

Die beiden Lieschen
Geraden-Kugel-Transformationen
in synthetischer Behandlung

I N A U G U R A L - D I S S E R T A T I O N

Zur Erlangung der Doktorwürde
an der Philosophischen Fakultät der
Karl-Franzens-Universität in Graz

Eingereicht
von
H e l l m u t h S t a c h e l
in
G r a z
1968

Meinen verehrten Lehrern,
Herrn o. Hochschulprof. Dr. Fritz H o h e n b e r g
und Herrn o. Univ. Prof. Dr. Georg K a n t z , danke
ich aufrichtig für die mir bei der Abfassung der vor-
liegenden Arbeit gewährte Unterstützung.

I n h a l t s v e r z e i c h n i s

	Seite
1. Die euklidische Strahl-Kugel-Transformation	1
2. Die nichteuklidische Strahl-Kugel-Transformation	10
3. Zwei Folgerungen	16
4. Allgemeine Sätze	20
5. Die Transformation (N.6)	28
6. Eigenschaften der Transformation (N.6)	35
7. Die Transformation (E.6)	42
8. Weitere Transformationsmöglichkeiten	45
9. Netzprojektion, kinematische Abbildung, Speerabbildung	50
10. Transformationsmöglichkeiten des Typs b)	58
 Literaturverzeichnis	 64

Bezeichnungen und Abkürzungen

Beispiele

K_3, H_4, \dots	lineare Räume bestimmter Dimensionen
M_3^2, M_4^2, \dots	Quadriken bestimmter Dimensionen
$[H_0, K_0], \dots$	Verbindungsraum
$(K_3, M_3^2), \dots$	Schnittraum
$H_0 \subset P_5, \dots$	Teilraum
A, B, P, ..	Punkte
g, k,	Geraden, Kurven
$\varepsilon, \pi, \Phi, \dots$	Ebenen, Flächen
$\mathcal{L}, \mathcal{K}, \dots$	Geradenmannigfaltigkeiten
$\mathcal{T}, \mathcal{P}, \dots$	Transformationen

GKT	Geraden-Kugel-Transformation
e.	euklidisch
ne.	nichteuklidisch
i.allg.	im allgemeinen
ee.	eineindeutig

Zahlen in eckigen Klammern weisen auf den Literaturnachweis auf den Seiten 64 bis 66 hin. Die Abbildungen befinden sich im Anhang.

E i n l e i t u n g

Die vorliegende Arbeit behandelt die von S.LIE [16] entdeckten Abbildungen der Geraden eines Raumes auf die orientierten euklidischen oder nichteuklidischen Kugeln eines zweiten Raumes. (Die analoge Abbildung auf Kugeln eines isotropen Raumes wird nur erwähnt). Diese Abbildungen sind Berührtransformationen und schaffen einen Übergang von der Liniengeometrie zur Kugelgeometrie der einzelnen Metriken mit einer Reihe interessanter Eigenschaften.

In dieser Arbeit geht es mehr um die Frage der konstruktiven Durchführung dieser Abbildungen: Nach Wiederholung bekannter Möglichkeiten, die (projektiv verallgemeinerte) euklidische und die nichteuklidische Geraden-Kugel-Transformation aus Abbildungsmethoden der Darstellenden Geometrie zusammensetzen (§§1,2), werden auf synthetischem Wege weitere solche Möglichkeiten abgeleitet und untersucht (§§3,5-8,10). Diese können größtenteils als Verallgemeinerungen der Konstruktion von E.MÜLLER [22] angesehen werden. Ausgangspunkt sind die im § 4 aufgestellten Sätze, die notwendige und hinreichende Bedingungen zur Erzeugung von Geraden-Kugel-Transformationen angeben.

Zusätzlich werden Querverbindungen zwischen einzelnen Konstruktionen hergestellt. Daraus ergibt sich im § 3 ein aus einem Zweispurensystem und Projektionen zusammengesetzter Übergang von Geraden eines Raumes auf Punkte einer regulären Quadrik eines fünfdimensionalen Raumes. Weitere Querverbindungen lassen Beziehungen zwischen kinematischer Abbildung und Netzprojektion, sowie zwischen einer Zusammensetzung aus kinematischer Abbildung und stereographischer Projektion und der STUDY'schen Speerabbildung vermuten. Dies wird im § 9 gezeigt.

1. Die euklidische Geraden-Kugel-Transformation

Die Geraden eines projektiven dreidimensionalen Raumes sind durch Verwendung von PLÜCKERSchen Linienkoordinaten eineindeutig auf die Punkte einer regulären Quadrik M_4^2 eines projektiven fünfdimensionalen Raumes P_5 abbildbar. Das Analoge gilt für die orientierten euklidischen Kugeln eines dreidimensionalen konformen Raumes bei Verwendung hexasphärischer Koordinaten. Die beiden Quadriken haben verschiedene Signaturen, sind daher nur durch eine komplexe Projektivität eineindeutig aufeinander abbildbar. Die sich daraus ergebende, allerdings nur im Komplexen durchführbare Beziehung zwischen Geraden- und Kugelraum heißt "euklidische Geraden-Kugel-Transformation" (kurz "e.GKT"). Die folgende Aufstellung zeigt einige der Eigenschaften und die entsprechende Bedeutung auf der Quadrik M_4^2 im P_5 :

1.1

im Geradenraum	auf M_4^2	im Kugelraum
Geraden	Punkte von M_4^2	orientierte Kugeln (einschließlich Nullkugeln, orientierte Ebenen)
zwei schneidende Geraden	zwei konjugierte Punkte bzgl. M_4^2	zwei berührende Kugeln (speziell: zwei Minimalkegel mit einer gemeinsamen Erzeugenden)
"Hauptgewinde" \mathcal{H}^1 , ein regulärer linearer Strahlkomplex	eine spezielle, nicht berührende Hyperebene H_4	Komplex der Nullkugeln (Minimalkegel, Minimalebenen, Fernpunkt)
"Nebenkomples" \mathcal{N}_e , ein singulärer linearer Strahlkomplex	eine spezielle, berührende Hyperebene U_4	Komplex der orientierten Ebenen (einschließlich Minimalebenen, Fernpunkt)
Nebenkomplesachse u aus \mathcal{H}	Berührungspunkt U_0 von U_4 mit M_4^2 ; U_0 aus H_4	Fernpunkt des konformen Raumes
Strahlbündel oder Strahlfeld	eine ganz auf M_4^2 liegende Ebene	orientierte Kugeln mit einer gemeinsamen Minimalgeraden.

Da der Komplex der Nullkugeln des konformen Raumes ohne Minimalebenen und Fernpunkt mit der Menge der eigentlichen Punkte des Kugelraumes identisch ist, ist in einer e.GKT folgende Teil-

1) Diese Bezeichnungen stammen von BECK [1].

1. Die euklidische Geraden-Kugel-Transformation

abbildung enthalten:

1.2 Den Geraden aus dem Hauptgewinde \mathcal{L}_2 entsprechen i.allg. ein-eindeutig die eigentlichen Punkte des Kugelraumes, den Ge-
raden aus dem Hauptgewinde durch einen Punkt des Geradenrau-
mes die eigentlichen Punkte einer Minimalgeraden.

Bemerkung 1.1: LIE nennt diese Zuordnung zwischen dem Hauptgewin-
de \mathcal{L}_2 und dem Minimalgeradenkomplex "polar". Um Verwechslungen
auszuschließen, sei sie im folgenden "L-polar" genannt.

Umgekehrt ist durch die Eigenschaften 1.2 eine e.GKT fest-
gelegt: Eine allgemeine Gerade aus dem Linienraum bestimmt als
Ort der sie schneidenden Hauptgewindestrahlen ein Strahlnetz. Die
Geraden dieses Netzes sind i.allg. auf zwei Arten in ∞^1 Büschel
zusammenzufassen. Unter Voraussetzung von 1.2 ist das Bild im Ku-
gelraum eine Fläche, deren Punkte auf zwei Arten in ∞^1 Minimal-
geraden zusammenzufassen sind. Sie muß daher von zweitem Grad,
also eine Kugel sein. Einer Geraden entspricht eine Erzeugenden-
schar dieser Kugel, somit eine orientierte Kugel. Zwei bzgl. \mathcal{L}_2
reziproken Geraden entsprechen die zwei möglichen Orientierungen
einer Kugel.

Man kann nun weiter zeigen, daß diese Beziehung eineindeu-
tig wird zwischen der Gesamtheit der Geraden und den orientierten
Kugeln des konformen Raumes, also eine e.GKT sein muß.

1.3 Der Kugelraum wird in Hinkunft nicht als konformer, sondern
als projektiver Raum K_3 aufgefaßt. In ihm ist ein einteili-
ger Kegelschnitt, der "absolute Kegelschnitt" k vorgegeben.
Die Punkte der Ebene von k , der "absoluten Ebene" ²⁾, werden
als uneigentliche bezeichnet im Gegensatz zu den eigent-
lichen Punkten von K_3 . Die nicht in der absoluten Ebene lie-
genden Treffgeraden von k heißen Minimalgeraden. Die von Mi-
nimalgeraden gebildeten Regelscharen werden orientierte Ku-
geln genannt.

Der Linienraum wird mit L_3 bezeichnet, da zumeist die Punkte
und nicht die Geraden das Grundelement sind.

Erfüllt eine Abbildung die in 1.2 gestellten Bedingungen bei
Verwendung der nun verallgemeinerten Begriffe, so wird diese

²⁾ Diese Ebene muß nicht die Fernebene von K_3 sein. Sie entspricht
jedoch dem Fernpunkt des konformen Raumes.

1. Die euklidische Geraden-Kugel-Transformation
weiterhin als e.GKT bezeichnet.

Auf den folgenden Seiten des ersten Kapitels werden die wichtigsten der bisher bekannten Konstruktionen einer e.GKT ohne ausführliche Begründungen wiederholt.

Da bei einer e.GKT den Geraden des Hauptgewindes \mathcal{L}_3 die Punkte aus K_3 , den Büscheln aus \mathcal{L}_3 Geraden entsprechen sollen, liegt nahe, von den Geraden des Linienraumes zu Bildpunkten auf der Plückerquadrik $M_4^2 \subset P_5$ überzugehen. Die Geraden aus \mathcal{L}_3 bilden sich dabei auf die Punkte einer in einem vierdimensionalen Raum H_4 gelegenen Teilquadrik M_3^2 ab; den ∞^3 Büscheln von Gewindestrahlen entsprechen die ∞^3 Erzeugenden der Teilquadrik. Nun wird man, um 1.2 zu erfüllen, die Quadrik M_3^2 stereographisch ³⁾ auf eine Hyperebene K_3 des H_4 abbilden. (Daß dies die einzige Möglichkeit ist, eine e.GKT herzustellen, wird im § 4 bewiesen). Dadurch entsprechen nun tatsächlich den Hauptgewindestrahlen Punkte, den Gewindestrahلبüscheln Geraden in K_3 . Diese Geraden sind, wie gezeigt wird, die Treffgeraden eines Kegelschnittes k . Also ist die Transformation eine e.GKT mit K_3 als Kugelraum.

Beweis: Der Punkt $U_0 \in M_3^2$ sei das Zentrum der stereographischen Projektion von M_3^2 nach K_3 . Jede nicht durch U_0 gehende Erzeugende von M_3^2 schneidet die Tangentialhyperebene U_3 in U_0 an M_3^2 in einem Punkt, also, da sie ganz auf M_3^2 liegt, den von den Erzeugenden durch U_0 gebildeten Kegel (U_3, M_3^2) . Die Projektion jeder allgemeinen Erzeugenden von M_3^2 schneidet daher die Projektion des Kegels, also dessen Schnittkegelschnitt k mit K_3 . Der Punkt U_0 selbst bildet sich auf die Ebene durch k , also auf die absolute Ebene ab, ist daher nach 1.1 und Fußnote ²⁾ der Bildpunkt der Geraden u auf der Plückerquadrik.

Zusammengefaßt gilt:

- (E.1): 1) Die Geraden eines Strahlgewindes \mathcal{L}_3 aus L_3 werden auf Punkte der im H_4 liegenden Teilquadrik M_3^2 der Plückerquadrik abgebildet; es sei U_0 das Bild des Gewindestrahles u .
2) Punkte von M_3^2 werden stereographisch aus U_0 auf Punkte eines linearen Teilraumes $K_3 \subset H_4$ projiziert.

³⁾ Die Projektion einer Quadrik aus einem ihrer Punkte, dem Zentrum, auf eine nicht durch diesen Punkt gehende Hyperebene, dem Bildraum, heißt stereographisch. Dabei wird nicht verlangt, daß der Tangentialraum im Zentrum zum Bildraum parallel ist.

1. Die euklidische Strahl-Kugel-Transformation

Damit ist L_3 dem K_3 durch eine e.GKT zugeordnet: \mathcal{K} ist das Hauptgewinde, u die Achse des Nebenkomplexes $\mathcal{K}_e \subset L_3$. Die durch U_0 gehenden Erzeugenden von M_3^2 schneiden K_3 im absoluten Kegelschnitt k .⁴⁾

Bemerkung 1.2: Ist \mathcal{K} ein singulärer Strahlkomplex, so berührt H_4 die Plückerquadrik M_4^2 . Projiziert man nun die singuläre Quadrik (H_4, M_4^2) aus einem ihrer Punkte nach K_3 , so erhält man nach WEISS [39] die Eulersche Transformation, also nach STRUBECKER [31] die GKT für einen isotropen Kugelraum. Projiziert man die singuläre Quadrik (H_4, M_4^2) aus einem nicht auf ihr liegenden Punkt nach K_3 , so ergibt sich die Transformation von STÄHELIN [27]. Für beide gibt SCHUR [26] Konstruktionen innerhalb eines dreidimensionalen Raumes an.

Die Transformation (E.1) läßt sich unmittelbar zur Transformation allgemeiner Geraden g aus L_3 erweitern: Den Punkten von g entspricht eine Geradenschar einer Teilfläche $G_2^2 \subset M_3^2$, welche stereographisch auf die orientierte Bildkugel \mathcal{K} projiziert wird.

Man kann aber auch vom Bildpunkt G_0 von g auf der Plückerquadrik M_4^2 ausgehen: Die Bildpunkte der g schneidenden Geraden liegen in der Polarhyperebene zu G_0 bzgl. M_4^2 . Im Schnitttraum Γ_3 dieser Hyperebene mit H_4 liegen die Bilder der schneidenden Geraden aus \mathcal{K} auf einer nicht orientierten Fläche G_2^2 . (Abb.1 am Ende der Arbeit zeigt das Bild des analogen dreidimensionalen Falles in metrischer Spezialisierung). Genauso, wie man in L_3 g als Ort seiner Punkte (und nicht der Ebenen) auffaßt, um als Bild eine orientierte Kugel zu erhalten, kann man durch Auszeichnung einer Schar von Ebenen auf der Plückerquadrik eine Erzeugendenschar von G_2^2 auszeichnen und somit auch deren stereographische Projektion \mathcal{K} orientieren.

Nach den Gesetzen der Polarität an M_4^2 erhält man G_2^2 auch, wenn man G_0 aus dem Pol H_0 zu H_4 bzgl. M_4^2 nach G'_0 in H_4 projiziert und nun in H_4 den Polarraum Γ_3 zu G'_0 bzgl. M_3^2 aufsucht. Hier jedoch ist eine Orientierung von G_2^2 nicht möglich, da zwei bzgl. H_4 harmonisch liegenden Punkten von M_4^2 derselbe Punkt G'_0 entspricht.

Die Tangentialhyperebene U_3 in U_0 an M_3^2 schneidet K_3 in

⁴⁾ Diese Herleitung einer e.GKT erwähnen KLEIN [14], STUDY [35], WEISS [37], [38].

1. Die euklidische Strahl-Kugel-Transformation

dessen absoluter Ebene. Daher wird der Pol G'_0 zu Γ_3 bzgl. M_3^2 auf den (durch 1.3 projektiv verallgemeinerten) Mittelpunkt der Bildkugel γ projiziert. Insgesamt erhält man diesen Mittelpunkt durch Projektion des Punktes G_0 auf M_4^2 aus der Geraden $[H_0, U_0]$ nach K_3 .

(E.1) als Transformation allgemeiner Geraden g aus L_3 lautet also:

- (E.1') 1) Die Geraden $g \subset L_3$ werden auf Punkte G_0 der Plückerquadrik M_4^2 abgebildet.
2) Die Tangentialhyperebene G_4 zu G_0 bzgl. M_4^2 schneidet nach Auszeichnung einer Ebenenschar auf M_4^2 eine vorgegebene Hyperebene H_4 in einer Erzeugendenschar.
3) Diese wird stereographisch aus einem Punkt U_0 der regulären Teilquadrik $M_3^2 = (H_4, M_4^2)$ auf einen linearen Teilraum $K_3 \subset H_4$ projiziert.

Die Beziehung zwischen L_3 und K_3 ist eine e.GKT. Die Punkte von M_3^2 sind Bilder der Geraden des Hauptgewindes \mathcal{H} aus L_3 . Das Urbild u von U_0 ist die Achse des Nebenkomplexes \mathcal{N}_e . Die durch U_0 gehenden Erzeugenden von M_3^2 schneiden K_3 in dessen absolutem Kegelschnitt k .

Ebenfalls über Räume höherer Dimension führt eine Ableitung einer e.GKT von WEISS [40], [43]: Die Linienelemente der Minimalgeraden aus K_3 werden auf eine Segresche Mannigfaltigkeit M_4^4 eines P_7 abgebildet. Eine Projektion der M_4^4 aus einem geeigneten P_3 nach L_3 ergibt eine e.GKT.

LIE stieß auf die e.GKT, indem er in der nach ihm benannten Abbildungsmethode die komplexen Punkte einer reellen Ebene E auf die reellen Punkte eines vierdimensionalen Raumes R_4 abbildete. Hat der Punkt von E die kartesischen Koordinaten $(x+iy, z+it)$, so hat der zugeordnete R_4 -Punkt die kartesischen Koordinaten (x, y, z, t) . Den komplexen Geraden aus E entsprechen dadurch die reellen Treffebenen zweier konjugiert komplexer windschiefer Ferngeraden g, \bar{g} .

In einer Korrelation in E mögen den Punkten einer Geradenkette mit dem Zentrum auf der Ferngeraden e von E die Geraden durch die Punkte einer Punktkette auf e entsprechen. Bild dieses Teiles der Korrelation ist im R_4 eine Abbildung der reellen Punkte einer Hyperebene L_3 auf ∞^3 Ebenen, die je eine Erzeugende einer g und \bar{g} schneidenden Regelschar Φ enthalten. Nach Schnitt dieser

1. Die euklidische Strahl-Kugel-Transformation

Ebenenmannigfaltigkeit mit einer allgemein liegenden Hyperebene K_3 des R_4 erhält man eine i.allg. eindeutige Zuordnung zwischen Punkten aus L_3 und Treffgeraden des Kegelschnittes $k = (\Phi, K_3)$. Umgekehrt müssen als Bild der kontragredienten Korrelation in E den Treffgeraden an k durch einen Punkt aus K_3 die Punkte einer Geraden aus L_3 entsprechen. Diese gehören, wie allgemein im § 4 bewiesen wird, einem linearen Komplex an. Also ist die Transformation zwischen L_3 und K_3 eine e.GKT.

- (E.2): 1) Die komplexen Punkte einer reellen Ebene E werden durch die LIEsche Abbildung auf reelle Punkte eines R_4 abgebildet. Den komplexen Geraden aus E entsprechen dadurch reelle Treffebenen zweier konjugiert komplexer Ferngeraden g, \bar{g} .
2) Entsprechend einer Korrelation in E , die einen Fernpunkt in die Ferngerade transformiert, sind den Punkten einer Hyperebene $L_3 \subset R_4$ ∞^3 Treffebenen zugeordnet.
3) Diese Ebenenmannigfaltigkeit wird von einer allgemein liegenden Hyperebene $K_3 \subset R_4$ in den ∞^3 Treffgeraden eines Kegelschnittes geschnitten.

