}_i - d_0.$$



3. Distanzen zu Satellitenpositionen

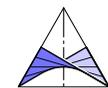
wahre Distanzen: $\| \mathbf{s}_i - \mathbf{x} \| = \tilde{d}_i - d_0, \quad i = 1, \dots, 4.$

Gegeben: Satellitenpositionen S_1, \dots, S_4 sowie scheinbare Distanzen $\tilde{d}_1, \dots, \tilde{d}_4$.

Gesucht: Die Raumkoordinaten des Empfängers X und der durch mangelnde Synchronisation der Empfängeruhr entstandene Distanzfehler $d_0 \lesseqgtr 0$.

Fall mit $d_0, \tilde{d}_i > 0$

Wir beginnen mit einer geometrischen Deutung.



3. Distanzen zu Satellitenpositionen

wahre Distanzen: $\| \mathbf{s}_i - \mathbf{x} \| = \tilde{d}_i - d_0, \quad i = 1, \dots, 4.$

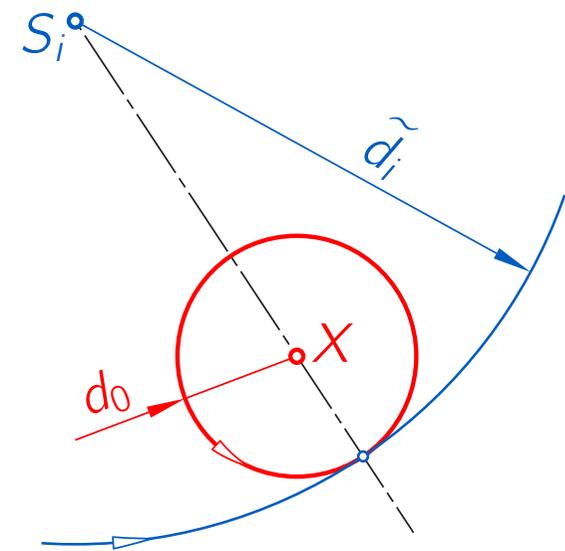
Gegeben: Satellitenpositionen S_1, \dots, S_4 sowie die scheinbaren Distanzen $\tilde{d}_1, \dots, \tilde{d}_4$.

Gesucht: Die Raumkoordinaten des **Empfängers** X und der durch mangelnde Synchronisation der Empfängeruhr entstandene **Distanzfehler** $d_0 \lesseqgtr 0$.

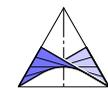
Geometrische Deutung:

Gesucht ist eine **Kugel** (X, d_0) , welcher vier gegebene Kugeln (S_i, \tilde{d}_i) **gleichartig berührt**, d.h., alle von außen oder alle von innen

= **Apollonisches Berührproblem.**

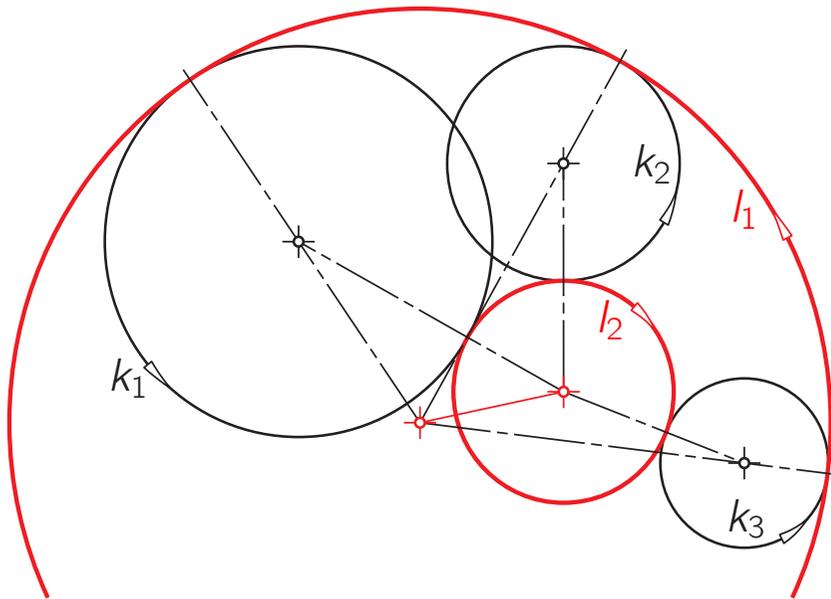


Fall mit $d_0, \tilde{d}_i > 0$



3. Distanzen zu Satellitenpositionen

Apollonisches Berührproblem in der Ebene:



Version mit orientierten Kreisen

Gegeben: orientierte Kreise k_1, k_2, k_3

Gesucht: orientierte Berührkreise
(gleichsinnige Berührung).

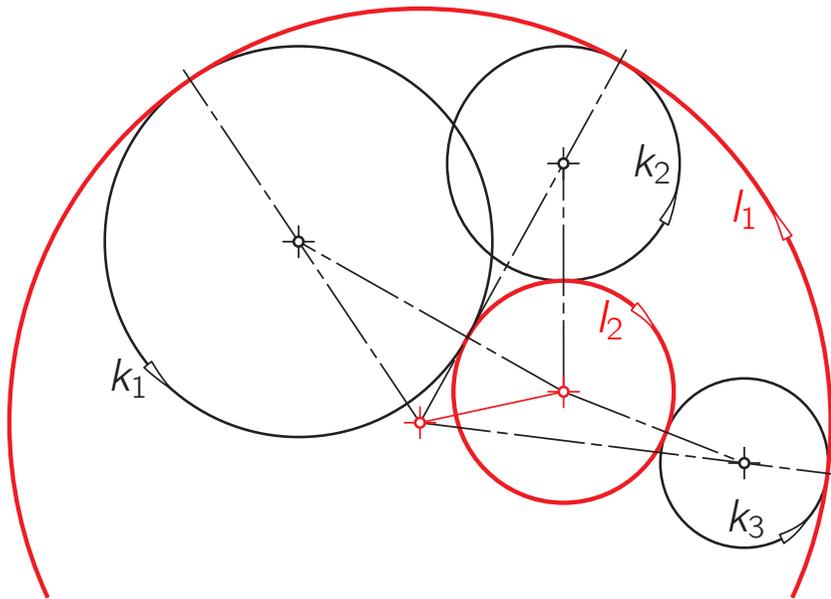
Es gibt bis zu zwei reelle Lösungen.

Drei nicht-orientierte Kreise können auf $2^3 = 8$ verschiedene Arten orientiert werden, wobei komplementäre Orientierungen komplementäre Lösungen ergeben.

$\implies \exists$ bis zu 8 reelle Lösungen im nicht-orientierten Fall.

3. Distanzen zu Satellitenpositionen

Apollonisches Berührproblem in der Ebene:



Version mit orientierten Kreisen

Gegeben: orientierte Kreise k_1, k_2, k_3

Gesucht: orientierte Berührkreise
(gleichsinnige Berührung).

Es gibt bis zu zwei reelle Lösungen.

Drei nicht-orientierte Kreise können auf $2^3 = 8$ verschiedene Arten orientiert werden, wobei komplementäre Orientierungen komplementäre Lösungen ergeben.