Damit erhält man im R_4 eine e.GKT zwischen den Teilräumen L_3 und K_3 .

Aus dieser Abbildung leitet BRACH [6] jene in einem dreidimensionalen Raum durchführbare Konstruktion ab, die auch LIEB-MANN [21] angegeben hat: ⁵⁾

- (E.3): Voraussetzung: Zwei Ebenenbündeln A_1, A_2 aus K_3 sind zwei Geradenbündel B_1, B_2 in L_3 je korrelativ zugeordnet. Dabei habe die Gerade $[B_1, B_2]$ in beiden Korrelationen die gleiche Ebene durch $[A_1, A_2] \subset K_3$ als Urbild. In den jeweils kontragredienten Korrelationen sollen der Geraden $[A_1, A_2]$ zwei verschiedene Ebenen durch $[B_1, B_2]$ in L_3 entsprechen.

Einem Punkt P aus K_3 ordnet man die Schnittgerade p der den Geraden $[P, A_1]$ und $[P, A_2]$ korrelativ entsprechenden Bündel-ebenen in L_3 zu und umgekehrt.

Damit entsprechen P und p einander in einer e.GKT. $[B_1, B_2]$ in L_3 ist Achse u des Nebenkomplexes \mathcal{K}_e .

Dieselbe Konstruktion leitet WEISS [38] aus (E.1) ab. Zu ihr kommt man auch, wenn man auf der Suche nach einer L -polaren

⁵⁾ Bei den folgenden Konstruktionen werden K_3 und L_3 in vereinigter Lage angenommen.

1. Die euklidische Strahl-Kugel-Transformation

Abbildung zwischen Minimalgeradenkomplex und Strahlgewinde von der Zusammensetzung zweier Korrelationen zwischen L_3 und K_3 ausgeht.⁶⁾

Durch Dualisierung des Linienraumes läßt sich aus (E.3) eine weitere Konstruktion ableiten: Nun sind den Ebenenbündeln A_1, A_2 aus K_3 zwei Geradenfelder β_1, β_2 in L_3 projektiv zugeordnet. Dabei muß der Geraden (β_1, β_2) dieselbe Ebene durch $[A_1, A_2]$ entsprechen, während dem gemeinsamen Strahl $[A_1, A_2]$ zwei verschiedene Punkte auf (β_1, β_2) zugeordnet sein müssen. Versucht man nun, diese Projektivitäten aus Projektionen aufzubauen, so kommt man auf die von MÜLLER [22] angegebene Konstruktion:

Zu Geraden des Hauptgewindes \mathcal{L}_3 aus L_3 werden die Spurpunkte in den Ebenen β_1, β_2 durch den Gewindestrahl u aufgesucht, sodann β_1 und β_2 aus einem allgemeinen Punkt O in die Ebene Π projiziert (eventuell $\Pi = \beta_1$). Nach SYLVESTER entsprechen den Gewindestrahlen Punktepaare einer zentralen Korrelation. Sind B_1, B_2 auf u die Träger der Gewindestrahlbüschel in β_1 bzw. β_2 , so sind deren Bilder in Π die Zentren der zentralen Korrelation. Achse ist die Spur der von den Gewindestrahlen durch O gebildeten Ebene.

Projiziert man andererseits K_3 aus A_1 bzw. A_2 auf zwei Ebenen α_1 bzw. α_2 und diese aus einem allgemeinen Punkt O' , nicht auf $[A_1, A_2]$, weiter nach Π , so liegen die zwei Bilder eines Punktes aus K_3 auf entsprechenden Geraden der perspektiven Kernstrahlbüschel. Sie sind also ebenfalls Punktepaare einer zentralen Korrelation. Perspektivitätsachse ist das Bild der Geraden (α_1, α_2).

Haben beide zentrischen Korrelationen gleiche Achsen und gleiche Zentren, so sind über gleiche Bildpunktepaare in Π oder bei $O' = O$ durch direkte Projektion aus O von α_1 nach β_1 und α_2 nach β_2 die Hauptgewindestrahlen aus L_3 auf Punkte aus K_3 abbildbar. Umgekehrt entsprechen den Büscheln von Gewindestrahlen aus \mathcal{L}_3 die Punkte von Geraden aus K_3 .

(E.4): Voraussetzungen: a) In L_3 seien zwei Spurebenen mit der Schnittgeraden u gegeben. Diese werden aus einem allgemeinen Raumpunkt auf eine Ebene Π projiziert. \mathcal{L}_3 sei ein Strahlgewinde durch u . Durch Abbildung der Geraden aus \mathcal{L}_3

⁶⁾ Berührtransformationen, die durch Zusammensetzung zweier Korrelationen höheren Grades entstehen, behandelt LIE in [17].

1. Die euklidische Strahl-Kugel-Transformation

entsteht eine zentrale Korrelation in Π . Z_1, Z_2 seien die Zentren, z die Achse.

b) Ein allgemeines Zweibildersystem in K_3 habe ebenfalls die Ebene Π als Bildebene. Z_1, Z_2 seien die Träger der Kernstrahlbüschel, z deren Perspektivitätsachse.

1) Gewindestrahlen $p \subset \mathcal{L}_3$ werden durch das Zweispurensystem a) auf ein Punktepaar P_1, P_2 in Π abgebildet.

2) Dieses wird als Bild eines Punktes $P \subset K_3$ im Zweibildersystem b) aufgefaßt.

Ordnet man p und P einander zu, so entsteht eine e.GKT. Der absolute Kegelschnitt in K_3 ist der Koinzidenzkegelschnitt des allgemeinen Zweibildersystems. Allgemeinen Geraden aus L_3 entsprechen über perspektive Strahlbüschel in Π die orientierten Kugeln in K_3 .

Eine weitere interessante Transformationsmöglichkeit geben BLASCHKE [45] und STRUBECKER [32] an: In der kinematischen Abbildung entsprechen einem allgemeinen Raumpunkt aus L_3 in einer Bildebene Π Punktepaare einer Drehung. Unterwirft man ein gegebenes orientiertes Linienelement ("Ursoma") dieser Drehung, so ist eine i.allg. eineindeutige Zuordnung zwischen Raumpunkten und orientierten Linienelementen hergestellt. Diese Abbildung sei kurz "kinematische Elementabbildung" genannt. Allgemeinen Geraden entsprechen dabei "Turbinen" (nach KASNER bzw. STRUBECKER) oder "Reguli" (nach BLASCHKE), nämlich ∞^1 Linienelemente, die durch Drehung um einen festen Punkt auseinander hervorgehen. Speziell haben Zykel in Π als Urbilder die Geraden eines Strahlgewindes.

Die Minimalgeraden aus K_3 , diesmal als C-Geraden aufgefaßt (siehe [23]), können durch die zyklographische Abbildung ebenfalls eindeutig auf orientierte Linienelemente in Π abgebildet werden. Turbinen sind hier Bilder von orientierten C-Kugeln. Also ist durch Zusammensetzung der beiden Abbildungen eine e.GKT herzustellen.

(E.5): 1) Punkte aus L_3 werden durch die kinematische Elementabbildung auf orientierte Linienelemente einer Ebene Π abgebildet.

2) Diese werden als Bilder von C-Geraden aus K_3 in der zyklographischen Abbildung aufgefaßt.

Damit sind Punkte aus L_3 und C-Geraden aus K_3 in einer e.

1. Die euklidische Strahl-Kugel-Transformation

GKT einander zugeordnet. Allgemeinen Geraden aus L_3 entsprechen über Turbinen in \mathbb{P} die orientierten C-Kugeln aus K_3 . Den Geraden des Hauptgewindes sind über Zykel die C-Nullkugeln zugeordnet.

In [38] gibt WEISS eine analoge Transformation an. Nur verwendet er als Linienraumabbildung analytisch die von LIE [19] (S.238) angegebene Abbildung der Raumpunkte auf (nach WEISS [42]) orientierte Linienelemente einer Ebene. Diese Abbildung muß bis auf eine dualistische Transformation in L_3 mit der kinematischen Elementabbildung übereinstimmen.

Die von SCHUR [26] und WEISS [38] genannte Abbildungsmöglichkeit (E.9) wird im § 8 behandelt.

2. Die nichteuklidische Strahl-Kugel-Transformation

=====

Analog zu 1.2 wird eine nichteuklidische Geraden-Kugel-Transformation (kurz "ne.GKT") durch eine L-polare Beziehung (siehe Bemerkung 1.1) zwischen einem linearen Strahlgewinde, dem Hauptgewinde \mathfrak{H} im Geradenraum L_3 , und dem Tangentenkomplex einer regulären Fläche Ω 2.Ordnung im Kugelraum K_3 festgelegt. Damit entspricht einer allgemeinen Geraden g aus L_3 als Ort ihrer Punkte eine von Tangenten an Ω gebildete Regelschar, also eine orientierte nichteuklidische (kurz "ne.") Kugel γ , falls Ω als absolute Fläche einer ne. Geometrie aufgefaßt wird. Die g schneidenden Hauptgewindestrahlen bilden sich auf die Punkte von γ ab.

Die Abbildung von Hauptgewindestrahlen aus L_3 auf Punkte aus K_3 kann nun nicht eineindeutig sein: Es gibt in K_3 zwei Schnittpunkte einer allgemeinen Tangente von Ω mit einer ne. Kugel γ . In L_3 jedoch schneidet nur ein Hauptgewindestrahl durch einen allgemeinen Punkt die Gerade g .

Es zeigt sich ⁷⁾, daß diese Zuordnung ausnahmslos zweieindeutig gestaltet werden kann; eine ne.GKT erfüllt also folgende Bedingungen:

2.1 Je zwei Gewindestrahlen h, \bar{h} aus L_3 , die einander in einer windschiefen Involution \mathfrak{J} mit den Achsen p, q (reziprok bzgl. \mathfrak{H}) entsprechen, sind eineindeutig einem Punkt aus K_3 zugeordnet. Die Paare von Gewindestrahlbüscheln, involutorisch bzgl. \mathfrak{J} , entsprechen dabei den Tangenten einer regulären Fläche Ω 2.Ordnung in K_3 .

Es bestehen dann folgende weitere Zuordnungen:

2.2

Geradenraum	Kugelraum
Treffgeraden von p und q	Punkte auf Ω
Punkte auf p oder q	Erzeugende der beiden Scharen von Ω
Geradenpaar g, \bar{g} , involutorisch bzgl. \mathfrak{J}	orientierte ne. Kugel
Dazu bzgl. \mathfrak{H} reziprokes Geradenpaar \bar{g}, g	entgegengesetzt orientierte Kugel
Nebenkomplex π_n , ein Strahlgewinde, welches das Treffgeradennetz von p, q enthält und zu	Komplex der Ebenen (je als Gesamtheit der inzidenten absoluten Tangenten aufzufassen).

⁷⁾ Siehe etwa BECK [1].

2. Die nichteuklidische Strahl-Kugel-Transformation

\mathcal{L}_3 involutorisch ist.

Wegen der speziellen Lage von \mathcal{L}_3 und \mathcal{K}_n zueinander ist die Zusammensetzung der durch \mathcal{L}_3 und \mathcal{K}_n bestimmten Nullsysteme genau die Involution \mathcal{J} . Daher gilt:

- 2.3 g und \hat{g} , sowie \bar{g} und $\hat{\bar{g}}$ sind reziprok bzgl. \mathcal{L}_3 ,
 g und \bar{g} , sowie \hat{g} und $\hat{\bar{g}}$ sind involutorisch bzgl. \mathcal{J} ,
 g und \hat{g} , sowie \bar{g} und $\hat{\bar{g}}$ sind reziprok bzgl. \mathcal{K}_n .

Für den nichteuklidischen Fall gibt es folgende zu (E.1) analoge Konstruktion: Die Hauptgewindestrahlen werden auf Punkte der Teilquadrik M_3^2 der Plückerquadrik abgebildet. Als zweieindeutige Abbildung auf den Kugelraum ist nun nur (siehe § 4) die Projektion aus einem nicht auf M_3^2 liegenden Punkt möglich.

(N.1): 1) Die Geraden eines Strahlgewindes \mathcal{L}_3 aus L_3 werden auf Punkte der im H_4 liegenden regulären Teilquadrik M_3^2 der Plückerquadrik abgebildet.

2) Punkte von M_3^2 werden aus einem nicht auf M_3^2 liegenden Punkt K_0 auf dessen Polarraum K_3 bzgl. M_3^2 projiziert.

Damit sind L_3 und K_3 durch eine ne.GKT einander zugeordnet. \mathcal{L}_3 ist das Hauptgewinde; die Schnittfläche (K_3, M_3^2) , zugleich der scheinbare Umriß von M_3^2 , ist die absolute Fläche Ω .⁸⁾

Wie im euklidischen Fall läßt sich die Transformation (N.1) auf allgemeine Geraden g aus L_3 erweitern: G_0 sei der zugeordnete Punkt auf der Plückerquadrik M_4^2 . Die Polarebene zu G_0 bzgl. M_4^2 schneidet H_4 in Γ_3 . Die Schnittfläche (Γ_3, M_3^2) wird aus K_0 auf die Bildkugel \mathcal{K} in K_3 projiziert. Wie früher ließe sich \mathcal{K} orientieren. Aus den Gesetzen der Polarität folgt, daß die Projektion von G_0 aus $[H_0, K_0]$ nach K_3 den ne. Mittelpunkt der entsprechenden ne. Kugel \mathcal{K} ergibt. Dabei ist H_0 der Pol zu H_4 bzgl. M_4^2 .

Analog zum euklidischen Fall läßt sich nach WEISS [41], [43] durch Abbildung der orientierten Linienelemente einer Kugel auf Punkte einer Segreschen Mannigfaltigkeit $M_3^6 \subset P_7$ und Projektion aus einem P_3 nach L_3 eine ne.GKT herstellen.

Die ne.GKT steht analog zu (E.2) in Beziehung zu Korrelationen der ins Komplexe erweiterten reellen Ebene E : Unterwirft

⁸⁾ Diese Transformation findet sich bei WEISS [38] und bei FREYTAG [10].

2. Die nichteuklidische Strahl-Kugel-Transformation

man einen Hyperkegelschnitt aus E einer Korrelation und bildet man dies durch die LIEsche Abbildung auf den R_4 ab, so läßt sich, wie BRACH [7] zeigt, eine ne.GKT herstellen. Er kommt dabei auf dieselbe Konstruktion wie SCHRÖDER [25]:⁹⁾

Zu Geraden h des Hauptgewindes \mathcal{H} werden in zwei Spurebenen durch p die Spurpunkte aufgesucht und aus einem allgemeinen Punkt in eine Ebene Π projiziert; man erhält Paare konjugierter Punkte H_1, H_2 einer biachsialen Korrelation. Die Involution \mathcal{J} bildet sich in Π auf harmonische Kollineationen ab, deren Achse das Bild $p_1 = p_2$ von p , deren Zentren die Bilder Q_1, Q_2 der Spurpunkte von q sind. Ein bzgl. \mathcal{J} involutorisches Strahlenpaar h, \bar{h} aus \mathcal{H} bildet sich somit auf zwei Punktepaare H_1, \bar{H}_1 bzw. H_2, \bar{H}_2 dieser harmonischen Kollineationen ab. Jedem dieser Paare kann nun ein einziger Punkt \bar{H}'_1 bzw. \bar{H}'_2 zugeordnet werden, wenn man nach Vorgabe einer allgemeinen Hilfsgeraden g in Π auf dem Strahl durch Q_1 bzw. Q_2 den zum Punktepaar vierten harmonischen Punkt zum Schnittpunkt mit g aufsucht. Bild eines Paares in \mathcal{J} entsprechender Geradenstrahlen ist damit ein Punktepaar \bar{H}'_1, \bar{H}'_2 einer quadratischen Punkt-Kurvenverwandtschaft.

Unter gewissen Bedingungen erhält man in Π dieselbe Verwandtschaft, wenn man Punkte aus K_3 durch zwei parabolische Geradenetze, die eine Regelschar gemein haben, auf Punktepaare einer Ebene abbildet. Also kann man diese Transformationen zu einer Zuordnung von Strahlen aus \mathcal{H} auf Punkte aus K_3 zusammensetzen. Dabei entsprechen Büschelpaaren aus \mathcal{H} Tangenten an die den beiden Netzen gemeinsame Regelschar in K_3 ; also ist die Transformation eine ne. GKT.

- (N.2): 1) Eine geeignete Zweispurenabbildung in L_3 ordnet einem in \mathcal{H} enthaltenen Strahlenpaar der Involution \mathcal{J} zwei Punktepaare zweier harmonischer Kollineationen in einer Ebene Π zu.
- 2) Diese werden einer zweieindeutigen Transformation unterworfen, indem man zu den Punkten einer vorgegebenen Geraden g in Π je die harmonischen Punkte bzgl. dieser Paare aufsucht.
- 3) Das entstehende Punktepaar wird als Projektion eines Punktes aus K_3 nach Π vermöge zweier parabolischer Strahl-

⁹⁾ Diese Konstruktion wird von den Verfassern als Verallgemeinerung der MÜLLERSchen Konstruktion (E.4) bezeichnet.

2. Die nichteuklidische Strahl-Kugel-Transformation

netze mit gemeinsamer Regelschar Ω aufgefaßt.

Damit erhält man eine ne.GKT mit Ω als absoluter Fläche.

Die zu (E.5) analoge Konstruktion gibt STRUBECKER [28] an. Verwendet wird dabei die Abbildung STUDYS [34] von "Linienkreuzen" auf Strahlenpaare: Gegeben sei in L_3 eine nullteilige Kugel \mathcal{K} als absolute Fläche einer elliptischen Raumgeometrie. Nun ordnet man jeder Raumgeraden die links- und rechtsparallele Gerade bzgl. \mathcal{K} durch den Mittelpunkt O von \mathcal{K} zu. Diese Abbildung ist eineindeutig zwischen Paaren polarer Geraden bzgl. \mathcal{K} (=Linienkreuzen) und Geradenpaaren aus dem Bündel O ¹⁰⁾. Dabei entsprechen den Links- (Rechts-)schiebungen bzgl. \mathcal{K} euklidische Drehungen des linken (rechten) Bündels, woraus ableitbar ist, daß den Geraden durch einen Punkt aus L_3 in dem Bündel O die Strahlenpaare einer Bündelbewegung entsprechen. Unterwirft man auf einer einteiligen Kugel Ω mit dem Mittelpunkt O ein vorgegebenes orientiertes Linienelement dieser Bündelbewegung, so erhält man eine eineindeutige Abbildung der Punkte aus L_3 auf die von orientierten Linienelementen auf Ω bestimmten orientierten Tangenten von Ω . Diese Abbildung sei kurz "sphärische Elementabbildung" genannt. Es läßt sich zeigen, daß einer Geraden aus L_3 eine Schar orientierter Tangenten von (als Erweiterung einer sphärischen Turbine), also eine "doppelt orientierte" ne. Kugel entspricht.

(N.3): Punkte aus L_3 werden durch die sphärische Elementabbildung auf orientierte Linienelemente einer Kugel Ω abgebildet. Diese bestimmen je eineindeutig eine orientierte Tangente von Ω .

Diese Zuordnung ist eine ne.GKT, eineindeutig zwischen Punkten aus L_3 und orientierten Tangenten an Ω in K_3 .¹¹⁾

Eine Transformationsmöglichkeit (N.7') nach SCHUR [26] und WEISS [38] ist im § 8 genannt.

Von LIE selbst und später von LIEBMANN [21] stammt der Gedanke, die ne.GKT aus einer e.GKT durch Zusammensetzung mit einer Darboux'schen Transformation abzuleiten. Ein Vergleich von 2.1 mit 1.2 zeigt dies unmittelbar, denn eine Darboux'sche Transformation

¹⁰⁾ Die dazu duale Abbildung hat ECKHART [8] gefunden und REHBOCK [24] als ne. kinematische Abbildung verwendet.

¹¹⁾ Analytisch ist dies unter anderen von BECK [2], [3] und STUDY [35] erreicht worden.