$\implies \exists$ bis zu 8 reelle Lösungen im nicht-orientierten Fall.

3. Distanzen zu Satellitenpositionen

Analytische Positionsbestimmung:

Gegeben: Vier Satellitenpositionen \mathbf{s}_i , $i = 1, \dots, 4$, samt scheinbaren Distanzen \tilde{d}_i .

Gesucht: Drei Koordinaten der Empfängerposition \mathbf{x} sowie der Distanzfehler d_0 .

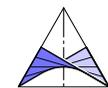
Die vier Unbekannten müssen vier quadratische Gleichungen

$$Q_i(\mathbf{x}, d_0) = (\mathbf{s}_i - \mathbf{x})^2 - (\tilde{d}_i - d_0)^2 = 0$$

lösen, also ausführlich

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} - 2(\mathbf{s}_i \cdot \mathbf{x}) + \mathbf{s}_i \cdot \mathbf{s}_i - d_0^2 + 2\tilde{d}_i d_0 - \tilde{d}_i^2 = 0.$$

Die Differenz je zweier Gleichungen ist linear in den Unbekannten \implies bleiben **drei lineare** und **eine quadratische** Gleichung, daher **maximal zwei** reelle Lösungen.



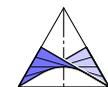
3. Distanzen zu Satellitenpositionen

Praktische Berechnung: Die Positionsbestimmung muss wiederholt durchgeführt werden. Die vorangegangene Lösung (\mathbf{x}^*, d_0^*) zu den Positionen \mathbf{s}_i^* und scheinbaren Distanzen \tilde{d}_i^* ist zumeist eine gute Näherung für die Lösung zu den aktuellen Daten \mathbf{s}_i und \tilde{d}_i . Zudem stehen meist mehr als vier Satelliten zur Verfügung.

Wir setzen an $\mathbf{x} = \mathbf{x}^* + \mathbf{v}$ und $d_0 = d_0^* + v_0$ und entwickeln die quadratischen Polynome $Q_i(\mathbf{x}, d_0)$ an der Näherungslösung (\mathbf{x}^*, d_0^*) nach Taylor. Damit bleibt ein lineares System für die ‘Verbesserungen’ \mathbf{v} und v_0 :

$$\frac{1}{2} Q_i(\mathbf{x}^* + \mathbf{v}, d_0^* + v_0) \approx -(\mathbf{s}_i - \mathbf{x}^*) \cdot \mathbf{v} + (\tilde{d}_i^* - d_0^*) v_0 = 0,$$

welches iterativ gelöst wird ($\mathbf{v} \sim$ Geschwindigkeitsvektor).



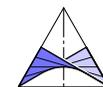
3. Distanzen zu Satellitenpositionen

Praktische Berechnung: Die Positionsbestimmung muss wiederholt durchgeführt werden. Die vorangegangene Lösung (\mathbf{x}^*, d_0^*) zu den Positionen \mathbf{s}_i^* und scheinbaren Distanzen \tilde{d}_i^* ist zumeist eine gute Näherung für die Lösung zu den aktuellen Daten \mathbf{s}_i und \tilde{d}_i . Zudem stehen meist mehr als vier Satelliten zur Verfügung.

Wir setzen an $\mathbf{x} = \mathbf{x}^* + \mathbf{v}$ und $d_0 = d_0^* + v_0$ und entwickeln die quadratischen Polynome $Q_i(\mathbf{x}, d_0)$ an der Näherungslösung (\mathbf{x}^*, d_0^*) nach Taylor. Damit bleibt ein lineares System für die 'Verbesserungen' \mathbf{v} und v_0

$$\frac{1}{2} Q_i(\mathbf{x}^* + \mathbf{v}, d_0^* + v_0) \approx -(\mathbf{s}_i - \mathbf{x}^*) \cdot \mathbf{v} + (\tilde{d}_i^* - d_0^*) v_0 = 0,$$

welches iterativ gelöst wird ($\mathbf{v} \sim$ Geschwindigkeitsvektor).



3. Distanzen zu Satellitenpositionen

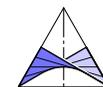
Die iterative Lösung des linearen Gleichungssystems

$$-(\mathbf{s}_i - \mathbf{x}^*) \cdot \mathbf{v} + (\tilde{d}_i^* - d_0^*) v_0 = 0,$$

für die Unbekannten \mathbf{v} und v_0

- geht **schneller**.
- Es gibt kein Problem mit der **Zweideutigkeit** der Lösung.
- Es gibt Standardverfahren zur Bestimmung der **optimalen Lösung** im Fall eines **überbestimmten** linearen Gleichungssystems. Das liegt vor, wenn die Daten von mehr als vier Satelliten bei der Berechnung der 4 Unbekannten zur Verfügung stehen.

Die numerischen Verfahren werden ungenau, wenn die zwei Lösungen nahe beieinander liegen. Fallen sie überhaupt zusammen, so heißt die Konfiguration **kritisch**.



3. Distanzen zu Satellitenpositionen

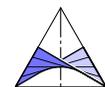
Die iterative Lösung des linearen Gleichungssystems

$$-(\mathbf{s}_i - \mathbf{x}^*) \cdot \mathbf{v} + (\tilde{d}_i^* - d_0^*) v_0 = 0,$$

für die Unbekannten \mathbf{v} und v_0

- geht **schneller**.
- Es gibt kein Problem mit der **Zweideutigkeit** der Lösung.
- Es gibt Standardverfahren zur Bestimmung der **optimalen Lösung** im Fall eines **überbestimmten** linearen Gleichungssystems. Das liegt vor, wenn die Daten von mehr als vier Satelliten bei der Berechnung der 4 Unbekannten zur Verfügung stehen.

Die numerischen Verfahren werden ungenau, wenn die zwei Lösungen nahe beieinander liegen. Fallen sie überhaupt zusammen, so heißt die Konfiguration **kritisch**.



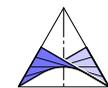
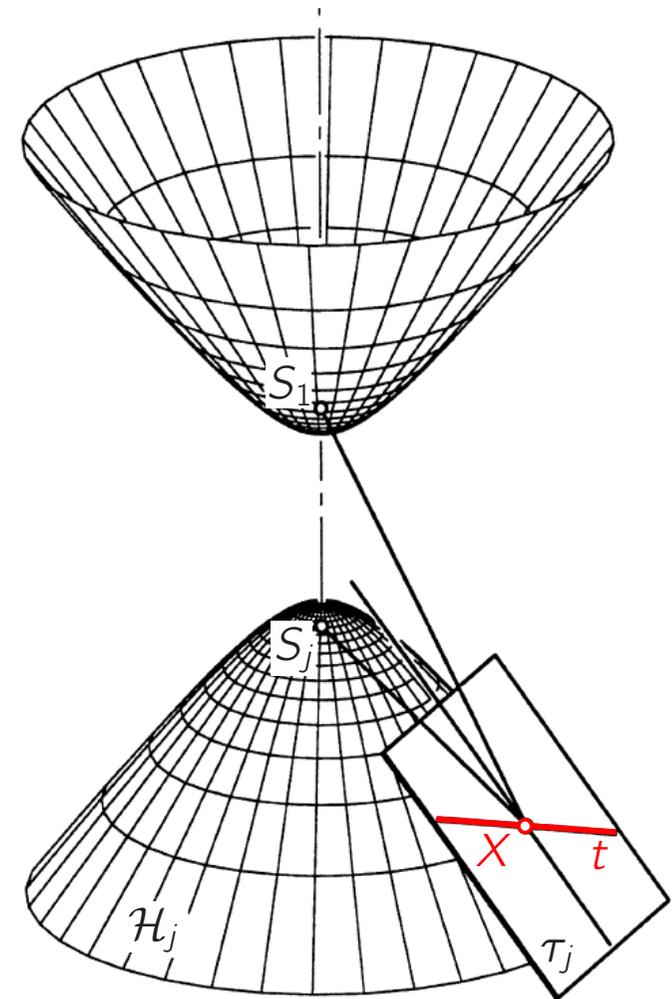
3. Distanzen zu Satellitenpositionen