2. Die nichteuklidische Strahl-Kugel-Transformation

in K_3 bildet den Komplex der Treffgeraden eines Kegelschnittes k zweideutig auf den Tangentenkomplex einer Fläche Ω 2. Ordnung ab, wobei eigentliche Inzidenzen erhalten bleiben.

(N.4): Durch Zusammensetzung einer e.GKT mit einer Darboux'schen Transformation entsteht eine ne.GKT.

Eine mögliche Konstruktion einer Darboux'schen Transformation, die sich auch aus den Transformationen (E.1) und (N.1) ableiten läßt, ist folgende:

(D.1): Voraussetzung: K_3 sei linearer Teilraum eines vierdimensionalen projektiven Raumes H_4 . Eine reguläre Quadrik $M_3^2 \subset H_4$ durch den Kegelschnitt $k \subset K_3$ sei vorgegeben. U_3 sei eine Tangentialhyperebene aus der Ebene durch k an M_3^2 ; U_0 sei der Berührungspunkt von U_3 .

1) Die Treffgeraden von k in K_3 werden aus U_0 stereographisch auf die Erzeugenden von M_3^2 projiziert.

2) Erzeugendenpaare von M_3^2 werden aus einem nicht auf der Quadrik liegenden Punkt auf Tangenten des scheinbaren Umrisses Ω von M_3^2 nach K_3 zurückprojiziert.

LIEBMANN [21] gibt folgende im K_3 durchführbare Konstruktion an:

(D.2): (I) Ω sei eine (nach 1.3 verallgemeinerte) Kugel mit dem Mittelpunkt O ; eine Minimalgerade m schneide Ω im eigentlichen Punkt M .

Der Minimalgeraden m wird nun deren Projektion aus O in die Tangentialebene an Ω in M zugeordnet.

Die Umkehrung dieser Konstruktion ist mit der folgenden gleichwertig:

(II) Man sucht zu einem Punkt P den in der Polarebene bzgl. Ω liegenden Kegelschnitt $p \subset \Omega$ (nach 1.3 ein Kreis) auf; nun ordnet man P die zwei Spitzen der Minimalkegel durch p zu.

Unterwirft man zusätzlich den Minimalgeradenkomplex einer Inversion (gemäß 1.3 projektiv verallgemeinert), deren Zentrum Z auf Ω liegt, so geht der Kreis p über in einen Kreis p' in einer Ebene Π . p' und p liegen auf demselben Kegel durch Z . Den Minimalkegeln durch p entsprechen die Minimalkegel durch p' . Damit erhält man (siehe auch MÜLLER [23], WEISS [38]) folgende Abbildung:

2. Die nichteuklidische Strahl-Kugel-Transformation

- (D.3): 1) Die Minimalkegel durch Punkte P des euklidischen Kugelraumes schneiden eine Ebene Π in Kreisen p' (=isotrope Abbildung, nach 1.3 verallgemeinert).
- 2) p' in Π wird stereographisch aus Z auf einen Kreis p einer Kugel Ω projiziert. (Die Tangentialebene an Ω in Z schneide Π nur in uneigentlichen Punkten).
- 3) Der Pol zur Ebene durch p ist der zugeordnete Punkt P' des nichteuklidischen Kugelraumes.

3. Zwei Folgerungen

=====

(I) Nach (N.4) erhält man durch Zusammensetzung von (E.5) und (D.3) eine ne.GKT ¹²⁾. Da die zyklographischen Projektionen (E.5)2) und (D.3)1) einander aufheben, bleibt die Konstruktion:

(N.5): 1) Punkte aus L_3 werden durch die kinematische Elementabbildung auf orientierte Linienelemente einer Ebene \mathbb{T} abgebildet.

2) \mathbb{T} wird stereographisch aus einem Zentrum Z auf eine Kugel Ω projiziert. (Die Tangentialebene in Z an Ω sei parallel zu \mathbb{T}). Damit entspricht einem orientierten Linienelement in \mathbb{T} eine orientierte Tangente an Ω . ¹³⁾

Dadurch ist eine ne.GKT festgelegt. ¹⁴⁾

Diese Konstruktion ähnelt der Transformation (N.3) mit Hilfe der sphärischen Elementabbildung. Im § 9 wird gezeigt, daß bei geeigneter Wahl der Konstruktionen die durch (N.3) und (N.5) zugeordneten Linienelemente eines Punktes aus L_3 nach einer Drehung der Kugel Ω um 90° und einer Spiegelung am Kugelmittelpunkt zur Deckung gebracht werden können.

Bemerkung 3.3: Sätze der Geometrie der Ebene, die sich aus der zyklographischen Abbildung von Raumgebilden (in K_3) ableiten lassen, müssen auch durch die kinematische Abbildung von Raumgebilden (in L_3) ableitbar sein, da die Zusammensetzung der beiden Abbildungen die e.GKT (E.5) ist. Die stereographische Projektion der Ebene auf eine Kugel ergibt analoge Sätze der sphärischen Geometrie, die nun auf Grund des Zusammenhanges von (N.3) und (N.5) auch durch die sphärische Elementabbildung beweisbar sein müssen. Dabei hat letztere den Vorteil, ausnahmslos eineindeutig zu sein. Zum Beispiel: Die Sätze von CESÁRO und SCHEFFERS über Kurvenscharen der Ebene bewies MÜLLER [23] mit Hilfe der zyklographischen Abbildung. Eben-

¹²⁾ Die Minimalgeraden sind hier C-Geraden.

¹³⁾ Die in (D.3) noch auszuführende Polarität an Ω kann weggelassen werden, da der ne. Kugelraum selbstdual ist. Führt man die Polarität durch, so muß festgesetzt werden, in welchem Drehsinn dadurch orientierte Tangenten von Ω transformiert werden.

¹⁴⁾ WEISS [42], [38] gibt die analoge Transformation mit Hilfe der analytischen LIEschen Abbildung von Punkten aus L_3 auf orientierte Linienelemente in \mathbb{T} an.

3. Zwei Folgerungen

so wäre ein Beweis dieser Sätze durch die kinematische Elementabbildung möglich. Dieser wäre analog zum Beweis dieser Sätze für sphärische Kurvenscharen von STRUBECKER [29] mit Hilfe der sphärischen Elementabbildung.

(II) In der e.GKT (E.1) bzw. (E.1') wurde durch Projektionen ein Übergang von Bildpunkten der Geraden aus L_3 auf der Plückerquadrik M_4^2 zu Kugeln aus K_3 hergestellt. Stellt man andererseits eine e.GKT innerhalb eines dreidimensionalen Raumes z.B. durch (E.4) her, so muß umgekehrt rein synthetisch eine Abbildung von Geraden aus L_3 auf deren Bildpunkte auf der Plückerquadrik ableitbar sein:

Durch (E.4) werden die Geraden des Hauptgewindes \mathcal{H} in einem Zweispurensystem auf konjugierte Punktepaare einer zentralen Korrelation in einer Ebene Π abgebildet. Diese Punktepaare nun bestimmen, als Bildpunkte in einem allgemeinen Zweibildersystem aufgefaßt, Raumpunkte aus K_3 . Die Verbindungsgerade der Zentren der zentralen Korrelation ist einerseits Bild der Schnittgeraden u der Spurebenen; andererseits entspricht ihr der Koinzidenzkegelschnitt k des allgemeinen Zweibildersystems. Sie sei als Ferngerade von Π vorausgesetzt.

Zufolge (E.1) kommt man von den Punkten aus K_3 zu Plückerbildpunkten der zugeordneten Hauptgewindestrahlen, wenn K_3 , aufgefaßt als Teilraum eines H_4 , stereographisch auf die Quadrik $M_3^2 \subset H_4$ abgebildet wird. Ist $U_0 \subset M_3^2$ das Zentrum dieser Projektion, so muß der von den Erzeugenden von M_3^2 durch U_0 gebildete Kegel den Raum K_3 im absoluten Kegelschnitt k schneiden.

Man kann die Punktepaare der zentralen Korrelation in Π unmittelbar als Bilder von Punkten einer Hyperebene $K_3 \subset H_4$ auffassen, wenn man H_4 folgendermaßen abbildet: Zentren der Projektionen seien zwei zueinander windschiefe Ferngeraden o_1, o_2 ; Bildebenen seien die sich nur in einem eigentlichen Punkt schneidenden Ebenen Π_1, Π_2 . Durch Affinitäten seien Π_1 und Π_2 auf die Ebene Π abgebildet. (Den Sonderfall dieser Abbildung, wo $\Pi_2 \perp o_1$ und $\Pi_1 \perp o_2$ enthält und o_1 und o_2 absolut konjugiert sind, behandelt z.B. ECKHART [9]).

Die Zentren der Korrelation, auf welche sich die Hyperebene K_3 abbildet, sind die Bilder der Schnittpunkte (K_3, o_1) und (K_3, o_2) . Der Kegelschnitt k ist der Schnitt der Hyperebene K_3 mit dem im Fernraum von H_4 liegenden Koinzidenzhyperboloid κ dieser Abbil-

3. Zwei Folgerungen

dung. Also ist die Fernebene die absolute Ebene von K_3 .

Zusammengesetzt mit dem Zweispurensystem in L_3 sind damit den Gewindestrahlen aus \mathcal{K} rein synthetisch Punkte der Hyperebene $K_3 \subset H_4$ und nach stereographischer Projektion Punkte auf der Quadrik M_3^2 zugeordnet. Der Geraden u entspricht dadurch der Punkt U_0 , das Zentrum der stereographischen Abbildung.

Die eine allgemeine Gerade g schneidenden Hauptgewindestrahlen lassen sich zu ∞^1 Büschel mit Trägern auf g zusammenfassen. Diesen entsprechen im Zweispurensystem ∞^1 Paare sich auf dem Bild von u schneidender, also paralleler Geraden durch die Bilder G_1, G_2 von g . Jedes solche Paar, als Bild einer Punktmannigfaltigkeit im H_4 aufgefaßt, ergibt eine halbdoppeltprojizierende, d.h. o_1 und o_2 je in einem Punkt schneidende Ebene, die eine Erzeugende des Koinzidenzhyperboloids enthält. Ferner enthält sie den H_4 -Punkt G'_0 mit den Bildern G_1 und G_2 . Man erhält also die Bilder der g schneidenden Hauptgewindestrahlen in K_3 , wenn man G'_0 mit den o_1 und o_2 schneidenden Erzeugenden des Koinzidenzhyperboloids \mathcal{K} verbindet und diese Ebenen mit K_3 schneidet ¹⁵⁾. Stereographische Projektion der Schnittgeraden aus U_0 auf M_3^2 ergibt die entsprechende Mannigfaltigkeit auf der Plückerquadrik. Da \mathcal{K} K_3 längs k schneidet, k andererseits M_3^2 angehört, erhält man eine in einer Hyperebene Γ_3 liegende Fläche G_2^2 2. Ordnung.

Gemäß (E.1') hat man zu Γ_3 den Pol bzgl. M_3^2 aufzusuchen und aus dem Pol H_0 zu H_4 bzgl. M_4^2 nach $G_0 \subset M_4^2$ zu projizieren. Der Bildpunkt G_0 von g auf der Plückerquadrik geht also folgendermaßen aus G'_0 hervor:

- 1) Zyklographische Abbildung aus \mathcal{K} nach K_3 .
- 2) Stereographische Projektion aus U_0 auf $G_2^2 \subset \Gamma_3$ auf M_3^2 .
- 3) Polarisieren von Γ_3 an M_3^2 .
- 4) Projektion des Poles aus H_0 zu $G_0 \subset M_4^2$.

Unter der Bedingung, daß das Koinzidenzhyperboloid \mathcal{K} ganz auf M_3^2 liegt, also die Fernfläche von M_3^2 ist, ist die Zusammensetzung der ersten drei Transformationen die zu (D.3) analoge Darboux'sche Transformation in H_4 . Diese läßt sich ersetzen durch eine zu (D.1) analoge Konstruktion: Dem H_4 wird ein P_5 übergeordnet und in diesem eine reguläre Quadrik gewählt, welche H_4 nach M_3^2 schneidet. (Es liegt nahe, als Quadrik die Plückerquadrik M_4^2 zu wählen).

¹⁵⁾ Diese Zuordnung kann aufgefaßt werden als zyklographische Abbildung des Punktes G'_0 aus \mathcal{K} nach K_3 .

3. Zwei Folgerungen

Nun projiziert man G'_0 aus jenem Punkt $V_0 \in M_4^2$, in welchem die Tangentialhyperebene \mathfrak{x} enthält, stereographisch auf M_4^2 und darauf aus H_0 zurück nach H_4 . Da die Rückprojektion und die unter 4) genannte Transformation einander aufheben, bleibt nur die stereographische Projektion von $G'_0 \subset H_4$ nach M_4^2 .

Die beiden Darboux'schen Abbildungen in H_4 unterscheiden sich durch die Projektion einer automorphen Kollineation von M_4^2 . Da diese das Bild einer dualistischen Transformation im Linienraum ist, ist der Unterschied unwesentlich. Allerdings werden die Punkte aus K_3 nun nicht auf Punkte der Quadrik (H_4, M_4^2) , sondern auf die Punkte der in der Hyperebene $[K_4, V_0]$ liegenden Quadrik abgebildet. Also ist schließlich V_0 das Bild von u .

Nach projektiver Verallgemeinerung erhält man folgenden Übergang von Geraden aus L_3 auf Punkte auf M_4^2 :

Satz 1: 1) Die Geraden aus L_3 werden mit Hilfe eines Zweispurensystems auf Punktepaare einer Ebene Π abgebildet.

2) Diese Punktepaare deutet man als Bilder der Punkte eines vierdimensionalen Raumes H_4 . Dabei wird H_4 aus zwei zueinander windschiefen Geraden auf zwei Bildebenen projiziert, welche weiter kollinear nach Π abgebildet werden.

In Π soll sich das Bild der Achse u des Zweispurensystems decken mit den als identisch vorausgesetzten Bildern des Verbindungsraumes der Zentren der H_4 -Abbildung.

3) Die Punkte aus H_4 werden stereographisch aus U_0 auf die reguläre Quadrik M_4^2 eines übergeordneten P_5 projiziert. Dabei liege das Koinzidenzhyperboloid \mathfrak{x} der H_4 -Abbildung auf dem in der Tangentialhyperebene U_4 in U_0 an M_4^2 liegenden Hyperkegel (M_4^2, U_4) .

Damit ist eine, falls Stetigkeit vorausgesetzt wird, auch für die Treffgeraden der Achse des Zweispurensystems eindeutige synthetische Abbildung der Geraden aus L_3 auf Punkte der Quadrik M_4^2 hergestellt, welche alle Eigenschaften der Plückerabbildung erfüllt.

Eine ähnliche Beziehung zeigt HOHENBERG [13]. Anstelle der stereographischen Projektion wird dort die fünfte Koordinate auf einfache Weise aus den Koordinaten der Spurpunkte berechnet.

4. Allgemeine Sätze

=====

Sind zwei Geradenkomplexe \mathcal{K} , \mathcal{K}' einander L-polar zugeordnet, so heißt dies, den Geraden eines Komplexes \mathcal{K} eines Raumes R_3 entsprechen Punkte eines zweiten Raumes R'_3 , den Komplexgeraden durch einen Punkt aus R_3 die Punkte einer Geraden aus dem Komplex \mathcal{K}' in R'_3 . Wie LIE [20] bewiesen hat, gibt es nur folgende Möglichkeiten:

- 1) \mathcal{K} und \mathcal{K}' sind tetraedrale Komplexe.
- 2) \mathcal{K} ist reguläre linear, \mathcal{K}' der Treffgeradenkomplex eines Kegelschnittes (e.GKT).
- 3) \mathcal{K} ist regulär linear, \mathcal{K}' der Tangentenkomplex einer regulären Fläche 2.Ordnung (ne.GKT).
- 4) \mathcal{K} und \mathcal{K}' bestehen aus den Tangenten abwickelbarer Flächen.
- 5) \mathcal{K} ist ein spezieller linearer Komplex (Strahlgebüsch), \mathcal{K}' der Tangentenkomplex einer abwickelbaren Fläche (z.B. Transformation von STAHELIN).
- 6) \mathcal{K} und \mathcal{K}' sind Strahlgebüsche (Eulersche Transformation).

Der Beweis wird mit Hilfe der Theorie der partiellen Differentialgleichungen geführt. Die folgenden synthetisch bewiesenen Sätze sind zum Teil Spezialfälle dieses Satzes.

Satz 2a: Jede algebraische Transformation \mathcal{T} , die i.allg. eineindeutig ¹⁶⁾ den Strahlen eines Strahlgewindes \mathcal{L} aus L_3 Punkte in K_3 zuordnet, während den Gewindestrahlen eines Büschels, soweit Bilder existieren, die Punkte einer Geraden in K_3 entsprechen, ist eine e.GKT. Die Bildgeraden in K_3 bilden also den Treffgeradenkomplex eines Kegelschnittes.

Beweis: Die gegebene Transformation liefere eine eineindeutige (kurz "ee.") Beziehung zwischen Geraden aus \mathcal{L} außer den Geraden einer Kongruenz \mathcal{G} und den Punkten aus K_3 außerhalb einer Mannigfaltigkeit Γ . Allen nicht ganz in \mathcal{G} liegenden Gewindestrahln, die somit nur endlich viele Strahlen aus \mathcal{G} enthalten, sind ausnahmslos ee. auf Grund der Voraussetzungen Geraden aus K_3 zugeordnet. Enthält \mathcal{G} Büschel, so höchstens ∞^1 . Also gibt es Strahlnetze aus \mathcal{L} , die kein ganz in \mathcal{G} liegendes Büschel enthalten.

\mathcal{P} sei ein solches nichtparabolisches Netz. Den Büscheln aus

¹⁶⁾ d.h. die Ausnahmen bilden je eine höchstens zweiparametrische Mannigfaltigkeit.

4. Allgemeine Sätze

\mathcal{P} sind durch \mathcal{T} ee. zwei elementefremde stetige Geradenmannigfaltigkeiten zugeordnet. Da ein Bündel mit Träger auf der ersten Netzachse mit jedem aus der zweiten Reihe bis auf endlich viele Ausnahmen einen nicht in \mathcal{Q} liegenden Gewindestrahl gemein hat, schneiden sich die jeweils zugeordneten Geraden. Dies ist nur so möglich, daß die Geradenmannigfaltigkeiten aus K_3 die zwei Erzeugendenscharen einer Fläche Φ 2. Ordnung bilden. Auf Grund der ee. Zuordnung zwischen Punkten der Netzachsen und Erzeugenden von Φ kann die durch \mathcal{T} vermittelte Beziehung zwischen den Strahlen aus \mathcal{P} und den Punkten aus Φ zu einer ee. Abbildung ergänzt werden.

Andererseits sind den Netzgeraden auf der Plückerquadrik ee. die Punkte einer Fläche Φ' 2. Ordnung zugeordnet, wobei ebenfalls den Bündeln aus \mathcal{P} Geraden von Φ' entsprechen. Φ' liegt auf der Bildquadrik $M_3^2 \subset H_4$ des Strahlengewindes \mathcal{L}_3 innerhalb eines Raumes K_3'' .

Punkte von Φ und Φ' sind durch die algebraische Transformation \mathcal{T} und die Plückerabbildung ee. aufeinander abgebildet, wobei Erzeugenden wieder Erzeugende entsprechen. Diese Beziehung muß eine Projektivität \mathcal{P} sein und kann auch auf eine Projektivität zwischen den Räumen K_3 und K_3'' erweitert werden.