Bei einer **kritischen** Konfiguration fallen die zwei Lösungen des Apollonischen Berührproblems zusammen. Wann tritt das ein?

Wegen $\| \mathbf{s}_i - \mathbf{x} \| = \tilde{d}_i - d_0$ ist für den Empfänger X die **Differenz der Abstände** von S_j und S_1 für $j = 2, 3, 4$ allein durch die scheinbaren Distanzen bestimmt als $|\tilde{d}_i - \tilde{d}_1|$.

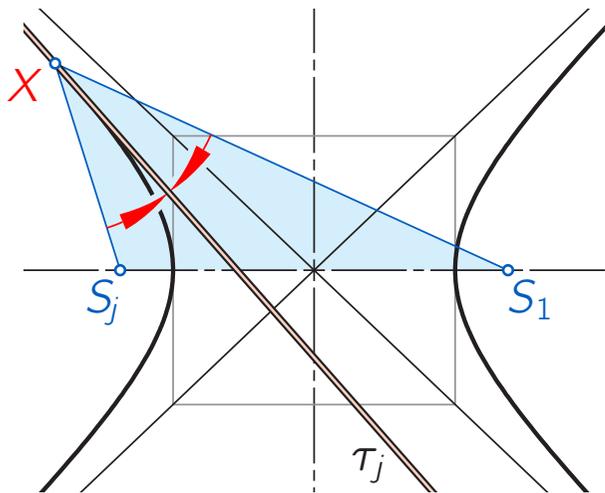
Also liegt X auf einem **zweischaligen Drehhyperboloid** \mathcal{H}_j mit Brennpunkten S_1 und S_j , und X ist ein Schnittpunkt dreier Drehhyperboloide.

In X **fallen 2 Lösungen zusammen** \iff die Hyperboloide \mathcal{H}_j haben in X **eine gemeinsame Tangente t** .



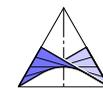
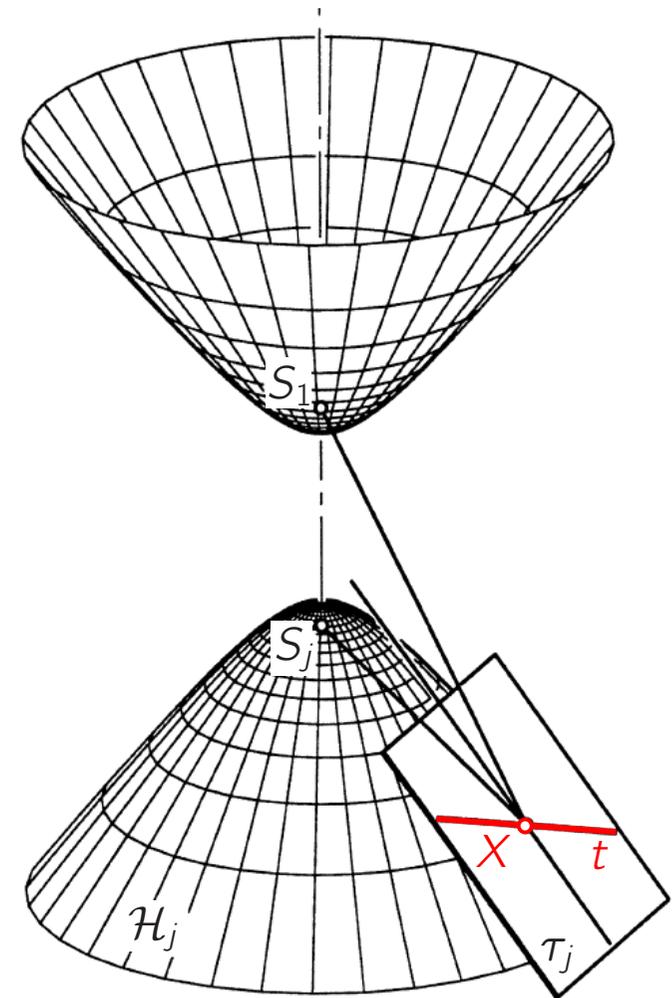
3. Distanzen zu Satellitenpositionen

In X fallen 2 Lösungen zusammen \iff die Hyperboloide haben in X eine gemeinsame Tangente t .

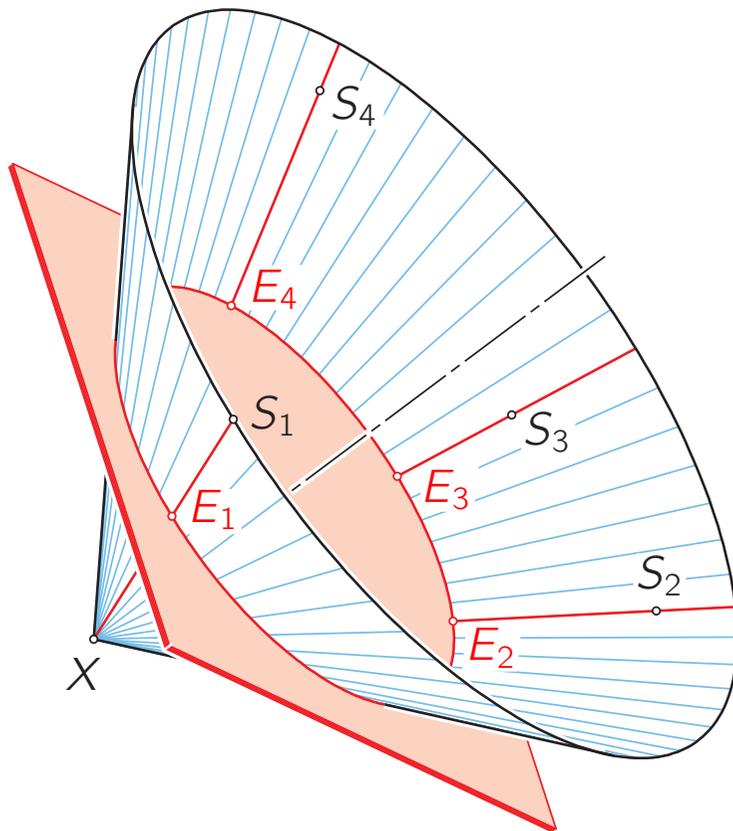


Die Halbgeraden XS_1 und XS_j gehen durch Spiegelung an der durch t gehenden Tangentialebene τ_j ineinander über.

2 Lösungen fallen zusammen \iff die Halbgerade XS_1 geht durch Spiegelung an Ebenen τ_2, τ_3 bzw. τ_4 durch t in XS_2, XS_3 bzw. XS_4 über.



3. Distanzen zu Satellitenpositionen

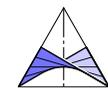


Satz: Die zwei Lösungen fallen zusammen \iff die Satellitenpositionen S_1, \dots, S_4 liegen auf einem *Drehkegel* mit der Spitze X und der Achse t , und zwar auf demselben, von X begrenzten *Halbkegel*.

Genau dann liegen die Spitzen E_j der Einheitsvektoren $\mathbf{v}_j = \frac{1}{\|\mathbf{s}_j - \mathbf{x}\|} (\mathbf{s}_j - \mathbf{x})$ auf einem Kreis der Einheitskugel, also komplanar \iff

$$\Delta = \det(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_4 - \mathbf{v}_1) = 0.$$

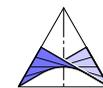
Δ kommt in der Formel für den **GDOP** (geometric dilution of precision) und ist gleich dem sechsfachen *Volumen* des Tetraeders $E_1E_2E_3E_4$.



3. Distanzen zu Satellitenpositionen

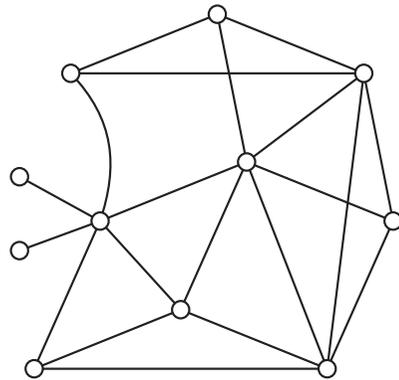
Weitere Gründe für **Ungenauigkeiten** bei der Satellitennavigation:

- **Ionosphärenfehler:** In der Höhe zwischen 50 und 1000 km über der Erde wird das Funksignal abgebremst. Dabei hängt das Ausmaß der Verzögerung von der Signalfrequenz ab. (Ausgleich durch Verwendung von zwei verschiedenen Frequenzen).
- **Ablenkungen an Gebäuden** können bewirken, dass ein Signal den Empfänger mehrfach erreicht und damit das System irritiert.
- **Relativistische Effekte:** Uhren in einem bewegten System scheinen vom Standpunkt des ruhenden Systems aus nach der **speziellen** Relativitätstheorie langsamer zu gehen (Zeitdilatation $t' = t\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$). Nach der **allgemeinen** Relativitätstheorie beeinflusst auch die in Erdnähe zunehmende Gravitation die Relativität der Zeit. Beide Effekte können allerdings gut abgeschätzt und durch eine geeignete Justierung der Atomuhren aufgefangen werden.



4. Navigation, Algorithmus von Dijkstra

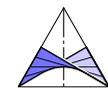
kurz zur Graphentheorie:



Ein **Graph** umfasst eine *Knotenmenge* \mathcal{V} und eine *Kantenmenge* $\mathcal{E} \subset \mathcal{V}^2$, wobei jede Kante von zwei Knoten begrenzt ist.

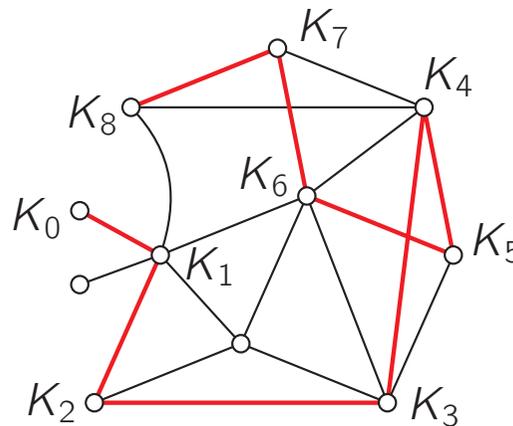
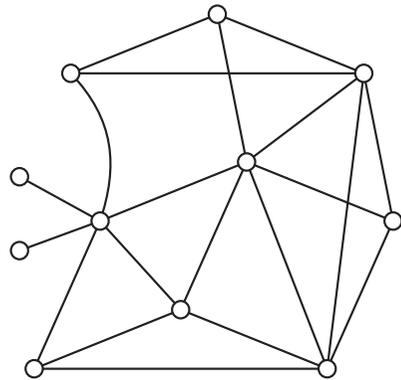
Ein **Weg** (von K_0 nach K_8) ist eine aus Kanten bestehende Verbindung, die keinen Knoten öfter als einmal enthält.

Ein **Kreis** ist eine aus Kanten zusammengesetzte geschlossene Verbindung, die keinen Knoten mehrfach enthält.



4. Navigation, Algorithmus von Dijkstra

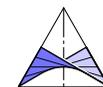
kurz zur Graphentheorie:



Ein **Graph** umfasst eine *Knotenmenge* \mathcal{V} und eine *Kantenmenge* $\mathcal{E} \subset \mathcal{V}^2$, wobei jede Kante von zwei Knoten begrenzt ist.

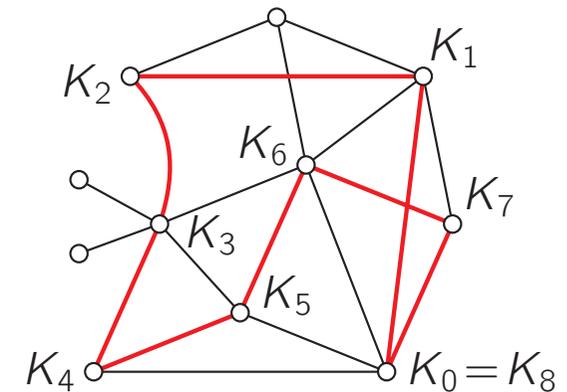
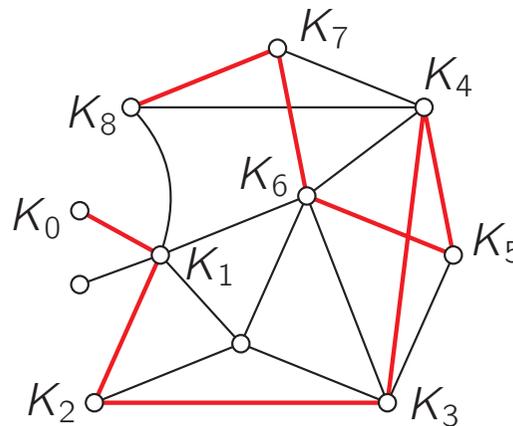
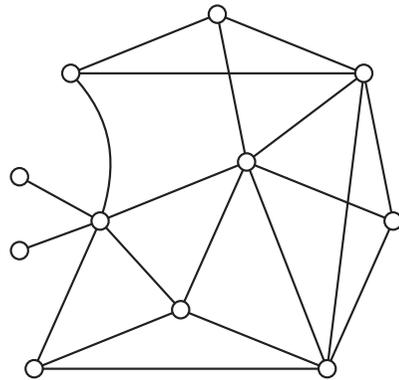
Ein **Weg** (von K_0 nach K_8) ist eine aus Kanten bestehende *Verbindung*, die keinen Knoten öfter als einmal enthält.