Ordnet man einem zweiten Netz $\mathcal{P}_1 \subset \mathcal{L}_3$ auf die gleiche Weise $\Phi_1 \subset K_3$ und $\Phi_1' \subset M_3^2$ zu und unterwirft man Φ_1 derselben Projektivität \mathcal{P} , so ist die entstehende Fläche $\Phi_1'' \subset K_3''$ zu Φ_1' projektiv. Den Erzeugenden der gemeinsamen Regelschar der Netze \mathcal{P} und \mathcal{P}_1 entsprechen auf M_3^2 die Punkte eines Kegelschnittes $c' = (\Phi', \Phi_1')$, in K_3 die Punkte eines Kegelschnittes $c \subset (\Phi, \Phi_1)$. Die Projektivität \mathcal{P} bringt alle Punkte von Φ mit den entsprechenden auf Φ' zur Deckung, speziell die Punkte von c , die durch \mathcal{P} in einen Kegelschnitt aus (Φ', Φ_1') übergehen, mit den entsprechenden Punkten von c' .

In der Projektivität zwischen Φ_1' und Φ_1'' , die zu einer Projektivität zwischen dem Raum K_3'' von Φ_1' und dem Raum von Φ_1'' erweitert werden kann, entspricht somit die Schnittebene, die Ebene von c' , punktweise sich selbst. Folglich ist die Projektivität perspektiv; die Verbindungsgeraden entsprechender Punkte von Φ_1' und Φ_1'' gehen durch ein Zentrum U_0 . Dieses ist für alle weiteren Netze aus \mathcal{L}_3 auf Grund der jeweils gemeinsamen Elemente mit \mathcal{P}_1 konstant. Da \mathcal{T} i. allg. ee. ist, liegt U_0 auf M_3^2 . Also ist \mathcal{T} bis auf die Projektivität \mathcal{P} zwischen K_3 und K_3'' mit (E.1) identisch.

Satz 2b: Die algebraische Transformation \mathcal{T} ordne i. allg. ee.

4. Allgemeine Sätze

den Punkten aus L_3 die Minimalgeraden aus K_3 (nach 1.3 verallgemeinert) zu. Dabei sollen den Minimalgeraden durch eigentliche Punkte aus K_3 , falls Bilder existieren, die Punkte einer Geraden in L_3 entsprechen. Dann ist \mathcal{T} eine e.GKT. Die Bildgeraden der eigentlichen Punkte aus K_3 gehören einem Strahlgewinde an.

Beweis: Setzt man \mathcal{T} zwischen L_3 und K_3 mit einer e.GKT zwischen K_3 und L_3' zusammen, so erhält man zwischen L_3' und L_3 eine algebraische Transformation \mathcal{T}' mit der Eigenschaft: Punkten aus L_3' außerhalb einer höchstens zweiparametrischen Mannigfaltigkeit Γ' entsprechen i.allg. ee. Punkte aus L_3 außer Γ . Den Punkten von Geraden eines Strahlgewindes \mathcal{L}' aus L_3' entsprechen, falls Bilder existieren, wieder Punkte von Geraden. Diese Geraden gehören einem algebraischen Komplex \mathcal{L} aus L_3 an.

\mathcal{L} kann nicht aus den Treffgeraden einer Raumkurve c bestehen. Das Bild eines nichtparabolischen Strahlnetzes aus \mathcal{L}' wäre eine Strahlkongruenz mit zwei Brennlinien, welche wegen der allgemeinen Eineindeutigkeit von der Kurve c verschieden sein müßten. Dies ließe jedoch nur eine einparametrische Mannigfaltigkeit als Bild zu.

Den Gewindestrahlbüscheln durch zwei Punkte P' und Q' eines Gewindestrahles $h' \subset L_3'$ entsprechen in L_3 die beiden Komplexkegel durch zwei Punkte P und Q eines Komplexstrahls h . Angenommen, \mathcal{L} ist nicht linear: Da die Komplexkegel i.allg. einander längs h nicht berühren können, haben sie Punkte einer Kurve c außerhalb h gemein. Diese Punkte haben kein Urbild in L_3' , müssen daher der singulären Mannigfaltigkeit Γ angehören. c ist also Teil des Schnittes des Komplexkegels durch P mit Γ . Da Q' auf ∞^2 Arten wählbar ist, müssen ∞^2 Komplexkegel den Komplexkegel durch P auf Γ schneiden. Da schließlich jeder Punkt aus L_3' mit einer der Lagen von Q' auf einem Komplexstrahl liegt, schneiden alle Komplexgeraden die Kurve c , was mit der obigen Bemerkung im Widerspruch steht.

\mathcal{L} ist also ebenfalls ein Strahlgewinde. Die Transformation \mathcal{T}' ordnet den Ebenen aus L_3' Ebenen aus L_3 zu, ist daher eine Projektivität, \mathcal{T} somit eine e.GKT.

Die Sätze 2a und 2b zusammengefaßt ergeben

Satz 2: Eine i.allg. eineindeutige L-polare Beziehung zwischen zwei Linienkomplexen ist eine e.GKT, wenn einer davon ein Strahlgewinde oder der Treffgeradenkomplex eines Kegelschnittes ist.

4. Allgemeine Sätze

Dieser Satz zeigt, daß die in 1.2 genannten Eigenschaften einer e.GKT voneinander bereits abhängig sind.

Bemerkung 4.4: Auf die Bedingung im Satz 2, daß eine L-polare Beziehung zwischen den Geradenkomplexen zugrunde liegt, kann nicht verzichtet werden. Man kann nämlich i.allg. ee. algebraische Abbildungen der Geraden eines Strahlengewindes oder Treffgeraden eines Kegelschnittes auf Punkte angeben, ohne daß den Komplexgeraden durch einen Punkt die Punkte einer Geraden entsprechen:

Beispiel 1: Folgende Zuordnung zwischen einem Punkt P und einem inzidenten Strahl p_1 aus einem Strahlgewinde \mathcal{L}_1 wäre möglich (siehe Abb.2): Man projiziert P aus einem Punkt Z auf eine feste Ebene Π . Dadurch erhält man den Riß P'. In Π sei ein Kegelschnitt k vorgegeben. Die Polare zu P' bzgl. k sei p' . Dann ordnet man dem Punkt P jenen Gewindestrahl p_1 durch P zu, welcher p' schneidet.

Diese Transformation ist i.allg. eineindeutig: Liegt nämlich umgekehrt ein Gewindestrahl p_1 vor, so liegt der Riß P' des zugeordneten Raumpunktes P auf dem Riß p'_1 von p_1 und der Polaren zum Spurpunkt S von p_1 . P auf p_1 ist damit umgekehrt festgelegt.

Beispiel 2: Die Minimalgeraden seien als C-Geraden vorausgesetzt. Nun kann man einem Punkt P (siehe Abb.3) jene inzidente C-Gerade p_1 zuordnen, deren Normalriß nach Π mit einer vorgegebenen Richtung in Π einen orientierten Winkel α einschließt, welcher der Höhe z des Raumpunktes über Π ee. zugeordnet ist - etwa durch die Formel $\operatorname{tg}^{\alpha/2} = z/k$ bei konstantem k.

Umgekehrt ist mit einer gegebenen C-Geraden der Winkel und damit die Höhe des entsprechenden Raumpunktes bestimmt. Die Transformation ist also i.allg. ee.

Beide Beispiele können keine L-polare Beziehung zwischen zwei Geradenkomplexen ergeben, da den Komplexgeraden je inzidente Punkte zugeordnet sind: Die den Komplexgeraden durch einen Punkt P zugeordneten Punkte, darunter P, liegen also auf dem Komplexkegel oder in der Komplexebene zu P. Wären sie Punkte einer Geraden, so müßte diese entweder Erzeugende des Komplexkegels oder Gerade durch P in der Komplexebene sein. Damit gehört sie ebenfalls dem Komplex an. Dies steht im Widerspruch zur allgemeinen Eineindeutigkeit der beiden Transformationen, da dann ∞^1 Geraden des Komplexkegels den Punkt P als zugeordneten Punkt hätten.

Die folgenden Sätze 3a und 3b zeigen, daß die Bedingungen 2.1, die eine ne.GKT charakterisieren, ebenfalls voneinander abhän-

4. Allgemeine Sätze

gig. sind:

Satz 3a: Jede algebraische Transformation \mathcal{T} , die i.allg. zweieindeutig den Strahlen eines Strahlengewindes \mathcal{L}_3 aus L_3 Punkte in K_3 zuordnet, während den Paaren von Gewindestrahلبüscheln, sofern Bilder existieren, die Punkte einer Geraden in K_3 entsprechen, ist eine ne. GKT. Die Bildgeraden in K_3 sind also Tangenten einer regulären Fläche 2.Ordnung. Die zwei Gewindestrahlen, die demselben Punkt aus K_3 zugeordnet sind, entsprechen einander in einer windschiefen Involution \mathcal{J} mit bzgl. \mathcal{L}_3 reziproken Achsen p, q .

Beweis: Die Gewindestrahlen, die demselben Punkt aus K_3 zugeordnet sind, entsprechen einander in einer involutorischen Projektivität \mathcal{P} . Dafür gibt es zwei Möglichkeiten:

1) \mathcal{P} sei eine windschiefe Involution mit zwei Gewindestrahlen a_1, a_2 als Achsen: In diesem Fall sind im Gewinde \mathcal{L}_3 ∞^2 Strahlnetze enthalten, deren beide Brennlinien die Achsen a_1 und a_2 schneiden, daher durch die Transformation \mathcal{P} je in sich übergehen. Zu Punktepaaren dieser Brennlinien (als Büschelträger) existieren i.allg. eineindeutig Bildgeraden. Diese bilden zwei Regelflächen. Da nun durch zwei Punktepaare auf verschiedenen Brennlinien zwei Paare von Kongruenzgeraden gehen, muß eine Erzeugende der ersten Regelfläche jede Erzeugende der zweiten zweimal schneiden. Das ergibt einen Widerspruch.

2) \mathcal{P} sei eine windschiefe Involution \mathcal{J} mit zwei bzgl. \mathcal{L}_3 reziproken Geraden p, q als Achsen: In diesem Fall hat jedes Strahlnetz aus \mathcal{L}_3 mit dem involutorisch gelegenen ∞^1 Treffgeraden von p und q , also Doppelgeraden der Involution \mathcal{J} gemein. Also entsprechen den Geraden eines allgemeinen Strahlnetzes i.allg. ee. Punkte aus K_3 , den Punkten der Brennlinien ee. Geraden aus K_3 . Analog zum Beweis von Satz 2a findet man, daß \mathcal{T} bis auf eine Projektivität in K_3 mit der ne.GKT (N.1) identisch ist.

Satz 3b: Die algebraische Transformation \mathcal{T} ordne i.allg. zweieindeutig Punkten aus L_3 die Tangenten der regulären Fläche Ω 2.Ordnung in K_3 zu. Dabei sollen den Tangenten durch Punkte aus K_3 , falls Urbilder existieren, Punktepaare zweier Geraden in L_3 entsprechen. Dann ist \mathcal{T} eine ne.GKT. In L_3 erfüllen die Bildgeradenpaare der Punkte aus K_3 ein Strahlgewinde \mathcal{L}_3 . Dabei entsprechen Punktepaare der windschiefen Involution \mathcal{J} denselben Tangenten in K_3 .

Beweis: Die ee. bestimmten Bildpunktepaare der Tangenten aus

4. Allgemeine Sätze

K_3 mögen bis auf eine zweiparametrische Mannigfaltigkeit Γ den Geradenraum L_3 erfüllen; die Bildgeradenpaare der Punkte aus K_3 bilden bis auf höchstens ∞^1 Ausnahmen einen algebraischen Komplex \mathcal{K} .

Die eine allgemeine Tangente t schneidenden Tangenten von Ω bilden sich bis auf i.allg. ∞^1 Ausnahmen auf die Punktepaare der Komplexgeradenpaare durch ein Punktepaar T, \bar{T} , also i.allg. auf die Punkte zweier verschiedener Komplexkegel außerhalb Γ ab. Angenommen, die Komplexkegel seien nichtlinear:

Durch einen allgemeinen Punkt aus K_3 gehen zwei t schneidende Tangenten. Daher hat ein allgemeines Komplexgeradenpaar mit dem Kegelpaar zwei Punktepaare außerhalb Γ gemein. Dies ist nur so möglich, daß jede Komplexgerade jeden dieser Komplexkegel in einem Punkt außerhalb Γ schneidet. Eine gleichzeitige Berührung beider Kegel ist für ∞^3 Geraden nicht möglich. Also müssen auf Grund der Annahme die restlichen Schnittpunkte auf der Schnittkurve der Komplexkegel mit Γ liegen. Dies führt wie im Beweis zu Satz 2b auf einen Widerspruch.

Somit sind die Komplexkegel Ebenen; \mathcal{K} ist ein Strahlgewinde, \mathcal{T} daher eine ne.GKT.

Zusammengefaßt ergeben Satz 3a und 3b:

Satz 3: Ein i.allg. zweieindeutiges L-polares Entsprechen zwischen zwei Linienkomplexen ist eine ne.GKT, wenn dadurch ein Strahlgewinde zweieindeutig o d e r der Tangentenkomplex einer regulären Fläche 2.Ordnung einzweideutig abgebildet wird.

Da die ne.GKT eine ausnahmslos zweieindeutige polare Beziehung zwischen dem Strahlgewinde \mathcal{L} und dem Tangentenkomplex der absoluten Fläche Ω ergibt, kann im Gegensatz zur e.GKT unter Voraussetzung der Eineindeutigkeit auf die Forderung, daß die Beziehung zwischen den Komplexen L-polar ist, verzichtet werden:

Satz 4: Jede algebraische Transformation \mathcal{T} , die im Reellen und Komplexen eine ausnahmslos zweieindeutige Beziehung a) zwischen Geraden eines Gewindes und Punkten eines Raumes o d e r b) zwischen Punkten eines Raumes und Tangenten einer regulären Fläche 2.Ordnung herstellt, ist eine ne.GKT.

Beweis: Ad a) Die zwei Geraden des Gewindes \mathcal{L} , die durch \mathcal{T} demselben Punkt aus K_3 zugeordnet sind, müssen einander in einer involutorischen Projektivität entsprechen. Dafür kommen nur wind-

4. Allgemeine Sätze

schiefe Involutionen in Frage, deren Achsen entweder in \mathcal{L}_2 enthalten oder bzgl. \mathcal{L}_2 reziprok sind.

Bei a_1 und a_2 aus \mathcal{L}_2 als Achsen der Involution wäre eine ee. Abbildung auf Punkte aus K_3 aus folgendem Grund nicht möglich: Durch eine weitere windschiefe Involution \mathcal{J} , deren bzgl. \mathcal{L}_2 reziproke Achsen j_1, j_2 die Gewindestrahlen a_1 und a_2 schneiden, gingen bzgl. a_1 und a_2 involutorische Geraden wieder in solche über. Fest blieben bei dieser Transformation 1) die ∞^2 ¹⁷⁾ j_1 und j_2 schneidenden Gewindestrahlpaare, 2) die ∞^1 Gewindestrahlpaare, die e_1 und e_2 schneiden. (Dabei seien e_1, e_2 die restlichen zwei Seiten des durch a_1, a_2, j_1, j_2 bestimmten Vierecks). Innerhalb dieser Paare vertauschen sich die Gewindestrahlen.

Der Transformation \mathcal{J} wäre durch \mathcal{T} eine ausnahmslos ee. Punkttransformation in K_3 , also eine lineare Transformation zugeordnet. Diese hätte eine einparametrische und eine zweiparametrische Mannigfaltigkeit von Fixelementen, wäre also die identische Transformation.

Somit ist nur der Fall möglich, daß Gewindestrahlpaare der windschiefen Involution \mathcal{J} mit bzgl. \mathcal{L}_2 reziproken Achsen durch \mathcal{T} den Punkten aus K_3 ee. zugeordnet sind. Ordnet man andererseits den Gewindestrahlpaaren durch eine ne.GKT Punkte aus K_3 zu, so erhält man eine ausnahmslos ee. Punkttransformation in K_3 , also eine Projektivität. Somit unterscheidet sich \mathcal{T} von einer ne.GKT nur durch eine Projektivität in K_3 .

Ad b) Die algebraische Transformation \mathcal{T} ordnet den eine Tangente t_1 schneidenden Tangenten Punktepaare einer algebraischen Fläche Φ_1 in L_3 zu ¹⁸⁾. Φ_1 gehört einer dreiparametrischen Flächenmannigfaltigkeit an. Die Schnittkurve zweier dieser Flächen ist Bild der zwei Tangentenscharen, die zwei Tangenten schneiden, besteht daher aus mindestens zwei Teilen. Drei Flächen haben i.allg. 8 Punkte (4 Punktepaare) gemein. Diese sind Bilder der 4 Tangenten, die drei gegebene Tangenten schneiden.

Nun wären drei Möglichkeiten denkbar: Die Flächen Φ sind

- 1) Ebenenpaare,
- 2) nichtzerfallende Flächen 2.Ordnung,
- 3) Flächen höherer Ordnung; die 8 Schnittpunkte sind mehrfach zu zählen.

¹⁷⁾ Zählung komplexer Parameter.

¹⁸⁾ Φ_1 kann auch aus zwei Teilflächen bestehen.

4. Allgemeine Sätze

Ad 3) Damit drei Flächen Φ_1, Φ_2, Φ_3 acht mehrfach zu zählende und von Fall zu Fall verschiedene Punkte gemein haben; muß die Schnittkurve zweier Flächen Φ_1, Φ_2 die dritte mindestens von 1. Ordnung berühren. Auf Φ_1 gibt es ∞^2 solcher Schnittkurven. Folgende Fälle sind möglich: I) Alle ∞^2 Kurven berühren die Schnittkurve mit Φ_3 : Da Φ_3 beliebig ist, berührt jede Kurve jede. Dies kann für ∞^2 Kurven ohne gemeinsamen Bestandteil nicht eintreten. II) Φ_1 berührt Φ_3 längs einer Kurve; da Φ_1 und Φ_3 beliebig gewählt waren, berührt jede Fläche jede andere längs einer Kurve. Wiederum ist dies für ∞^3 algebraische Flächen ohne gemeinsamen Bestandteil nicht möglich.

Ad 2) Der Schnitt zweier Flächen 2. Ordnung muß in zwei Kurven zerfallen. Also berühren sich je zwei Flächen in zwei Punkten, was wieder unmöglich ist.

Bleibt also nur der Fall, daß die Flächen Φ Ebenenpaare, die Schnittkurven Geraden sind. Also ist die Transformation \mathcal{T} eine ne.GKT.

5. Die Transformation (N.6)

=====

Während bei einer e.GKT die Bildgeraden der orientierten Ebenen aus K_3 nach 1.1 einen linearen singulären Komplex, den Nebenkomplex \mathcal{K}_e erfüllen - dieser besteht aus den Treffgeraden der Geraden u -, ist der Nebenkomplex \mathcal{K}_n einer ne.GKT nach 2.2 regulär. Im Euklidischen kann eine Ebene durch Auszeichnung eines der inzidenten Büschel von Minimalgeraden orientiert werden; im Nichteuklidischen ist nur eine Tangentenschar enthalten, die Ebene also nur orientierbar, wenn die Tangenten selbst orientiert werden. In beiden Transformationen ist somit die Abbildung der nichtorientierten Ebenen auf Geraden von \mathcal{K}_e bzw. \mathcal{K}_n einzweideutig. Die Bildgeraden einer Ebene sind in beiden Fällen bzgl. \mathcal{L}_y reziprok. Wegen der speziellen Lage von \mathcal{L}_y und \mathcal{K}_n sind im ne. Fall die Bildgeraden zugleich ein Geradenpaar der windschiefen Involution \mathcal{J} mit den Achsen p und q (vergleiche 2.3).

\mathcal{K}_e enthält im Gegensatz zum ne.Fall als spezieller Komplex Bündel mit Träger A_L auf u . Das dazu bzgl. \mathcal{L}_y reziproke Geradenfeld durch u hat ein Büschel von Strahlen aus \mathcal{L}_y mit dem Bündel gemein. Dem Bündel A_L gemeinsam mit dem reziproken Geradenfeld entsprechen die Ebenen durch einen Punkt A_K des absoluten Kegelschnittes. Die Beziehung zwischen dem Bündel A_L allein und dem Bündel A_K ist eineindeutig, daher eine Korrelation. Durch Zusammensetzung zweier solcher Korrelationen kommt man auf die LIEBMANNsche Transformation (E.3) und dual auf die Konstruktion (E.4) von MÜLLER.