Ein **Kreis** ist eine aus Kanten zusammengesetzte geschlossene Verbindung, die keinen Knoten mehrfach enthält.



4. Navigation, Algorithmus von Dijkstra

kurz zur Graphentheorie:



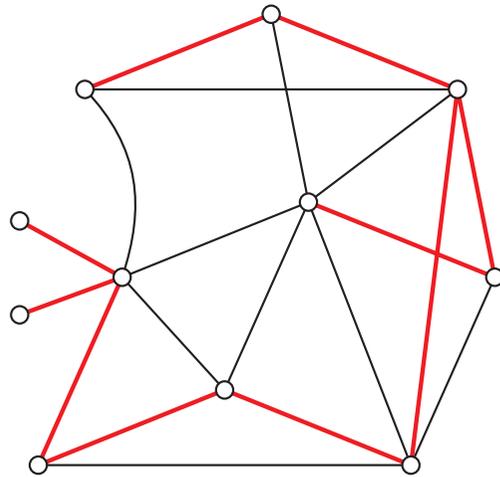
Ein **Graph** umfasst eine *Knotenmenge* \mathcal{V} und eine *Kantenmenge* $\mathcal{E} \subset \mathcal{V}^2$, wobei jede Kante von zwei Knoten begrenzt ist.

Ein **Weg** (von K_0 nach K_8) ist eine aus Kanten bestehende *Verbindung*, die keinen Knoten öfter als einmal enthält.

Ein **Kreis** ist eine aus Kanten zusammengesetzte *geschlossene* Verbindung, die keinen Knoten mehrfach enthält.

4. Navigation, Algorithmus von Dijkstra

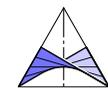
kurz zur Graphentheorie:



Ein **Baum** ist ein zusammenhängender Graph ohne Kreis; genau dann hat er um 1 mehr Knoten als Kanten.

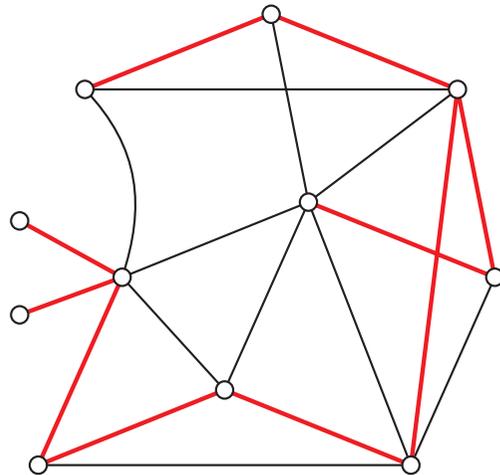
Ein **aufspannender Baum** erreicht alle Knoten eines gegebenen Graphen.

Ist jeder Kante des Graphen ein Wert zugeordnet, so heißt er **bewerteter Graph** oder **Netzwerk**. Ein K_0 mit K_i verbindender Weg mit kleinster Wertesumme heißt **Minimalweg**.



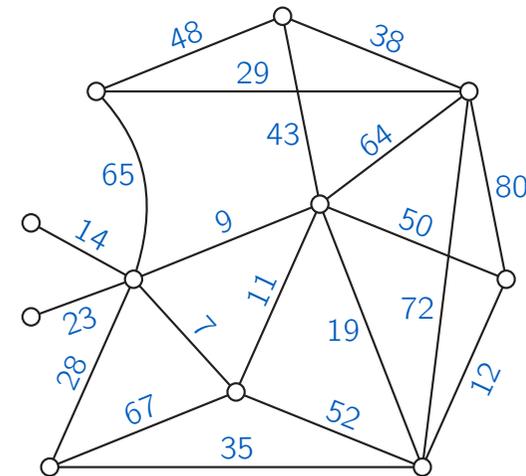
4. Navigation, Algorithmus von Dijkstra

kurz zur Graphentheorie:



Ein **Baum** ist ein zusammenhängender Graph ohne Kreis; genau dann hat er um 1 mehr Knoten als Kanten.

Ein **aufspannender Baum** erreicht alle Knoten eines gegebenen Graphen.



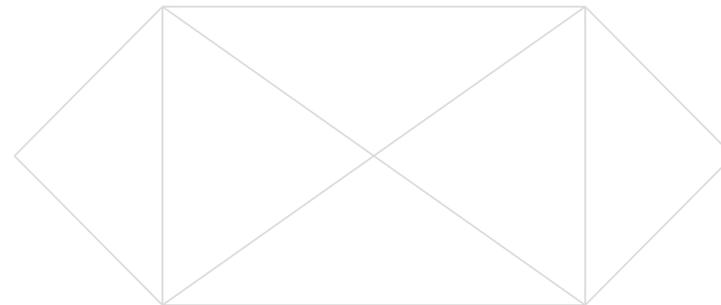
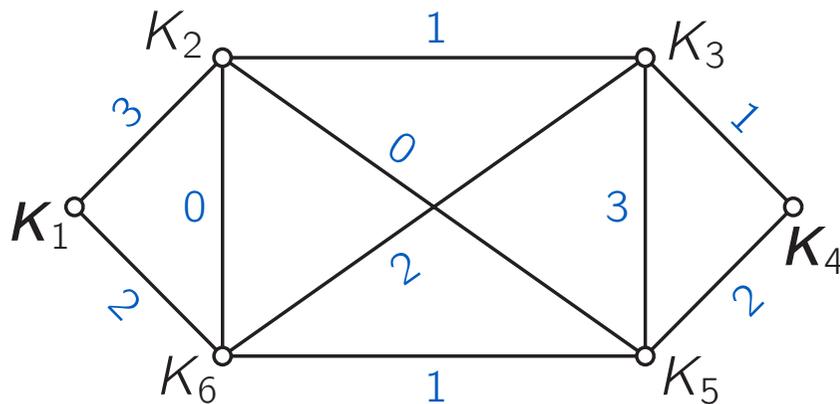
Ist jeder Kante des Graphen ein Wert zugeordnet, so heißt er **bewerteter Graph** oder **Netzwerk**. Ein K_0 mit K_i verbindender Weg mit kleinster Wertesumme heißt **Minimalweg**.

4. Navigation, Algorithmus von Dijkstra

Algorithmus von Edsger W. Dijkstra (1959):

Gegeben: Bewerteter Graph (mit nichtnegativen Bewertungen)

Gesucht: Minimalweg von K_1 bis K_4 , d.h., Weg mit kleinster Wertesumme.



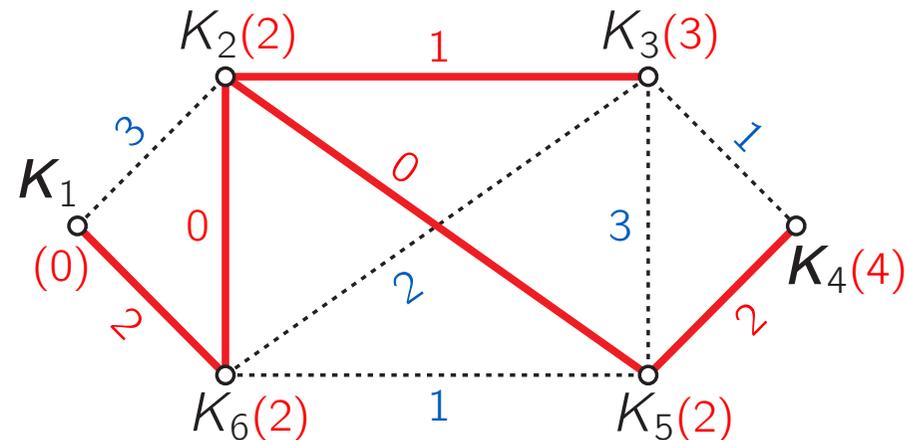
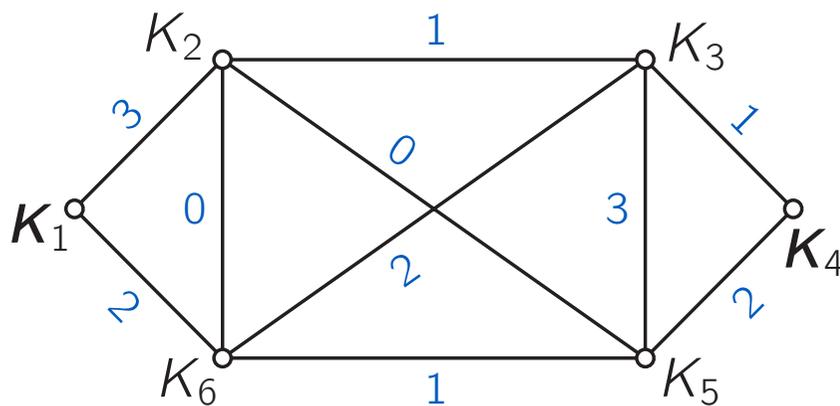
Links ein bewerteter Graph und rechts ein Entfernungsbaum zum Knoten K_1 .
Die jeweiligen Wertesummen = Distanzen $d(K_1, K_i)$ stehen in Klammern.

4. Navigation, Algorithmus von Dijkstra

Algorithmus von Edsger W. Dijkstra (1959):

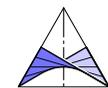
Gegeben: Bewerteter Graph (mit nichtnegativen Bewertungen)

Gesucht: Minimalweg von K_1 bis K_4 , d.h., Weg mit kleinster Wertesumme.

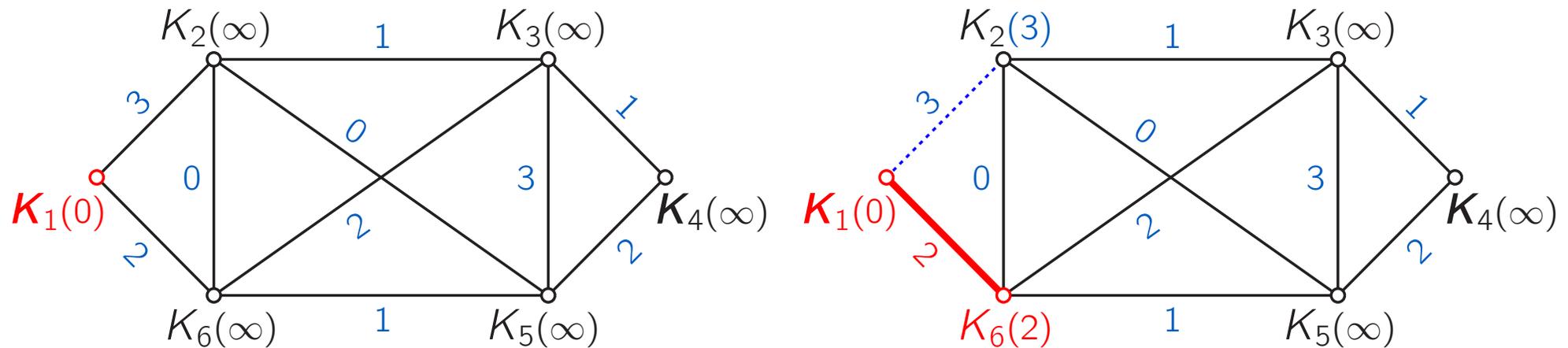


Links ein **bewerteter Graph** und rechts ein **Entfernungsbaum** zum Knoten K_1 .

Die jeweiligen Wertesummen = **Distanzen** $d(K_1, K_i)$ stehen in Klammern.



4. Navigation, Algorithmus von Dijkstra



Initialisierung

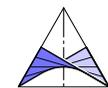
Jeder Knoten K_i bekommt einen Wert v_i zugeordnet; zu K_1 : $v_1 = 0$; zu K_i bei $i > 1$: $v_i = \infty$.

Bestimmt wird ein **Teilgraph** \mathcal{T} , der am Ende den Minimalweg enthält.

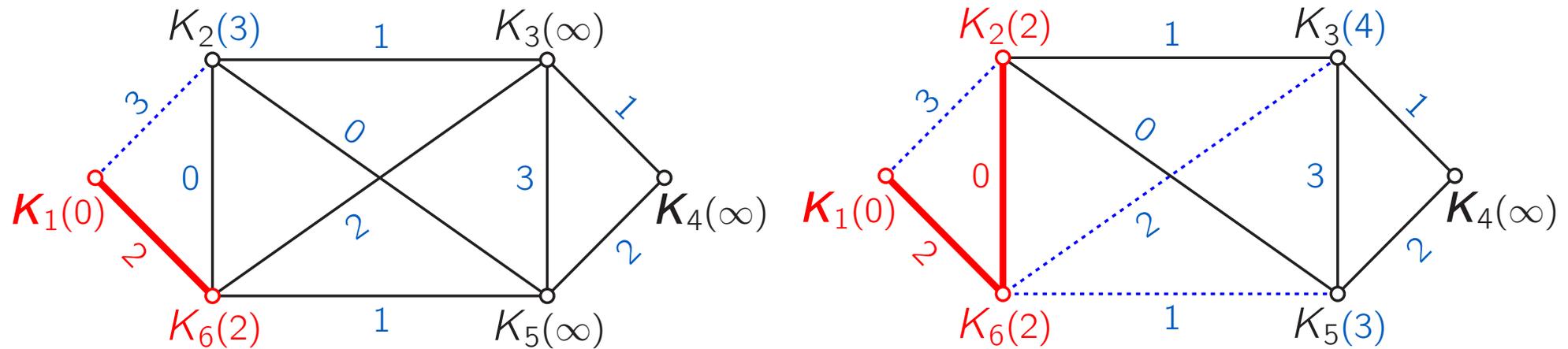
1. Schritt:

Bei allen **Nachbarn** K_j von K_1 **korrigieren** wir deren Wert v_j auf die Länge der Verbindungskante mit K_1 .