Zwei Verallgemeinerungen der LIEBMANNschen- bzw. MÜLLER-Abbildung für den nichteuklidischen, aber auch für den euklidischen Fall sind denkbar:

a) Man untersucht die Teilabbildung eines allgemeinen Ebenenbündels oder Punktfeldes aus K_3 auf die Geradenmannigfaltigkeit aus L_3 ; durch Zusammensetzung zweier solcher Teilabbildungen erhält man eine GKT.

b) Man bildet Ebenenbündel oder Punktfelder aus L_3 auf Mannigfaltigkeiten in K_3 ab und setzt zwei solche Abbildungen zusammen.

Die im Folgenden abzuleitende ne.GKT ist ein Beispiel zu a). Zwei Ebenenbündeln aus K_3 werden die entsprechenden Bilder in L_3 zugeordnet. Dabei werden aus den Eigenschaften 2.2 einer ne.GKT

5. Die Transformation (N.6)

notwendige Bedingungen abgeleitet, die sich dann als hinreichend erweisen werden:

Einem Ebenenbündel mit Träger A aus K_3 entspricht in L_3 ein im Nebenkomplex \mathcal{K}_n enthaltenes Strahlnetz \mathcal{U} mit den Achsen a und \bar{a} , den Bildgeraden des Punktes A ¹⁹⁾. a und \bar{a} sind bzgl. p und q involutorisch, ebenso die beiden Bildgeraden x, \bar{x} einer Ebene ξ des Bündels. Die Punkte von a und \bar{a} sind durch \mathcal{U} projektiv aufeinander bezogen. Die Verbindungsgeraden entsprechender Punkte bilden eine Erzeugendenschar einer Fläche Φ_a 2. Ordnung durch a, \bar{a}, p, q . x und \bar{x} sind die restlichen zwei Seiten eines aus zwei entsprechenden Punktepaaren auf a und \bar{a} gebildeten windschiefen Vierecks (siehe Abb. 4). Daher sind x, \bar{x} zwei bzgl. Φ_a polare Treffgeraden von a und \bar{a} .

Eine eineindeutige Abbildung des Paares x, \bar{x} auf eine Gerade x^a einer Ebene wird durch die ECKHARTSche bzw. REHBOCKSche Abbildung durch [8], [24] vermittelt: Man wählt eine Φ_a nicht berührende Ebene Π_a . In ihr verbindet man die auf dem Spurkegelschnitt k_a von Φ_a liegenden Spurpunkte der x, \bar{x} sowie a schneidenden Erzeugenden g_1 und g_2 von Φ_a zu x_a . Diese Abbildung ist ausnahmslos eineindeutig zwischen Geraden von Π_a und Treffgeradenpaaren von a und \bar{a} . Speziell sind die Tangenten an k_a Bilder einer Erzeugendenschar von Φ_a .

Verbindet man nun die Gerade $x^a \subset \Pi_a$ mit einem nicht in Π_a liegenden Punkt A zu einer Ebene, so erhält man eine ee. Abbildung der Geradenpaare des Strahlnetzes \mathcal{U} auf die Ebenen des Bündels A ²⁰⁾.

Analog kann ein Ebenenbündel B auf ein Strahlnetz \mathcal{L} mit den Achsen b und \bar{b} abgebildet werden vermöge einer zweiten Fläche Φ_b und einer zweiten Bildebene Π_b . Da beide Strahlnetze demselben Gewinde \mathcal{K}_n angehören, müssen deren Achsen a, \bar{a}, b, \bar{b} in hyperboloidischer Lage sein. Zusätzlich müssen beide Teilabbildungen den gemeinsamen Ebenen der zwei Bündel dieselben Bildgeradenpaare zuordnen.

5.1 Ist dies der Fall, so erhält man als Zusammensetzung dieser zwei Abbildungen eine ne.GKT. Es entsprechen nämlich dann, wie in 5.4 gezeigt wird, den Punkten aus K_3 die Geraden eines Strahlengewindes aus L_3 , so daß die Bedingungen des Satzes 3 er-

¹⁹⁾ Liegt A auf der absoluten Fläche, so ist das zugeordnete Netz parabolisch. Dieser Fall wird ausgeschlossen.

²⁰⁾ K_3 und L_3 werden hier und bei allen weiteren Transformationen trotz der verschiedenen Bezeichnung als identisch angenommen.

5. Die Transformation (N.6)

füllt sind.

Genauer verfolgt wird eine solche Zusammensetzung im Fall $\Pi_a = \Pi_b = \Pi$. Wie muß diese Ebene Π gelegt werden, damit den gemeinsamen Ebenen der Bündel A und B aus K_3 die gemeinsamen Geradenpaare der Strahlnetze \mathcal{A} und \mathcal{B} in L_3 entsprechen?

Zunächst sei vorausgesetzt, daß a nicht b oder \bar{b} schneidet. Dann ist der Ort der gemeinsamen Geradenpaare der zwei Netze eine Fläche Φ_{ab} 2. Ordnung. Da beide Netze durch \mathcal{V} festbleiben, bleibt auch Φ_{ab} fest. Entweder liegen p und q auf Φ_{ab} oder p und q sind polar bzgl. Φ_{ab} . Ersteres ist nicht möglich, da dann Φ_a und Φ_b und damit auch a und \bar{a} mit b und \bar{b} identisch wären. Also bleibt die zweite Möglichkeit. e_1 und e_2 seien die zwei gemeinsamen Netzgeraden, die p und q schneiden, daher zugleich Φ_a und Φ_b angehören.

5.2 Da p und q polar bzgl. Φ_{ab} sind, müssen die restlichen zwei Seiten f_1 und f_2 des von e_1, e_2, p, q gebildeten Vierecks auf Φ_{ab} liegen.

Den Erzeugenden e_1, e_2 entsprechen in Π die Tangenten an die Spurkegelschnitte k_a und k_b in den Spurpunkten E_1, E_2 . Nur dann können den Erzeugenden e_1 und e_2 identische Ebenen durch A und B entsprechen, wenn k_a und k_b in E_1 und E_2 einander berühren. Ferner muß der Schnittpunkt der gemeinsamen Tangenten zugleich der Spurpunkt der Geraden $[A, B]$ in K_3 sein.

Die Schnittpunkte der Spurkegelschnitte k_a und k_b sind die Spurpunkte der gemeinsamen Geraden von Φ_a und Φ_b , also von p, q, sowie e_1, e_2 . Diese fallen nur dann paarweise zusammen, wenn Π durch die Schnittpunkte (e_1, p) und (e_2, q) oder (e_1, q) und (e_2, p) geht, da Π Φ_a und Φ_b nicht berühren darf. Das bedeutet, daß Π f_1 oder f_2 enthalten muß. Da f_1 und f_2 bzgl. Φ_a und Φ_b polar sind, ist dann der Schnittpunkt der zwei gemeinsamen Tangenten von k_a und k_b der Spurpunkt F_2 von f_2 oder F_1 von f_1 .

(N.6): Voraussetzungen: a) Φ_a, Φ_b aus L_3 seien zwei reguläre Flächen 2. Ordnung mit vier gemeinsamen Erzeugenden p, q; e_1, e_2 . Die restlichen zwei Seiten des davon gebildeten Vierecks seien f_1 und f_2 . Eine dritte reguläre Fläche Φ_{ab} enthalte f_1, f_2 ; e_1, e_2 . Diese hat mit Φ_a außer e_1, e_2 die Erzeugenden a, \bar{a} , mit Φ_b b und \bar{b} gemein.
b) Π sei eine Ebene durch f_1, F_2 in Π sei der Spurpunkt von f_2 .

5. Die Transformation (N.6)

c) A und B seien zwei Punkte aus K_3 außerhalb Π . $[A, B]$ schneide Π in F_2 .

1) Man bildet die Treffgeraden aus einem Punkt R aus L_3 an a, \bar{a} durch Φ_a , an b, \bar{b} durch Φ_b vermöge der ECKHART-REHBOCKSchen Abbildung auf Geraden r^a, r^b in Π ab.

2) r^a wird mit A zur Ebene φ^a , r^b mit B zur Ebene φ^b verbunden.

Ordnet man dem Punkt R aus L_3 die Gerade $r = (\varphi^a, \varphi^b) \subset K_3$ zu, so erhält man eine ne.GKT.

Bemerkung 5.5: Da nach Voraussetzung p, q bzgl. Φ_{ab} polar sind, müssen die Schnittgeraden a, \bar{a} der Flächen Φ_a, Φ_{ab} und analog b, \bar{b} einander in der windschiefen Involution \mathfrak{J} mit den Achsen p und q entsprechen. Ferner gehören a, \bar{a} , b, \bar{b} einem Strahlgewinde \mathfrak{L} mit p und q als reziproken Geraden an.

Beweis zu (N.6): (I) Zunächst wird gezeigt, daß auf Grund der Voraussetzung b) jeder a, \bar{a} , b, \bar{b} schneidenden Geraden in beiden Teilabbildungen dieselbe Ebene durch $[A, B]$ entspricht:

Sei y eine solche Gerade. Um diese nach 1) abzubilden, legt man durch die Schnittpunkte mit a und \bar{a} die Erzeugenden von Φ_a , durch die Schnittpunkte mit b, \bar{b} die Erzeugenden von Φ_b (siehe Abb.5) und verbindet deren Spurpunkte in Π . Jede dieser vier Erzeugenden schneidet p und q. Also liegen die Spurpunkte auf der durch y, p und q bestimmten Fläche Φ_y 2.Ordnung. Da y auf Φ_{ab} liegt, also die Geraden f_1 und f_2 schneidet, diese andererseits ebenfalls Treffgeraden von p und q sind, liegen auch f_1, f_2 auf Φ_y .

5.3 Die Spur von Φ_y in Π muß in die Gerade f_1 und eine weitere Gerade durch F_2 zerfallen. Also fallen die zwei Bildgeraden von y in eine Gerade durch F_2 , die zwei nach 2) zugeordneten Ebenen in K_3 in eine Ebene durch $[A, B]$ zusammen.

(II) Die aufgezeigte Abbildung ordnet einem Punkt R aus L_3 eine Gerade r aus K_3 zu. Was ist das Urbild der Geraden r durch einen Punkt S aus K_3 ? Welcher Punktort aus L_3 bildet sich auf zwei Strahlbüschel in Π ab, deren Träger auf einer Geraden durch F_2 liegen?

Ein Strahlbüschel S^a in Π als erstes Bild bezieht die Erzeugenden von Φ_a involutorisch aufeinander. Dadurch werden a und \bar{a} projektiv einander zugeordnet. Das Urbild besteht daher aus einer durch \mathfrak{J} in sich übergehenden Fläche α_S 2.Ordnung. Ebenso erhält

5. Die Transformation (N.6)

man aus S^b als zweitem Bild eine Fläche β_S . α_S und β_S haben die dem gemeinsamen Strahl $[s^a, s^b]$ durch F_2 nach 5.3 entsprechenden zwei Geraden von Φ_{ab} gemein. Also zerfällt der Schnitt in zwei weitere zu a, \bar{a} bzw. b, \bar{b} windschiefe Geraden s, \bar{s} als Urbild des Punktes S aus K_3 . α_S und β_S bleiben durch \mathcal{J} fest; also entsprechen s und \bar{s} einander in \mathcal{J} .

Umgekehrt bildet sich eine Gerade s auf ein Punktepaar in Π ab, wenn die von den Treffgeraden an a, \bar{a} bzw. b, \bar{b} gebildeten Regelscharen α_S bzw. β_S durch \mathcal{J} in sich übergehen. Daraus folgt nämlich, daß die zugehörige Projektivität unter den Erzeugenden von Φ_a bzw. Φ_b eine Involution sein muß.

Welche Geraden dieser Eigenschaft gehen durch einen allgemeinen Punkt R in L_3 ? Alle durch solche Geraden bestimmten Flächen α_S enthalten die Treffgerade t aus R an a, \bar{a} , somit aber auch die zu t bzgl. \mathcal{J} involutorische Gerade \bar{t} (siehe Abb.6). Die Flächen α_S bilden also ein Büschel; die zweiten Erzeugenden durch R bilden ein Strahlbüschel in der Ebene $[R, \bar{t}]$. Die gesuchten Geraden gehören daher einem linearen Strahlkomplex \mathcal{L}_3' an. Wandert R auf t , so dreht sich das inzidente Büschel um \bar{t} . Also ist \mathcal{L}_3' ein Strahlgewinde mit t, \bar{t} als reziproken Geraden. Damit gehören a, \bar{a} dem Gewinde \mathcal{L}_3' an. t und \bar{t} sind dann identisch, wenn t auf Φ_a liegt; also gehören alle a, \bar{a} schneidenden Erzeugenden von Φ_a ebenfalls \mathcal{L}_3' an. Daher sind wiederum p und q reziprok bzgl. \mathcal{L}_3' . \mathcal{L}_3' ist somit mit dem Strahlgewinde \mathcal{L}_3 aus Bemerkung 5.5 identisch. Die Geraden von \mathcal{L}_3 haben deshalb zugleich in der zweiten Abbildung durch b, \bar{b} die Eigenschaft, sich auf Strahlbüschel in Π abzubilden.

5.4 In der Abbildung (N.6) sind die Punkte aus K_3 Bilder von Geradenpaaren aus dem Strahlgewinde \mathcal{L}_3 , dem Hauptgewinde.

Nach Satz 3 ist (N.6) eine ne.GKT. Die Eigenschaften dieser Transformation, insbesondere die Lage der absoluten Fläche in K_3 , werden im § 6 ausführlich gezeigt.

Bemerkung 5.6: In Fußnote ¹⁹⁾ ist der Fall ausgeschlossen worden, daß der Träger A des Ebenenbündels in K_3 auf der absoluten Fläche Ω liegt. Als zweieindeutige Abbildung der Geraden eines parabolischen Netzes auf Geraden einer Ebene ist die ECKHART-REHBOCKsche Abbildung nicht verwendbar. Hier könnte zusätzlich eine zweieindeutige Abbildung wie in (N.2)2) verwendet werden.

In (N.6) ist die Abbildung des Kugelraumes auf Π ein Zweibildersystem mit identischen Bildebenen. Wählt man Π allgemein, so

5. Die Transformation (N.6)

führt dies auf folgende Verallgemeinerung:

(N.6') Voraussetzungen: a) siehe (N.6).

b) Π sei eine Φ_a und Φ_b nicht berührende allgemeine Ebene. k_a und k_b in Π seien die Spurkurven von Φ_a und Φ_b ; E_1 bzw. E_2 seien die auf k_a und k_b liegenden Spurpunkte von e_1 bzw. e_2 ; O_a bzw. O_b seien die Pole zu $[E_1, E_2]$ bzgl. k_a bzw. k_b .

c) Π sei ferner Bildebene eines allgemeinen Zweibildersystems in K_3 mit O_a und O_b als Träger der perspektiven Kernstrahlbüschel, $[E_1, E_2]$ als deren Perspektivitätsachse.

1) Man bildet die Treffgeraden aus einem Punkt R aus L_3 an a und \bar{a} durch Φ_a , an b und \bar{b} durch Φ_b vermöge der ECKHART-REHBOCKschen Abbildung auf die Geraden r^a und r^b in Π ab.

2) r^a und r^b werden als Bilder einer Geraden r aus K_3 im allgemeinen Zweibildersystem c) aufgefaßt.

Ordnet man R aus L_3 und r aus K_3 einander zu, so erhält man eine ne.GKT.

Beweis: Zu zeigen ist, daß einer beliebigen Treffgeraden von a, \bar{a}, b, \bar{b} in den beiden Teilabbildungen nicht verschiedene Ebenen in K_3 zugeordnet sind. Nach 5.4 entsprechen dann die Geraden des Hauptgewindes wieder den Punkten aus K_3 , so daß Satz 3 gilt.

Alle Bildgeraden der Treffgeraden von a, \bar{a}, b, \bar{b} , also einer Erzeugendenschar von Φ_{ab} , sind als Bild einer allgemeinen Erzeugenden der zweiten Schar von Φ_{ab} aufzufassen. Diese ist im Hauptgewinde enthalten. Daher sind ihre Bilder zwei zueinander projektive Strahlbüschel O_a und O_b . Besondere einander entsprechende Geraden dieser Büschel sind als Bilder von e_1 und e_2 die Tangenten an k_a und k_b in den Spurpunkten E_1 und E_2 ; O_a und O_b erfüllen also die Voraussetzung b).

y sei eine allgemeine Treffgerade von a, \bar{a}, b, \bar{b} . Die vier weiteren Erzeugenden von Φ_a und Φ_b , die y schneiden, liegen auf einer Fläche Φ_y zweiter Ordnung. Φ_y enthält p und q , sowie nach 5.3 f_1 und f_2 . Der Spurkegelschnitt von Φ_y in Π ist daher ein Kegelschnitt η durch die zugehörigen Spurpunkte P, Q, F_1 und F_2 . Die Verbindungsgerade der restlichen zwei Schnittpunkte von η mit k_a ist das erste Bild y^a von y ²¹⁾. Analog erhält man y^b (siehe Abb.7).

²¹⁾ Die Geraden y^a bilden auch deshalb ein Büschel, weil die Kegelschnitte η einem Büschel angehören, daher auf k_a die Punktepaare einer Involution ausschneiden.

5. Die Transformation (N.6)

Nun sei y jene Gerade, deren zugehöriger Spurkegelschnitt η in das Geradenpaar $[P, Q]$, $[F_1, F_2]$ zerfällt. Die y , sowie a , \bar{a} bzw. b , \bar{b} schneidenden Erzeugenden von Φ_a bzw. Φ_b schneiden auch p und q , haben daher ihre Spurpunkte auf $[F_1, F_2]$. Also müssen die beiden Bildgeraden, ein entsprechendes Geradenpaar der Büschel O^a und O^b , in dieselbe Gerade $[F_1, F_2] = [O_a, O_b]$ zusammenfallen. Die Büschel O_a und O_b sind tatsächlich perspektiv mit $[E_1, E_2]$ als Perspektivitätsachse, sind daher mit den Kernstrahlbüscheln des allgemeinen Zweibildersystems c) identisch.

5.5 Wenn a und b einander schneiden, so zerfallen die Erzeugendenscharen von Φ_{ab} in je zwei Geradenbüschel mit den Trägern Z und \bar{Z} in ε und $\bar{\varepsilon}$ (siehe Abbildung 8). Daß in diesem Fall die gemeinsamen Treffgeraden von a , \bar{a} , b , \bar{b} in der zu (N.6') analogen Abbildung auf gleiche Ebenen abgebildet werden, ist nur durch ein allgemeinstes Zweibildersystem in K_3 , also bei projektiven Kernstrahlbüscheln möglich.

Beweis: s sei die Schnittgerade $(\varepsilon, \bar{\varepsilon}) = [Z, \bar{Z}]$. Wählt man eine Φ_a und Φ_b nicht berührende Ebene Π , so müssen in dieser die Spurkegelschnitte k_a und k_b von Φ_a und Φ_b einander im Spurpunkt S von s berühren. Die restlichen Schnittpunkte sind die Spurpunkte P und Q von p bzw. q . Die Erzeugenden von Φ_{ab} bilden sich auf Geradenpaare durch S ab. Π kann jedoch nicht so gewählt werden, daß jeder Treffgeraden von a , \bar{a} , b , \bar{b} zwei gleiche Geraden durch S entsprechen. Es kann nämlich gezeigt werden, daß die Gerade $[P, S]$ in Π nicht zugleich erstes und zweites Bild derselben Geraden von Φ_{ab} sein kann:

Entsprechend der Linienraumabbildung (N.6') 1) müssen durch P die a , \bar{a} bzw. b , \bar{b} schneidenden Erzeugenden von Φ_a bzw. Φ_b aufgesucht werden. Diese sind Geraden aus \mathcal{L}_q , liegen daher in einer Ebene durch q . Die Schnittpunkte mit $\bar{\varepsilon}$ liegen auf einer Geraden durch $(q, \bar{\varepsilon})$. Da a , \bar{a} sowie b , \bar{b} involutorisch bzgl. \mathcal{J} sein müssen, liegt $(q, \bar{\varepsilon})$ auf s und ist von Z verschieden. Also sind die zwei in $\bar{\varepsilon}$ liegenden Geraden y_1 bzw. y_2 (siehe Abb.8), deren erstes bzw. zweites Bild $[P, S]$ ist, ebenfalls verschieden, wie immer Π gewählt wird.

6. Eigenschaften der Transformation (N.6)

=====

In diesem Kapitel werden die Eigenschaften der ne.GKT (N.6) ohne Verwendung des Satzes 3 noch im einzelnen nachgewiesen:

Einem Punkt R aus L_3 gemeinsam mit dem durch \mathfrak{J} daraus hervorgehenden Punkt \bar{R} entsprechen durch die Abbildung (N.6)1) zwei Geraden r^a und r^b in Π .

Sonderfälle: Liegt R auf p , so sind die Treffgeraden an a , \bar{a} bzw. b , \bar{b} zugleich Erzeugende von Φ_a bzw. Φ_b . Die Tangenten in deren Spurpunkten an die Spurkegelschnitte sind bereits die Bildgeraden. Da beide Erzeugende durch R die Gerade q schneiden müssen, liegen deren Spurpunkte auf einer Geraden durch den Spurpunkt Q von q (siehe Abb.9).

6.1 Das Bild eines Punktes R auf p ist jenes Tangentenpaar r^a, r^b an k_a bzw. k_b , dessen Berührungspunkte auf einer Geraden durch Q liegen. Analog für Punkte auf q .

Die Bilder eines Punktes R auf einer Erzeugenden y von Φ_{ab} ²²⁾ fallen zufolge 5.3 in eine Gerade durch F_2 zusammen.

6.2 Das erste Bild eines Punktes R auf a besteht aus einem Geradenbüschel, da es ∞^1 Treffgeraden aus R an \bar{a} gibt. Träger R^a ist der Spurpunkt der Erzeugenden von Φ_a durch R . Das zweite Bild ist die Verbindungsgerade von R^a mit F_2 als Bild der unter den ∞^1 Treffgeraden an a und \bar{a} enthaltenen Erzeugenden von Φ_{ab} (siehe Abb.10).

Damit ist es möglich, zum Spurpunkt Y einer Erzeugenden y von Φ_{ab} die Bildgerade $y^a = y^b$ durch F_2 anzugeben: Die Spurpunkte der Erzeugenden von Φ_{ab} auf f_1 und der Erzeugenden von Φ_a auf k_a durch dieselben Punkte auf a ergeben projektive Punktreihen. Dabei entsprechen die Spurpunkte von e_1 und e_2 als gemeinsame Erzeugende von Φ_{ab} und Φ_a je sich selbst. Dem Spurpunkt A von a entspricht der Berührungspunkt O von Φ_{ab} mit Π , denn es ist $[F_2, O]$ die zweite Erzeugende von Φ_{ab} in Π (siehe Abb.11). Damit aber ist der Spurpunkt \bar{A} von \bar{a} , der zweite Schnittpunkt von $[F_2, O]$ mit k_a , das Perspektivitätszentrum dieser Beziehung.

Nimmt man nun einen Punkt R auf a an, so ist nach 6.2 der Spurpunkt R^a der inzidenten Erzeugenden von Φ_a das erste Bild. Ist ²²⁾ Hier und im Folgenden sind immer die a, \bar{a}, b, \bar{b} schneidenden Erzeugenden von Φ_{ab} gemeint.

6. Eigenschaften der Transformation (N.6)

y durch R die Erzeugende von Φ_{ab} , so ist das zweite Bild aller Punkte von y die Gerade $[R^a, F_2]$. Der Spurpunkt Y von y liegt auf $[\bar{A}, R^a]$. Bezeichnet \bar{Y} den Spurpunkt der durch \mathfrak{J} aus y hervorgehenden Geraden \bar{y} , so erkennt man wegen der Projektion der Punkte F_2, O, A, \bar{A} aus R^a nach f_1 :

6.3 Die Bildgerade $y^a = y^b$ zu einem Erzeugendenpaar y, \bar{y} von Φ_{ab} enthält auf f_1 den harmonischen Punkt Y_0 zu O bzgl. Y, \bar{Y} , der Spurpunkte von y und \bar{y} . Dabei sind Y und \bar{Y} harmonisch bzgl. P und Q.

Den Punkten einer Geraden h aus \mathcal{L}_2 entsprechen zufolge 5.4 die Geradenpaare zweier Strahlbüschel H^a, H^b mit einer gemeinsamen Geraden durch F_2 .

6.4 Eine a und \bar{a} schneidende Erzeugende e von Φ_a hat als erstes Bild die Tangente an k_a im Spurpunkt E^a - genauer: das Strahlbüschel E^a als Bild der ∞^1 e schneidenden Treffgeraden von a und \bar{a} . Das zweite Bild ist, da diese Treffgeradenschar von Φ_a in \mathcal{L}_2 liegt, ein Strahlbüschel E^b auf dem Strahl $[E^a, F_2]$. Andererseits schneidet e die Geraden p und q. Die diesen Punkten nach 6.1 entsprechenden zweiten Bilder müssen ebenfalls dem zweiten Bildbüschel angehören. E^b ist also der Schnittpunkt der Tangenten an k_b in den zweiten Schnittpunkten 1, 2 von $[E^a, P], [E^a, Q]$, mit k_b (siehe Abb.12).

Wandert e auf Φ_a , so folgt aus der Projektivität zwischen den Punkten 1 und 2 auf k_b , daß sich E^b auf einem Kegelschnitt k_a^b bewegt, welcher ebenfalls k_a und k_b in P und Q berührt.

6.5 Das zweite Bild der a und \bar{a} schneidenden Erzeugendenschar von Φ_a ist ein Kegelschnitt k_a^b . Entsprechende Strahlbüschel von k_a und k_a^b sind einander perspektiv zugeordnet. Analog findet man einen Kegelschnitt k_b^a als Ort der ersten Bildstrahlbüschel der b und \bar{b} schneidenden Erzeugenden f von Φ_b .

6.6 Den Punkten einer allgemeinen Geraden g und der bzgl. \mathfrak{J} involutorischen Geraden \bar{g} entsprechen in den Abbildungen als Erzeugnisse der Projektivitäten auf den Spurkegelschnitten k_a und k_b die Tangenten zweier k_a bzw. k_b doppelt berührender Kegelschnitte g^a bzw. g^b . Den Schnittpunkten von g mit Φ_{ab} entsprechen zwei gemeinsame Tangenten von g^a und g^b durch F_2 . Die Schnittpunkte mit Φ_a bilden sich im ersten Bild auf die Tangenten in den Berührungspunkten von g^a mit k_a , die Schnittpunkte

6. Eigenschaften der Transformation (N.6)

mit Φ_b im zweiten Bild auf die gemeinsamen Tangenten von g^b und k_b ab. Die Tangenten von g^a und g^b sind als Bilder je desselben Punktes auf g einander projektiv zugeordnet. Dabei entsprechen die Tangenten durch F_2 je sich selbst (siehe Abb.13).

Welche Geraden bilden sich auf gleiche erste und gleiche zweite Bildkegelschnitte ab? Die durch g, a, \bar{a} bzw. g, b, \bar{b} bestimmten Flächen 2.Ordnung γ_a bzw. γ_b haben zwei Erzeugende von Φ_{ab} gemein. Daher schneiden sie sich in zwei weiteren Geraden g und \hat{g} .

Das durch a, \bar{a} und b, \bar{b} als Paare reziproker Geraden bestimmte Strahlgewinde sei mit \mathcal{X}_n bezeichnet ²³⁾. γ_a und γ_b enthalten je eine Erzeugendenschar aus \mathcal{X}_n . Also sind g und \hat{g} bzgl. \mathcal{X}_n reziprok. Aber auch die zu g, \hat{g} bzgl. \mathcal{L}_g reziproken Geraden \hat{g} und \bar{g} haben gleiche Bildkegelschnitte, da sie den Geraden \hat{g} und g durch \mathcal{J} entsprechen (siehe 2.3). Die sich durch Abbildung der Punkte von g und \bar{g} ergebenden Projektivitäten zwischen den Tangenten von g^a und g^b sind gleich. Ebenso die von \hat{g} und \bar{g} .

Umgekehrt seien g^a und g^b der obigen Art mit gemeinsamen Tangenten durch F_2 vorgegeben. Sie bestimmen je zwei Flächen durch a, \bar{a} bzw. b, \bar{b} . Entsprechend der Wahl der Urbilder der gemeinsamen Tangenten von g^a und g^b durch F_2 schneidet jede Fläche durch a, \bar{a} nur eine Fläche durch b, \bar{b} nach Geraden; also können nur vier Geraden, eben $g, \bar{g}, \hat{g}, \bar{\hat{g}}$, als Urbilder von g^a und g^b auftreten.

6.7 Durch die zwei Kegelschnitte g^a und g^b ist die Projektivität unter den Tangenten bis auf zwei Möglichkeiten bestimmt. Die eine entspricht dem Geradenpaar g, \bar{g} , die zweite $\hat{g}, \bar{\hat{g}}$.

Dies zeigt sich auch im Bild: Die gemeinsamen Tangenten durch F_2 entsprechen sich selbst. Die Tangente an g^a in einem Berührungspunkt E^a mit k_a ist das erste Bild des Schnittpunktes (g, Φ_a) . Dessen zweites Bild ist nach 6.4 eine Tangente an g^b durch den eindeutig zugeordneten Punkt E^b auf k_a^b . Hier nun ergeben sich zwei Möglichkeiten, die Projektivität zwischen g^a und g^b festzulegen (siehe Abb.13).

Ist ein Kegelschnitt g^a als erstes Bild einer Geraden vorgegeben, so ist das Urbild, daher auch das zweite Bild g^b auf ∞^1 Arten wählbar. g^b muß k_b und außerdem die zwei Tangenten aus F_2 an g^a berühren.

²³⁾ \mathcal{X}_n ist übereinstimmend mit 2.2 nach Bemerkung 5.5 zu \mathcal{L}_g involutorisch und $(\mathcal{L}_g, \mathcal{X}_n)$ das Strahlnetz mit den Achsen p und q .

6. Eigenschaften der Transformation (N.6)

6.8 Ist die abzubildende Gerade eine Treffgerade t von a und \bar{a} , so besteht das erste Bild aus einer Geraden t^a oder, als Geradenmannigfaltigkeit aufgefaßt, aus zwei Büscheln mit Trägern T_1^a , $T_2^a = (t^a, k_a)$ (siehe Abb.14).

Das zweite Bild t^b ist i.allg. ein Kegelschnitt, welcher vom Bild der Schnittpunkte (t, a) , (t, \bar{a}) , also nach 6.2 von den Geraden $[F_2, T_1^a]$, $[F_2, T_2^a]$ berührt wird. In diesem Fall gibt es zum ersten Bild nur ein Geradenpaar als Urbild, also nur ein zweites Bild. Dazu fehlt noch ein Bestimmungsstück:

6.9 Die zwei b und \bar{b} und t schneidenden Erzeugenden c_1, c_2 von Φ_b haben ihre ersten Bilder auf k_b^a (6.5). Umgekehrt ist t eine c_1 und c_2 schneidende Treffgerade an a und \bar{a} ; daher liegen die ersten Bildpunkte C_1^a, C_2^a von c_1, c_2 auf t^a , wodurch sie eindeutig bestimmt sind (siehe Abb.14). Ihre zweiten Bilder, wieder eindeutig nach 6.5, sind die Berührungspunkte von t^b mit k_b . t^b ist also aus t^a eindeutig konstruierbar.

Damit ist zugleich gezeigt:

6.10 Zu einer Bildgeraden t^a als erstes Bild eines Punktes ist das zweite auf ∞^1 Arten als Tangente eines eindeutig bestimmten Kegelschnittes t^b wählbar.

Die Punkte einer Tangente von g^a sind Bilder der Gewindestrahlen aus \mathcal{L}_g durch den entsprechenden Punkt von g . Welcher Gewindestrahl bildet sich auf den Berührungspunkt mit g^a ab?

r^a und r_1^a seien die Bilder zweier Punkte R und R_1 von g . Die Treffgeraden aus R bzw. R_1 an a und \bar{a} seien t bzw. t_1 (siehe Abb.15). Der Schnittpunkt der Tangenten r^a, r_1^a von g^a hat als Urbild die t und t_1 schneidenden Gewindestrahlen aus \mathcal{L}_g , darunter jenen Gewindestrahl h_1 durch R_1 , der t schneidet. Wandert t_1 nach t , so bleibt h_1 in der Ebene $[g, t]$, wird also zum Gewindestrahl h durch R in dieser Ebene.

6.11 R sei ein Punkt von g , t_a die Treffgerade an a und \bar{a} , t_b die Treffgerade an b und \bar{b} aus R . Der Hauptgewindestrahl h_a durch R in der Ebene $[g, t_a]$ bildet sich auf den Berührungspunkt der Bildtangente r^a mit g^a , der Gewindestrahl h_b durch R in der Ebene $[g, t_b]$ auf den Berührungspunkt von r^b mit g^b ab. h_a ist unbestimmt, wenn g selbst Hauptgewindestrahl oder eine Treffgerade von a und \bar{a} ist.

Für welche Geraden g liegen diese Berührungspunkte auf einer Ge-

6. Eigenschaften der Transformation (N.6)

raden durch F_2 , d.h. sind g^a und g^b perspektiv aufeinander bezogen?

Die Bildpunkte zweier Gewindestrahlen liegen nur dann auf derselben Geraden durch F_2 , wenn diese dasselbe Erzeugendenpaar von Φ_{ab} schneiden. Daß zwei verschiedene Gewindestrahlen h_a, h_b des Büschels durch R sich auf Punktepaare einer Geraden durch F_2 abbilden, kann daher nur für Punkte von Φ_{ab} zutreffen. In allen nicht auf Φ_{ab} gelegenen Punkten R können die Bilder von h_a und h_b nur dann auf einer Geraden durch F_2 liegen, wenn h_a und h_b zusammenfallen. Also müssen die Ebenen $[g, t_a], [g, t_b]$ identisch sein. Damit liegt g durch R in der Ebene der Treffgeraden t_a, t_b an a, \bar{a} und b, \bar{b} . Diese sind Geraden aus dem Nebenkomples \mathcal{K}_n . Damit gehört das ganze von t_a und t_b aufgespannte Büschel, also auch g dem Nebenkomples an. Tatsächlich fallen für alle Geraden aus \mathcal{K}_n (soweit sie nicht auch in \mathcal{L}_2 liegen) in allen Punkten die Gewindestrahlen h_a und h_b zusammen, sodaß die Bedingung hinreicht.

6.12 Die Geraden g des Nebenkomples \mathcal{K}_n bilden sich auf Kegelschnittpaare g^a und g^b ab, deren zugeordnete Tangenten in bzgl. F_2 perspektiv liegenden Punkten berühren.

Nach (N.6)2) werden die Bildgeradenpaare in Π aus A und B projiziert:

6.13 k_a und k_a^b , sowie k_b und k_b^a bestimmen durch ihre punktweise Zuordnung eindeutig zwei Kegelschnitte α und β in K_3 mit gemeinsamen Punkten P und Q in Π . Nun wird gezeigt, daß es eine Fläche Ω 2. Ordnung gibt, die α und β enthält, wobei der Tangentialkegel an Ω aus A längs α , der Tangentialkegel aus B längs β berührt. Damit kann man dann k_a und k_b als scheinbare und k_a^b, k_b^a als jeweils zweite Bilder der wahren Umrißkurven von Ω bei der Abbildung aus A und B nach Π auffassen.

Beweis: Angenommen, die Fläche Ω enthält α, β und der Tangentialkegel aus A berührt längs α : Damit ist Ω eindeutig bestimmt. Die Tangente r^a an k_a in einem beliebig gewählten Punkt E^a auf k_a kann nun aufgefaßt werden als erstes Bild einer Erzeugenden von Ω (siehe Abb.16). Deren zweites Bild r^b muß durch E^b auf k_a^b gehen. Ferner muß es zu einem Schnittpunkt F^a von r^a mit k_b^a das zweite Bild F^b auf k_b enthalten. Auf Grund der Eigenschaften von k_b^a und k_a^b (6.4 und 6.5) muß $r^b = [E^b, F^b] k_b$ berühren. Der scheinbare zweite Umriß von Ω ist nun als Kegelschnitt, der k_a in P und Q und ferner r^b berührt, eindeutig als k_b festgelegt; also hat tatsächlich der Tan-

6. Eigenschaften der Transformation (N.6)

gentialkegel an Ω längs β B als Spitze.

Die zwei Bilder einer Erzeugenden von Ω berühren k_a und k_b in Punkten einer Geraden durch Q oder P. Ein Vergleich mit 6.1 zeigt 6.14 Es entsprechen durch (N.6) den Punkten von p und q die zwei Erzeugendenscharen von Ω (vergleiche 2.2).

Die Spur von Ω in Π ist Ort der Schnittpunkte der Bildpaare der Erzeugenden. Da die Bildpaare einander in einer perspektiven Kollineation zwischen k_a und k_b mit P oder Q als Zentrum entsprechen, besteht die Spur aus den Achsen der Kollineationen, also aus den Geraden $[F_2, P]$ und $[F_2, Q]$.

6.15 Ω berührt die Ebene Π in F_2 .

Zu einer Geraden t^a als erstes Bild eines Punktes aus L_3 sind nach 6.10 die zweiten Bilder als Tangenten eines eindeutig bestimmten Kegelschnittes t^b auf ∞^1 Arten wählbar. Dieser Kegelschnitt ist ebenso als zweites Bild des Schnittes der Ebene $[A, t^a]$ mit Ω aufzufassen.

6.16 Bzgl. \mathcal{J} involutorischen Punktepaaren aus L_3 entsprechen durch (N.6) die Tangenten an Ω in K_3 . Speziell sind den Punkten von a und \bar{a} die Tangenten aus A zugeordnet. Deren erste Bilder in Π sind nämlich nach 6.2 Punkte.

Den zwei Bildkegelschnitten g^a, g^b einer allgemeinen Geraden g entsprechen auf Grund der zwei möglichen projektiven Zuordnungen der Tangenten zwei Regelflächen $\gamma, \hat{\gamma}$ in K_3 , die beide aus lauter Tangenten von Ω bestehen. Da sich i.allg. keine Tangente als Punkt abbildet, gehen die Regelflächen nicht durch A oder B. Ihre vollständigen scheinbaren Umriss sind einfach zu zählende Kegelschnitte; also sind γ und $\hat{\gamma}$ von zweitem Grad ²⁴⁾. Sie berühren Ω je längs einem Kegelschnitt.

Die Flächen 2.Grades mit den Umrissen g^a, g^b bilden eine Flächenschar, da sie die Kegel $[A, g^a]$ und $[B, g^b]$ berühren. Diese Kegel haben entsprechend den Berührungspunkten von g^a mit k_a und g^b mit k_b insgesamt vier gemeinsame Tangentialebenen mit Ω . Deren Berührungspunkte müssen zugleich Berührungspunkte von γ und $\hat{\gamma}$ mit Ω sein, da γ (und analog $\hat{\gamma}$) Ω längs einem Kegelschnitt berührt, es daher keine außerhalb dieses Kegelschnittes berührende gemeinsame Tangentialebenen von γ und Ω geben kann. Also ist die Berührebene von γ und

²⁴⁾ Dies folgt natürlich auch aus 5.4 und 6.16 nach 2.1.

6. Eigenschaften der Transformation (N.6)

$\hat{\gamma}$ eindeutig; γ und $\hat{\gamma}$ überdecken die gleiche Fläche 2. Ordnung.