Eine Kante **minimaler Länge** samt ihren Endpunkten kommt zu \mathcal{T} .



4. Navigation, Algorithmus von Dijkstra



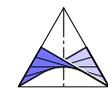
1. Schritt:

Bei allen Nachbarn K_j von K_1 korrigieren wir deren Wert v_j auf die Länge der Verbindungskante mit K_1 .

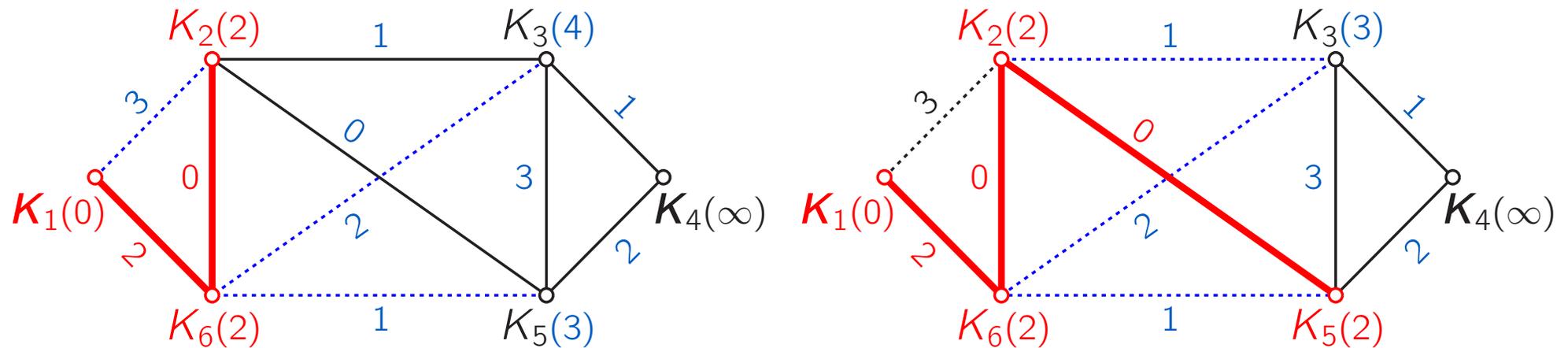
Eine Kante **minimaler Länge** samt ihren Endpunkten kommt zu \mathcal{T} .

2. Schritt:

Bei allen Nachbarn K_j der $K_i \in \mathcal{T}$ wird v_j auf die Summe aus v_i und $d(K_i, K_j)$ korrigiert, sofern diese **kleiner** ist als das bisherige v_j . Ein K_j mit **minimalem** v_j kommt zu \mathcal{T} dazu samt Kante $K_i K_j$.



4. Navigation, Algorithmus von Dijkstra

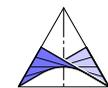


2. Schritt:

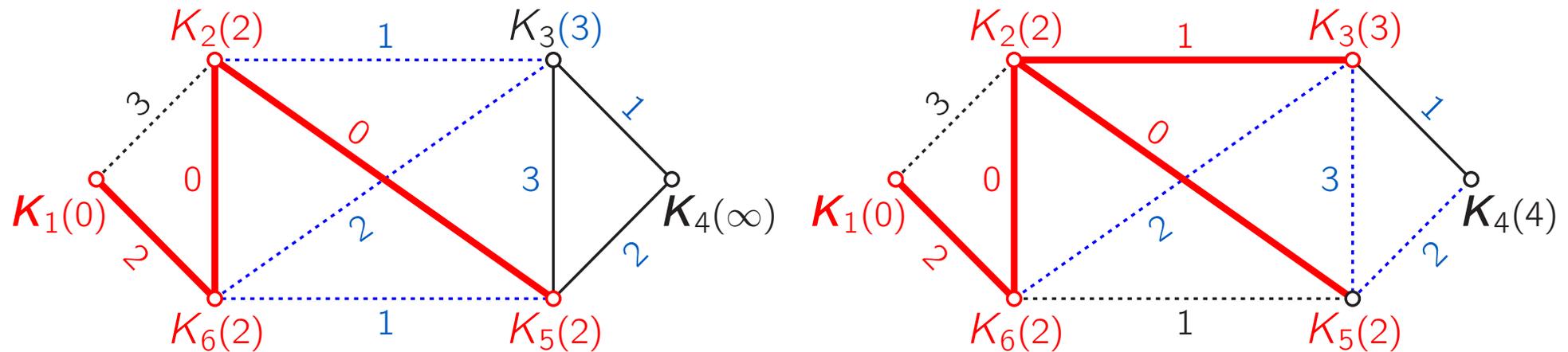
Bei allen Nachbarn K_j der $K_i \in \mathcal{T}$ wird v_j auf die Summe aus v_i und $d(K_i, K_j)$ korrigiert, sofern diese kleiner ist als das bisherige v_j . Ein K_j mit minimalem v_j kommt zu \mathcal{T} dazu samt Kante K_iK_j .

3. Schritt:

Bei allen Nachbarn K_j der $K_i \in \mathcal{T}$ wird v_j auf die Summe aus v_i und $d(K_i, K_j)$ korrigiert, sofern diese kleiner ist als das bisherige v_j . Ein K_j mit minimalem v_j kommt zu \mathcal{T} dazu samt Kante K_iK_j .



4. Navigation, Algorithmus von Dijkstra

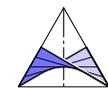


3. Schritt:

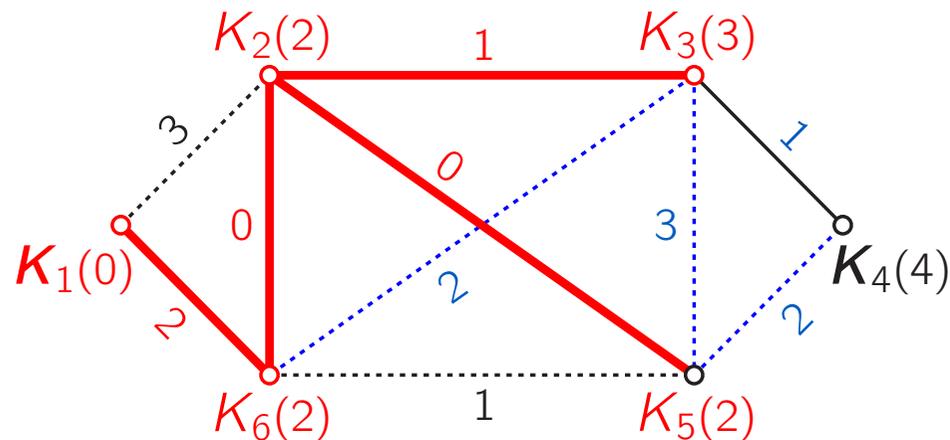
Bei allen Nachbarn K_j der $K_i \in \mathcal{T}$ wird v_j auf die Summe aus v_i und $d(K_i, K_j)$ korrigiert, sofern diese kleiner ist als das bisherige v_j . Ein K_j mit minimalem v_j kommt zu \mathcal{T} dazu samt Kante K_iK_j .

4. Schritt:

Bei allen Nachbarn K_j der $K_i \in \mathcal{T}$ wird v_j auf die Summe aus v_i und $d(K_i, K_j)$ korrigiert, sofern diese kleiner ist als das bisherige v_j . Ein K_j mit minimalem v_j kommt zu \mathcal{T} dazu samt Kante K_iK_j .

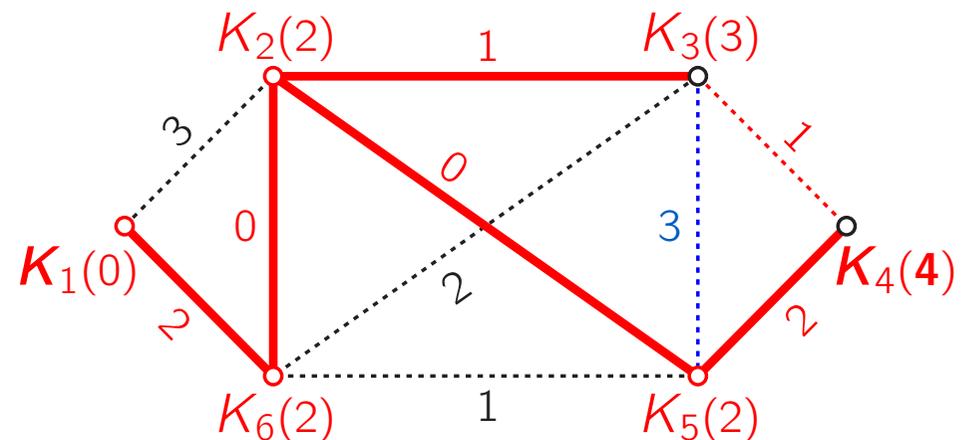


4. Navigation, Algorithmus von Dijkstra



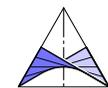
4. Schritt:

Bei allen Nachbarn K_j der $K_i \in \mathcal{T}$ wird v_j auf die Summe aus v_i und $d(K_i, K_j)$ korrigiert, sofern diese kleiner ist als das bisherige v_j . Ein K_j mit minimalem v_j kommt zu \mathcal{T} dazu samt Kante $K_i K_j$.



5. Schritt:

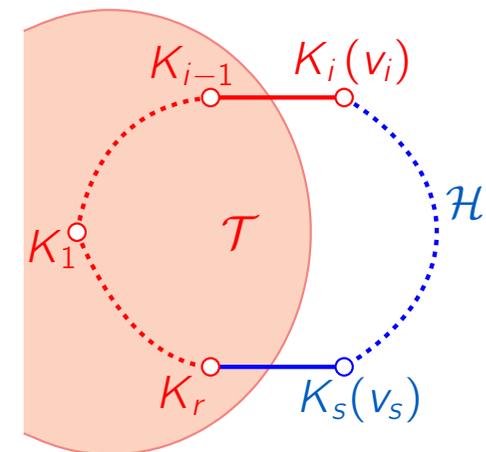
Bei allen Nachbarn K_j der $K_i \in \mathcal{T}$ wird v_j auf die Summe aus v_i und $d(K_i, K_j)$ korrigiert, sofern diese kleiner ist als das bisherige v_j ... solange, bis der Zielknoten K_4 erreicht ist (hier 2 Lösngn).



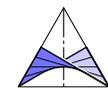
4. Navigation, Algorithmus von Dijkstra

Satz: Für jeden Knoten $K_i \in \mathcal{T}$ ist der in dem Baum \mathcal{T} enthaltene Weg von K_1 nach K_i ein Minimalweg, und der Wert v_i gibt dessen Länge an.

Beweis: Angenommen, an Wegen von K_1 nach K_i gibt es neben jenem aus \mathcal{T} über K_{i-1} noch einen kürzeren Weg \mathcal{H} , der bis K_r in \mathcal{T} verläuft, und K_s ist der erste Knoten außerhalb. Dann ist die Länge von \mathcal{H} gleich der Summe aus dem Wert v_s von K_s , wobei $v_s \geq v_i$ nach dem Entscheidungskriterium für K_i , und der Länge ≥ 0 des Weges von K_s nach K_i , also insgesamt $\geq v_i$.
Widerspruch!



Wird der Algorithmus fortgesetzt, bis alle Knoten erreicht sind, entsteht ein **Entfernungsbaum** \mathcal{T} zum Knoten K_1 , also ein aufspannender Baum, wobei für jedes i der Wert v_i des Knotens K_i die Länge des Minimalweges von K_1 und K_i angibt.





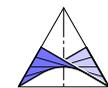
“La Géométrie”
Hôtel de Ville, Paris

Danke für Ihre
Aufmerksamkeit!

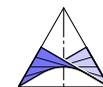


Literatur

- T. Arens, R. Busam, F. Hettlich, Ch. Karpfinger, H. Stachel: *Grundwissen Mathematikstudium — Analysis und Lineare Algebra mit Querverbindungen*. Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg 2013, 1172 S., 648 Abbn. u. 52 Tab., ISBN 978-3-8274-2308-5, Kap. 26: *Elemente der diskreten Mathematik – die Kunst des Zählens*, Kap. 26.1: *Einführung in die Graphentheorie*, S. 1076–1089.
- E. W. Dijkstra: *A Note on Two Problems in Connexion with Graphs*. Numer. Math. **1**, 269–271 (1959).
- H. Dodel, D. Häupler: *Satellitennavigation*. 2. korr. u. erw. Aufl., Springer-Verlag, Berlin Heidelberg 2010, ISBN 978-3-540-79443-1, 978-3-540-79444-8 (eBook).
- G. Glaeser: *Briefe der Geometrie an die Mathematik*. Informationsblätter der Geometrie (IBDG) **34**, 25–38 (2015).



- G. Glaeser, H. Stachel, B. Odehnal: *The Universe of Conics*. Springer Spektrum, Heidelberg 2016, ISBN 978-3-662-45449-7, 978-3-662-45450-3 (eBook).
- Sh. Izumi: *Sufficiency of simplex inequalities*. Proc. Amer. Math. Soc. **144**, no. 3, 1299–1307 (2016).
- E. F. Moore: *The shortest path through a maze*. Proc. Internat. Symposium on the Theory of Switching, Cambridge/MA 1957, Harvard University Press, Cambridge 1959, S. 285–292.
- A. Schoenflies: *Einführung in die Analytische Geometrie der Ebene und des Raumes*. Verlag von Julius Springer, Berlin 1925.
- T. Schüttler: *Satellitennavigation*. Springer Vieweg, Berlin Heidelberg 2014, ISBN 978-3-642-53886-5, 978-3-642-53887-2 (eBook).
- D. Sobel: *Längengrad*. Berliner Taschenbuch Verlag, Berlin 2003, engl. Original: *Longitude*, Walker & Comp 1995.



- H. Stachel: *Why shall we also teach the theory behind Engineering Graphics*. Institut für Geometrie, TU Wien, Technical Report **35** (1996).
- O. J. Staude: *Flächen 2. Ordnung und ihre Systeme und Durchdringungskurven*. In *Encyklopädie der math. Wiss.* III.2.1, Nr. C2, B.G. Teubner, Leipzig 1915, S. 161–256.