6.17 Den Geradenpaaren g, \bar{g} , sowie $\hat{g}, \hat{\bar{g}}$ aus L_3 (6.7) entsprechen je die Erzeugendenscharen einer ne. Kugel, wenn Ω als absolutes Gebilde einer ne. Geometrie aufgefaßt wird. Speziell ergeben die Geradenpaare aus \mathcal{L}_γ nach 5.4 ne. Nullkugeln.

Die entsprechenden Berührungspunkte auf den Bildkegelschnitten g^a und g^b von Geraden g aus \mathcal{K}_n liegen nach 6.12 auf Geraden durch F_2 . Die Tangentenpaare von g^a und g^b in zugeordneten Punkten sind nun zugleich Bilder der Tangenten eines Kegelschnittes γ aus K_3 . Da alle Tangenten auch Ω berühren müssen, liegt γ auf Ω .

6.18 Den Geradenpaaren (reziprok bzgl. \mathcal{L}_γ oder involutorisch bzgl. \mathcal{J}) aus dem Nebenkomplex \mathcal{K}_n entsprechen die Tangenten an die ebenen Schnitte von Ω , also Ebenen. Speziell sind nach 5.3 den a schneidenden Erzeugendenspaaren von Φ_{ab} die Ebenen durch $[A, B]$ zugeordnet.

7. Die Transformation (E.6)
 =====

Der Nebenkomplex \mathcal{N}_e einer e.GKT besteht nach 1.1 aus den Treffgeraden des Hauptgewindestrahles u. Einem Ebenenbündel mit dem Träger A aus K_3 ist, falls A nicht auf dem absoluten Kegelschnitt liegt, ein Strahlnetz \mathcal{U} mit den Achsen a und u in L_3 zugeordnet. Dabei ist a das Bild von A. Wie im § 5 findet man, daß die beiden Bildgeraden einer Ebene aus dem Bündel reziprok bzgl. \mathcal{L} , daher zugleich bzgl. Φ_a polar sind, wobei Φ_a durch die a und u schneidenden Hauptgewindestrahlen festgelegt ist. Es kann somit als eindeutige Abbildung der Netzgeradenpaare auf Bündelebenen wieder die ECKHART-REHBOCK-Abbildung auf Geraden einer Φ_a nicht berührenden Ebene Π_a und darauffolgende Projektion von Π_a aus A verwendet werden. Die analoge Abbildung führt man für das Bild eines zweiten Strahlbündels mit Träger B, also für ein zweites Strahlnetz \mathcal{L} mit den Achsen b und u vermöge der Fläche Φ_b und der Ebene Π_b durch. Φ_a und Φ_b müssen einander längs u berühren und den gemeinsamen Geraden der beiden Netze müssen gleiche Ebenen entsprechen.

7.1 Ist dies der Fall, so erhält man wegen 5.4 und Satz 2 analog zu 5.1 eine e.GKT.

Im Folgenden sei Π eine gemeinsame Bildebene für beide Teilabbildungen: Im Gegensatz zu (N.6) ist nicht möglich, daß bei direkter Projektion von K_3 aus A und B nach Π den gemeinsamen Geraden der beiden Netze \mathcal{U} und \mathcal{L} je dieselben Ebenen durch $[A, B]$ entsprechen: e_1 und e_2 seien die restlichen zwei gemeinsamen Erzeugenden von Φ_a und Φ_b , also zwei spezielle Geraden, die beiden Netzen angehören. Ihre Bilder in Π sind Tangenten in deren Spurpunkten E_1 und E_2 an die Spurkegelschnitte k_a und k_b von Φ_a und Φ_b . k_a und k_b berühren einander im Spurpunkt U von u. Daher können sie in einer Ebene Π , die Φ_a und Φ_b nicht berührt, in den restlichen zwei gemeinsamen Punkten nicht auch gleiche Tangenten haben.

Es läßt sich jedoch eine zu (N.6') analoge e.GKT angeben: Die a, b und u schneidenden Geraden bilden eine Erzeugendenschar einer Fläche Φ_{ab} zweiter Ordnung. Ihre Bildgeraden sind als Bild einer allgemeinen Erzeugenden der zweiten Schar aufzufassen. Diese Schar enthält a, b, u, ist daher ganz in \mathcal{L} enthalten. Das Bild dieser Erzeugenden besteht nach 5.4 aus zwei projektiven Strahlbüscheln O_a und O_b . Da die Bilder von e_1 und e_2 in den Büscheln enthalten sein

7. Die Transformation (E.6)

müssen, sind O_a bzw. O_b die Pole zu $[E_1, E_2]$ bzgl. k_a bzw. k_b (siehe Abb.17).

y sei eine allgemeine Treffgerade von u , a und b . Ihre Bilder y^a bzw. y^b in Π erhält man, indem man die Spurpunkte der y und u schneidenden Erzeugenden von Φ_a bzw. Φ_b verbindet. Da Φ_a und Φ_b einander längs u berühren, liegen je zwei dieser vier Erzeugenden in einer Ebene durch u . Deren Spurpunkte liegen daher paarweise auf Geraden durch U . Somit müssen die beiden Bilder y^a und y^b einander in einer perspektiven Kollineation \mathcal{P} zwischen k_a und k_b mit dem Zentrum U und der Achse $[E_1, E_2]$ entsprechen. Die Büschel O_a, O_b sind perspektiv.

Setzt man diese Abbildung des Linienraumes analog zu (N.6') mit einem allgemeinen Zweibildersystem in K_3 zusammen, wobei O_a, O_b in ihrer Zuordnung als Kernstrahlbüschel aufgefaßt werden, so erhält man eine i.allg. eineindeutige Abbildung von Punkten aus L_3 auf Geraden aus K_3 , wobei nach 5.4 den Punkten der Hauptgewindestrahlen die Geraden durch Punkte in K_3 entsprechen. Nach Satz 2 erhält man also eine e.GKT.

(E.6): Voraussetzungen: a) Φ_a, Φ_b in L_3 seien zwei einander längs der Geraden u berührende reguläre Flächen 2.Ordnung mit e_1, e_2 als restlichen gemeinsamen Erzeugenden. a aus Φ_a und b aus Φ_b seien zwei zu u windschiefe, einander nicht schneidende weitere Erzeugende.

b) Π sei eine Φ_a und Φ_b nicht berührende Ebene. k_a und k_b in Π seien die Spurkurven von Φ_a, Φ_b, E_1 und E_2 die Spurpunkte von e_1 bzw. e_2, O_a bzw. O_b die Pole zu $[E_1, E_2]$ bzgl. k_a bzw. k_b .

c) Π sei ferner Bildebene eines allgemeinen Zweibildersystems in K_3 mit O_a, O_b als Trägern der Kernstrahlbüschel und mit $[E_1, E_2]$ als Perspektivitätsachse.

1) Man bildet die Treffgeraden aus einem Punkt P aus L_3 an a und u durch Φ_a , an b und u durch Φ_b vermöge der ECKHART-REHBOCK-Abbildung auf die Geraden p^a und p^b in Π ab.

2) p^a und p^b werden als Bilder einer Geraden p aus K_3 im Zweibildersystem c) aufgefaßt.

Ordnet man P aus L_3 und p aus K_3 einander zu, so erhält man eine e.GKT.

Auch hier wird zusätzlich gezeigt, wie den Punkten aus L_3

7. Die Transformation (E.6)

die Treffgeraden eines Kegelschnittes k entsprechen: Die Treffgeraden t_a, t_b aus einem Punkt P an a und u bzw. b und u liegen in einer Ebene durch u . Die Erzeugenden von Φ_a bzw. Φ_b durch die Schnittpunkte (t_a, a) bzw. (t_b, b) liegen ebenfalls in dieser Ebene, da sie u schneiden müssen. Deren Spurpunkte liegen daher auf einer Geraden durch U . Sie sind ein Punktepaar der obigen perspektiven Kollineation \mathcal{P} , liegen daher auf entsprechenden Strahlen durch O_a bzw. O_b (siehe Abb.18). Somit enthalten in \mathbb{P} die Bildgeraden p^a und p^b des Punktes P ein entsprechendes Punktepaar auf k_a bzw. k_b aus der Kollineation \mathcal{P} .

7.2 Deutet man die Bildgeraden p^a, p^b als Bild einer Geraden p aus K_3 , so muß das Urbild p jenen Kegelschnitt in einem Punkt schneiden, dessen Bilder k_a und k_b sind. Die Ebene dieses Kegelschnittes ist durch die Kollineation \mathcal{P} eindeutig festgelegt.

Schneiden a und b einander, so erhält man analog zu 5.5 projektive Kernstrahlbüschel (in vereinigter Lage). Also muß als Kugelraumabbildung ein allgemeinstes Zweibildersystem verwendet werden, um eine e.GKT herzustellen.

8. Weitere Transformationsmöglichkeiten =====

Die e.GKT (E.6) wurde durch die Abbildungen zweier Strahl-netze des Linienraumes auf zwei Ebenenbündel des Kugelraumes er-zeugt. Die nun abzuleitende Transformation entsteht durch Zusammen-setzung der Abbildungen von zwei Strahlnetzen aus L_3 auf Punktfel-der aus K_3 . Da der euklidische Kugelraum nicht zu sich selbst dual ist, ist eine von (E.6) wesentlich verschiedene Transformation zu erwarten.

Man kommt zu dieser e.GKT, wenn man nach der über den P_5 er-klärten Abbildung (E.1) der Geraden aus L_3 auf Kugeln aus K_3 zwei lineare Strahlkongruenzen des Hauptgewindes \mathcal{L}_3 transformiert. Dies kann je in dreidimensionalen Räumen durchgeführt werden.

Um zu einer Geraden g aus L_3 den Bildpunkt G_0 auf der Plük-kerquadrik zu erhalten, bestimmt man nach Satz 1 die Bildpunkte in einem Zweispurensystem, faßt diese auf als Bild eines Punktes G'_0 aus einem vierdimensionalen Raum H_4 und projiziert G'_0 stereogra-phisch auf eine reguläre Quadrik eines P_5 unter Beachtung der im Satz 1 beschriebenen Bedingungen.

Zu einer Geraden aus \mathcal{L}_3 erhält man nach (E.1) den zugeord-neten Punkt in K_3 , wenn man den Bildpunkt auf der Plückerquadrik aus dem Bildpunkt U_0 der singulären Geraden u nach K_3 stereogra-phisch projiziert.

Diese Abbildungen werden für ein Strahlnetz \mathcal{U} mit den Ach-sen a, \hat{a} durchgeführt: Die erste Spurebene Π_a (nicht durch a oder \hat{a}) sei bereits mit dem Ort der Bildpunkte in H_4 identisch. Π_a wird nun innerhalb eines P_3 stereographisch auf die Quadrik des P_5 projiziert, wobei den Strahlbüscheln aus \mathcal{U} Erzeugende der Bild-fläche entsprechen müssen. Eine stereographische Rückprojektion aus U_0 ergibt die Bildpunkte in K_3 . Sind die folgenden zwei Bedingungen erfüllt, so heben die beiden stereographischen Projektionen einan-der auf oder sind mit einer Projektion von Π_a auf die Bildebene α von \mathcal{U} identisch:

- 1) Die Gerade u gehört dem Strahlnetz \mathcal{U} an; damit ist dem Netz \mathcal{U} eine Ebene α in K_3 zugeordnet.
- 2) Damit das Bild von u auch Zentrum der ersten stereographischen Projektion ist, muß u in der Spurebene Π_a liegen.

8.1 Zu den Geraden eines Strahlnetzes \mathcal{U} mit den u schneidenden

8. Weitere Transformationsmöglichkeiten

Achsen a, \hat{a} erhält man bei vereinigter Lage von K_3 und L_3 die Bildpunkte, wenn man ihre Spurpunkte in einer Ebene Π_a durch u in eine Ebene α projiziert, wobei auch $\alpha = \Pi_a$ sein kann.

Um eine e.GKT zu erzeugen, bildet man auf dieselbe Weise ein zweites solches Strahlnetz \mathcal{L} mit den Achsen b, \hat{b} über eine Spurebene Π_b durch u auf eine Ebene β ab. a, \hat{a}, b, \hat{b} sind paarweise reziprok bzgl. des Hauptgewindes \mathcal{H} , müssen daher in hyperboloidischer Lage angenommen werden. u muß alle vier Geraden schneiden. a, \hat{a}, b, \hat{b} seien paarweise windschief vorausgesetzt. Es ist nun nicht möglich, Π_a und Π_b zugleich als Bildebenen α, β in K_3 aufzufassen, denn es müssen den gemeinsamen Geraden der beiden Netze dieselben Bildpunkte auf (α, β) entsprechen. Die gemeinsamen Netzgeraden, darunter u , bilden die erste Erzeugendenschar einer Fläche Φ_{ab} 2. Ordnung. a, \hat{a}, b, \hat{b} sind Erzeugende der zweiten Schar. Die Spurpunkte der ersten Schar in der Ebene Π_a bzw. Π_b durch u liegen auf einer Erzeugenden x_a bzw. x_b der zweiten Schar. x_a und x_b sind zueinander windschief. Also wäre die Zusammensetzung der beiden Teilabbildungen widerspruchsvoll. Somit bleibt nur die Möglichkeit

(E.7): Voraussetzungen: a) a, \hat{a}, b, \hat{b} seien paarweise windschiefe Geraden aus L_3 in hyperboloidischer Lage. Ihre Treffgeradenschar enthalte u . Die Spurpunkte dieser Schar in einer Ebene Π durch u , jedoch nicht durch eine der vier Geraden, seien auf der Geraden x gelegen.

b) Π sei ferner Bildebene eines allgemeinen Zweispurensystems: Die beiden Spurebenen α und β (eventuell $\alpha = \Pi$) werden aus einem Punkt O nach Π projiziert. Bild von (α, β) sei die Gerade x .

1) Ein Punkt P aus L_3 wird durch zwei Netzprojektionen mit den Achsen a, \hat{a} , sowie b, \hat{b} auf ein Punktepaar P^a, P^b in Π abgebildet.

2) P^a, P^b werden als Bilder einer Geraden p aus K_3 im Zweispurensystem b) aufgefaßt.

Ordnet man P aus L_3 und p aus K_3 einander zu, so erhält man eine e.GKT (siehe Abb.22 bei $\alpha = \Pi$).²⁵⁾

Beweis: Den Punkten einer a, \hat{a}, b, \hat{b} schneidenden Geraden

²⁵⁾ Man hätte diese Konstruktion auch ohne Erklärung über den P_5 mit Hilfe des Satzes 2 ableiten können.

8. Weitere Transformationsmöglichkeiten

aus Φ_{ab} entspricht ein identisches Punktepaar auf x . Eine allgemeine Gerade g bildet sich auf projektiv zugeordnete Kegelschnitte in Π ab: Die Netzprojektion g^a durch a, \hat{a} ist ein Kegelschnitt durch die Spurpunkte A, \hat{A} von a, \hat{a} . Analog geht g^b durch B, \hat{B} . Die Schnittpunkte von g mit Φ_{ab} bilden sich auf gemeinsame und sich selbst entsprechende Punkte von g^a und g^b auf x ab. Deutet man diese Bilder in K_3 , so erhält man eine Erzeugendenschar auf einer Fläche γ 2. Ordnung. γ enthält die Bilder von A, \hat{A} in α , die Bilder von B, \hat{B} in β und den Punkt O . O liegt auf der Erzeugenden, die dem Spurpunkt von g in Π entspricht. Diese fünf Punkte liegen in der Ebene $[O, u]$ (siehe Abb. 19). γ enthält also einen von g unabhängigen Kegelschnitt k in dieser Ebene. (E.7) bildet also Punkte aus L_3 auf Treffgeraden von k ab.

Umgekehrt entsprechen jeder Fläche γ 2. Ordnung durch k zwei Spurkegelschnitte g^a, g^b der obigen Art. Die durch g^a, a, \hat{a} , sowie g^b, b, \hat{b} bestimmten Regelscharen schneiden einander längs zwei Geraden g, \hat{g} . Da diese Regelscharen in dem durch a, \hat{a} und b, \hat{b} als reziproken Geraden bestimmten Strahlgewinde \mathcal{L}_γ liegen, sind g und \hat{g} bzgl. \mathcal{L}_γ reziprok. g und \hat{g} bilden sich also auf die zwei Erzeugendenscharen von γ ab. Dann und nur dann, wenn g und \hat{g} zusammenfallen, also in \mathcal{L}_γ liegen, trägt γ nur eine Erzeugendenschar, ist also ein Kegel 2. Ordnung durch k . Der Geraden g entspricht nur dann ein Bündel von Treffgeraden in K_3 , wenn beide Bilder g^a, g^b in Π in Geradenpaare zerfallen. Es zeigt sich, daß dies außer den Erzeugenden von Φ_{ab} , für welche die Abbildung singular ist, nur für Treffgeraden von u zutrifft.

Bemerkung 8.7: Punkten aus Π entsprechen die inzidenten Geraden durch O . Also kann man aus (E.7) die MÜLLERSche Abbildung (E.4) ableiten.

Die ∞^3 Geraden g des Gewindes \mathcal{L}_γ bilden sich in (E.7) durch die erste Netzprojektion auf ∞^3 Kegelschnitte durch A, \hat{A} in Π ab. Umgekehrt sind sie durch einen Kegelschnitt bis auf Zweideutigkeit festgelegt. Die durch g, a, \hat{a} festgelegte Fläche 2. Ordnung wird in allen Punkten von g von der zugehörigen Nullebene berührt. Durchläuft daher g ein Bündel mit dem Träger P , so werden alle entstehenden Flächen in P von der Nullebene zu P berührt. Damit aber ist längs der Treffgeraden aus P an a, \hat{a} die Berührkorrelation festgelegt: Das Bild eines Bündels von Gewindestrahlen aus \mathcal{L}_γ ist in Π ein Bündel von Kegelschnitten durch A, \hat{A} mit einem gemeinsamen Li-

8. Weitere Transformationsmöglichkeiten

nienenelement. Man erhält nun nach Satz 2 eine e.GKT, wenn man die Kegelschnitte durch A, \hat{A} in Π einzweideutig auf Punkte aus K_3 abbildet, wobei den Kegelschnitten mit gemeinsamen Linienelement die Punkte einer Geraden entsprechen müssen. Sind A, \hat{A} die absoluten Kreispunkte, so wird dies durch die zyklographische Abbildung von K_3 nach Π erreicht. (In allen anderen Fällen durch entsprechende projektive Verallgemeinerung).

(E.8): Voraussetzung: a, \hat{a} seien bzgl. des Strahlgewindes \mathcal{L}_3 reziproke Geraden aus L_3 , die eine Ebene Π in den absoluten Kreispunkten schneiden.

1) Geraden aus \mathcal{L}_3 werden durch Netzprojektion aus a, \hat{a} auf Kreise in Π abgebildet.

2) Diese werden als zyklographische Bilder von Punktepaaren aus K_3 aufgefaßt.

Die sich ergebende Zuordnung ist bis auf Zweideutigkeit eine e.GKT.

Durch Zusammensetzung mit der Darboux'schen Transformation (D.3) erhält man daraus unmittelbar die ne.GKT

(N.7): Voraussetzung: p und q seien zwei bzgl. des Strahlgewindes \mathcal{L}_3 reziproke Geraden aus L_3 , die eine Ebene Π in den absoluten Kreispunkten schneiden.

1) Geradenpaare aus \mathcal{L}_3 werden durch Netzprojektion an p und q auf Kreise in Π abgebildet.

2) Diese werden stereographisch auf eine Kugel Ω aus K_3 projiziert und die entstehende Kreisebene an Ω polarisiert.

Diese Zusammensetzung ist eine ne.GKT. (Ohne Polarität an Ω müßte \mathcal{L}_3 als Nebenkomplex in L_3 aufgefaßt werden.)

Zu (N.7) gibt es folgenden zweiten Zugang: Man erhält nach Satz 4 eine ne.GKT, wenn die bzgl. p und q involutorischen Geradenpaare aus \mathcal{L}_3 eineindeutig auf Punkte aus K_3 abgebildet werden. Zwei solche Geraden g, \bar{g} bestimmen durch die sie schneidenden Gewindestrahlen eine Fläche 2. Ordnung, die auch p und q enthält. Umgekehrt gibt es auf jeder nichtzerfallenden Fläche 2. Ordnung durch p und q in der zu p und q windschiefen Schar genau ein Geradenpaar des Hauptgewindes \mathcal{L}_3 . Schneidet ein Gewindestrahl p und q , so zerfällt die Fläche 2. Ordnung in zwei Ebenen durch p und q ; umgekehrt bestimmen solche zwei Ebenen genau eine Gerade aus \mathcal{L}_3 .

8. Weitere Transformationsmöglichkeiten

Man erhält also eine ne.GKT, wenn man die Flächen 2.Ordnung durch p und q ausnahmslos eineindeutig auf Punkte abbildet und dies ist eben durch (N.7) möglich.

Die Abbildung (N.7) hängt eng zusammen mit der von SCHUR [26] und WEISS [38] genannten Abbildung:

- (N.7') 1) Ein bzgl. p und q involutorisches Strahlenpaar g, \bar{g} aus dem Gewinde \mathcal{L}_g bestimmt durch die schneidenden Gewindestrahlen eine Fläche γ 2.Ordnung durch p und q .
2) G aus K_3 sei der Pol bzgl. γ zu einer vorgegebenen allgemeinen Ebene ε .

Die Zuordnung von g, \bar{g} aus L_3 und G aus K_3 ist eine ne.GKT.

Der analoge Fall einer e.GKT:

- (E.9): 1) Die eine Gerade g aus dem Gewinde \mathcal{L}_g in L_3 und den Gewindestrahl u schneidenden Gewindestrahlen bilden eine Fläche γ 2.Ordnung.
2) G aus K_3 sei der Pol bzgl. γ zu einer vorgegebenen allgemeinen Ebene ε .

Diese Zuordnung von g aus L_3 und G aus K_3 ist eine e.GKT.

Beweis: In beiden Fällen ist die Zuordnung zwischen den Geraden bzw. Geradenpaaren aus \mathcal{L}_g über die Flächen γ auf Punkte aus K_3 eineindeutig. Den Gewindestrahlen eines Büschels entsprechen die Pole zu ∞^1 Flächen eines Büschels, also Punkte einer Geraden. Nach Satz 2 bzw. Satz 3 sind die Abbildungen Geraden-Kugel-Transformationen.

Bemerkung 8.8: Nach (E.1) und (N.1) erhält man Geraden-Kugel-Transformationen, wenn auf der Plückerquadrik M_4^2 die Bildpunkte der Geraden aus \mathcal{L}_g , also die Punkte einer $M_3^2 \subset H_4$, innerhalb H_4 aus einem Punkt $U_0 \subset M_3^2$ oder aus K_0 außerhalb M_3^2 auf den Unterraum K_3 projiziert werden. Diese Abbildung kann man auf den P_5 erweitern, indem man die Punkte von M_3^2 aus der Geraden $O_1 = [U_0, H_{0_2}]$ bzw. $[K_0, H_{0_2}]$ nach K_3 projiziert. Dabei sei H_0 der Pol zu H_4 bzgl. M_4^2 . Die Verbindungsebenen von O_1 mit Punkten von M_3^2 sind genau das Bild einer Erzeugendenschar der Flächen γ 2.Ordnung aus (N.7')1) bzw. (E.9)1). Aus (E.1) und (N.1) folgt übrigens, daß allen Geraden dieser Erzeugendenschar konzentrische Kugeln entsprechen.

Die Abbildungen (E.8), (E.9), (N.7), (N.7') haben bei der Transformation allgemeiner Geraden aus L_3 den Nachteil, daß in L_3 die Geraden des Hauptgewindes als Raumelement verwendet werden.

9. Netzprojektion, kinematische Abbildung, Speerabbildung
=====

(I) Die Ähnlichkeit der Konstruktionen (E.8) und (E.5), sowie (N.7) und (N.5) läßt eine Beziehung zwischen Netzprojektion und der zur Abbildung auf orientierte Linienelemente erweiterten kinematischen Abbildung, also der kinematischen Elementabbildung vermuten:

Die Achsen einer doppelten Netzprojektion auf die Ebene Π seien die Paare konjugiert komplexer Erzeugenden durch die Nebenscheitel eines einschaligen Drehhyperboloids mit dem Mittelpunkt M in Π und der Drehachse a normal zu Π . Die Länge der halben Nebenachse sei k .

Die beiden Netzrisse P_l, P_r eines Raumpunktes P in der Höhe z über Π werden bekanntlich aus dem Normalriß P' von P nach Π unter dem Winkel φ gesehen, wobei $\text{ctg } \varphi/2 = z/k$. Ferner haben P_l und P_r von P' den gleichen Abstand; sie gehen also durch Drehung um P' durch den Winkel φ ineinander über (siehe Abb.20).

Diese Drehung ist zugleich das Bild von P in der kinematischen Abbildung nach Π , wenn das absolute Gebilde der zugrundeliegenden quasielliptischen Geometrie in den Ebenen $\pm ki$ bzgl. Π liegt. Unterwirft man ein orientiertes Linienelement durch den Punkt $M = a'$ dieser Drehung, so erhält man ein Element durch den Punkt P_k als Bild des Raumpunktes P in der kinematischen Elementabbildung. Da P_l und P_r symmetrisch bzgl. $[P', M]$ liegen, geht bei der in Abb.20 gewählten Bezeichnung P_k aus P_r durch eine zentrische Ähnlichkeit bzgl. M im Verhältnis 1:2 hervor.

Satz 5: Der Punkt P_k jenes Linienelementes, auf welches ein Raumpunkt P durch die kinematische Elementabbildung abgebildet wird, ist zu einem Netzriß P_r von P zentrisch ähnlich mit dem Punkt M des Ursomas als Zentrum und dem Ähnlichkeitsverhältnis 1:2. Die Achsen dieser Netzprojektion sind zwei konjugiert komplexe Erzeugende i_1, i_2 des absoluten Gebildes der quasielliptischen Geometrie, das der kinematischen Abbildung zugrunde liegt. Das Netz der Treffgeraden von i_1 und i_2 ist rechtsgewunden und enthält die zur Bildebene

9. Netzprojektion, kinematische Abbildung, Speerabbildung

normale Gerade a durch M als Hauptstrahl ²⁶).

Bemerkung 9.9: Stellt man die orientierten Linienelemente in Π durch Pfeile konstanter Länge dar mit dem Punkt des Elementes als Anfangspunkt, so ließe sich für die Pfeilspitze auf analoge Weise eine Netzprojektion und zentrische Ähnlichkeit angeben; an die Stelle von M tritt dabei die Spitze des Ursomas. Also ist die kinematische Elementabbildung bis auf Ähnlichkeiten mit zwei Netzprojektionen gleichwertig.

Zu Satz 5 gibt es auch eine räumliche Erklärung; dazu folgende Definitionen: Rechtsnetz (oder rechtsgewundenes Netz) heißt ein elliptisches Strahlnetz, wenn die Netzgeraden zum Hauptstrahl rechtsgewunden, d.h. zum Hauptstrahl als Achse von Rechtsschraubungen die Tangenten an Schraublinien sind. Gehören die Netzachsen dem absoluten Gebilde einer quasielliptischen oder elliptischen Geometrie an, so heißen die Netzgeraden linksparell (nach STUDY linksparellaktisch), die Achsen linksseitig. Sind diese Achsen die Doppelgeraden einer zweiachsigen Kollineation, also einer quasielliptischen oder elliptischen Schiebung, so nennt man auch die Schiebung linksseitig. Bei dieser bleiben alle rechtsseitigen Erzeugenden des absoluten Gebildes fest. Also erhält eine linksseitige Schiebung die Rechtsparellität, oder nach STRUBECKER [28]:

9.1 Schiebungen erhalten Parataxien der anderen Art.

Als linker kinematischer Bildpunkt G^1 einer Raumgeraden g wird in Π der Spurpunkt der zu g in der zugrundeliegenden quasielliptischen Geometrie linksparellen Geraden durch den zu Π normalen Fernpunkt V bezeichnet. Analog G^r . Enthält die Gerade g den zu Π normalen Fernpunkt V , so fallen beide Bilder in den Spurpunkt von g zusammen.

Unterwirft man eine Gerade durch V einer Rechtsschiebung, so bleibt nach 9.1 der linke Bildpunkt fest, während das rechte Bild in Π einer Drehung, vom linken Bild ausgehend, unterworfen wird (zum Beweis siehe etwa [22]). Eine Drehung des linken Bildpunktes G^1 in den rechten G^r ist also kinematisches Bild einer Rechtsschiebung der Geraden $[G^1, V]$ nach g .

²⁶) Dieses Strahlnetz nennt STRUBECKER [33] "Grundnetz" der kinematischen Abbildung. Die direkte Beziehung zu den Spurpunkten in Π , also zur Netzprojektion, ist dort nicht ausgesprochen. Dagegen hat STRUBECKER bei der kinematischen Abbildung auf die Minimalebene [30], S 338, die Identität der Spurpunkte des dort parabolischen Grundnetzes mit den Elementpunkten angegeben.

9. Netzprojektion, kinematische Abbildung, Speerabbildung

Die Drehung, auf welche sich ein Raumpunkt P abbildet, ist Bild der Rechtsschiebung von V nach P (Symbol \overrightarrow{VP}). Unterwirft man den fixen Punkt M in Π dieser Drehung, so ist der entstehende Punkt P_k das rechte kinematische Bild jener Geraden a_p , welche aus $a = [M, V]$ durch die Rechtsschiebung \overrightarrow{VP} hervorgeht. a_p ist zu a linksparallel, gehört daher jenem Netz an, welches die linksseitigen, a schneidenden absoluten Geraden i_1 und i_2 als Achsen hat.

Der linke Bildpunkt von a_p ist M ; Spurpunkt von a_p ist der Netzriß P_r von P mit i_1, i_2 als Achsen. Der linke und rechte Bildpunkt einer Geraden in der kinematischen Abbildung liegen bzgl. des Spurpunktes symmetrisch. Daraus ergibt sich Satz 5.

(II) Wie schon im § 3 wegen der Ähnlichkeit der Abbildungen (N.3) und (N.5) angedeutet wurde, ist es möglich, die zur Elementabbildung erweiterte STUDY'sche Speerabbildung, also die sphärische Elementabbildung, aus der kinematischen Elementabbildung, einer stereographischen Projektion und einer einfachen kongruenten Transformation zusammensetzen:

Gegeben sei eine nullteilige Kugel \mathcal{K} mit der Mitte O und dem Radius li . In der STUDY'schen Speerabbildung ordnet man einer orientierten Raumgeraden (= "Speer") die bzgl. \mathcal{K} links- bzw. rechtsparallelen orientierten Geraden durch O zu. Unter den Schnittpunkten dieser Bildgeraden mit einer einteiligen Kugel mit dem Mittelpunkt O und dem Radius r wählt man jeweils jene aus, welche O bei einem Durchlaufen des Bildspeeres im positiven Sinn zuerst erreicht. Damit ergibt sich eine eineindeutige Abbildung der orientierten Raumgeraden auf Punktepaare einer Kugel Ω .²⁷⁾

Analog zur kinematischen Abbildung zeigt sich, daß den orientierten Geraden durch einen Punkt P die Punktepaare einer Drehung von Ω mit $[O, P]$ als Drehachse entsprechen. Diese Drehung verwendet STRUBECKER [28], um nach Vorgabe eines Ursomas auf Ω jedem Raumpunkt P ein orientiertes Linienelement auf der Kugel, im weiteren Sinne also eine orientierte Tangente der Kugel zuzuordnen.

Speeren durch O entsprechen in der Speerabbildung identische linke und rechte Bildpunkte auf Ω . Die Drehung, welche für Speere durch einen Punkt P deren linke Bildpunkte in die rechten überführt, ist Bild der Rechtsschiebung von O nach P . Unterwirft man jene orientierte Gerade b durch O , deren im obigen Sinn

²⁷⁾ Polaren Geraden bzgl. Ω entsprechen gleiche links- und rechtsparallele Geraden durch O , jedoch in anderer Orientierung.

9. Netzprojektion, kinematische Abbildung, Speerabbildung

eindeutig zugeordneter Punkt auf Ω der Punkt N des Ursomas ist, dieser Rechtsschiebung, so erhält man eine zu b linksparallele orientierte Raumgerade b_P . b_P gehört einem Rechtsnetz an, dessen Achsen die linksseitigen, b schneidenden Erzeugenden j_1, j_2 von Ω sind.

Der linke Bildpunkt des Speeres b_P ist N; der rechte Bildpunkt auf der zu b_P rechtsparallelen orientierten Geraden durch O ist der Punkt P_3 des Bildelementes von P in der Abbildung (N.3). P_u sei der Fernpunkt von b_P , also die Netzprojektion von P durch j_1, j_2 in die Fernebene. Fernpunkten entsprechen in der STUDYschen Abbildung Umwendungen. Daraus folgt

9.2 Der Punkt P_3 des Bildelementes zu P in der Abbildung (N.3) geht aus N, dem Punkt des Ursomas, durch eine Umwendung um die Gerade $[O, P_u]$ hervor. Dabei ist P_u der Netzriß des Punktes P mit den linksseitigen, $b = [O, N]$ schneidenden Erzeugenden j_1 und j_2 als Achsen und der Fernebene als Bildebene.

Aus (N.5) und Satz 5 ergibt sich

9.3 Den Punkt P_5 des Bildelementes zu P durch (N.5) erhält man folgendermaßen: 1) P wird durch i_1, i_2 nach P_r in Π projiziert, 2) M an P_r zu P_k gespiegelt, 3) P_k stereographisch auf eine Kugel Φ projiziert. Die noch auszuführende Polarität an der Kugel Φ ändert den Punkt des Bildelementes nicht. Sie bedeutet eine Drehung jedes Elementes um 90° . Diese soll von innen gegen den Uhrzeigersinn erfolgen.

Um eine einfache Beziehung zwischen den Punkten P_3 und P_5 ableiten zu können, verlangt man zweckmäßig:

- Φ sei mit Ω identisch, also auch $M = 0$.
- Die Achsen j_1, j_2 seien mit i_1, i_2 identisch. Dies erreicht man, indem man $[O, N] = b = a$ und den Radius von κ $l_i = k_i$ wählt.
- N sei zugleich das Zentrum der stereographischen Projektion von Π nach Ω . N liege "unter" Π .

Die Geraden $[N, P_3]$ und $[N, P_u]$ sind nach 9.2 zueinander normal und liegen in einer Ebene durch O (siehe Abb.21). Projiziert man daher P_u aus N nach Ω , so erhält man den Gegenpunkt zu P_3 .

P_u^n sei die Projektion von P_u aus N nach Π . In welcher Beziehung stehen der Netzriß P_r und das Bild P_u^n des Netzrisses P_u zueinander, wenn die Achsen der Netzprojektionen nach b) identisch sind?

9. Netzprojektion, kinematische Abbildung, Speerabbildung

Durch die Netzprojektion werden die Ebenen Π von P_r und die Fernebene als Ort von P_u kollinear aufeinander bezogen. Die Ferngerade von Π entspricht sich selbst. Die Projektivität auf ihr ist wegen der harmonischen Lage der zwei Ebenen bzgl. der Achsen i_1 und i_2 eine Involution mit den absoluten Kreispunkten als Doppelpunkten. Durch Projektion der Fernebene aus N nach Π erhält man eine allgemeine Kollineation in Π . O ist dritter Doppelpunkt. Dreht man P_u^n um O durch 90° , und zwar von oben (siehe c)) gesehen im Uhrzeigersinn, so sind P_u^n und P_r bzgl. O zentrisch ähnlich mit positivem Ähnlichkeitsverhältnis. Wählt man N in der Höhe k unter Π , so ist die gedrehte Lage von P_u^n mit dem Punkt P_r identisch. Man erkennt dies, wenn man P auf jenem einschaligen Drehhyperboloid durch i_1 und i_2 wählt, dessen Meridianschnitt eine gleichseitige Hyperbel ist.

P_k ist nach Satz 5 zentrisch ähnlich zu P_r bzgl. O im Verhältnis $2:1$. P_k fällt mit der gedrehten Lage von P_u^n zusammen, wenn N in der Höhe $2k$ unter Π liegt. Man wird daher fordern

d) $r = 2k$.

9.4 Unter den Bedingungen a...d) erhält man P_3 auf Ω aus P_5 , der stereographischen Projektion von P_k , durch eine Vierteldrehung um die Achse a , von oben gesehen gegen den Uhrzeigersinn, und dem Übergang zu Gegenpunkten auf Ω .

φ sei der Winkel der Drehung, auf welche sich in der kinematischen Abbildung der Raumpunkt P abbildet; V ist der zu Π normale Fernpunkt; I_1, I_2 seien die Schnittpunkte der Geraden $[VP]$ mit den Ebenen $\pm ki$. Dann gilt $\varphi/2 = i/2 \cdot \ln(VPI_1I_2)$ ²⁸⁾, d.h. φ ist gleich der doppelten quasielliptischen Länge der Schiebstrecke \overrightarrow{VP} . Dabei soll für Punkte über Π der zugehörige Winkel $\varphi/2$ kleiner als 90° sein, wenn in Π von oben gesehen gegen den Uhrzeigersinn gemessen wird (siehe Abb.20).

Dreht man das Ursoma E_o der kinematischen Elementabbildung um M durch den Winkel φ , von oben gesehen gegen den Uhrzeigersinn, und verschiebt dieses nach P_k parallel, so erhält man das Bildelement E_k zu P . Stereographische Projektion aus N nach Ω ergibt: Das zu E_o gleichsinnig parallele Element im Gegenpunkt \bar{N} zu N auf Ω wird, von O aus gesehen im Uhrzeigersinn, um φ gedreht und dann

²⁸⁾ (VPI_1I_2) ist Symbol für das Doppelverhältnis dieser vier Punkte.

9. Netzprojektion, kinematische Abbildung, Speerabbildung

längs einem Großkreis von \bar{N} nach E_5 durch P_5 verschoben ²⁹⁾).

Bei der Transformation 9.4 von P_5 nach P_3 , also der Drehung von Ω , dem Übergang zu Gegenpunkten und der Polarität an Ω bleibt φ gleich, ändert jedoch den Drehsinn. E_5 geht dabei in ein Element \bar{E}_3 durch P_3 über. Das Ursoma wird in ein Element E_1 durch N transformiert, das ungleichsinnig parallel ist zu E_0 auf Grund des in 9.3 festgesetzten Drehsinnes der Polarität.

9.5 \bar{E}_3 sei das Element, das aus dem Bildelement E_5 des Punktes P durch (N.5) gemäß 9.4 hervorgeht. \bar{E}_3 erhält man aus dem zum Ursoma der kinematischen Abbildung ungleichsinnig parallelen Element E_1 durch N , indem E_1 von O aus gesehen gegen den Uhrzeigersinn durch den Winkel φ gedreht und längs einem Großkreis durch P_3 verschoben wird (siehe Abb.22).

E_2 durch N sei das Ursoma der sphärischen Elementabbildung. Die Rechtsschiebung \overrightarrow{OP} , deren Bild die Drehung von E_2 in das Bildelement \bar{E}_3 von P ist, wird zerlegt in die Rechtsschiebungen $\overrightarrow{OP_u}$ und $\overrightarrow{P_u P}$. Dabei ist P_u der Fernpunkt der zur orientierten Geraden b linksparallelen orientierten Geraden b_p durch P .

Das Bild der Rechtsschiebung $\overrightarrow{OP_u}$ ist eine Umwendung von Ω um $[0, P_u]$, wodurch N in P_3 übergeht. Das zugehörige Linienelement erhält man, wenn man das zu E_2 ungleichsinnig parallele Element durch N längs einem Großkreis nach P_3 verschiebt.

Die Rechtsschiebung $\overrightarrow{P_u P}$ bildet sich auf eine Drehung um die Bahngerade von O , also um die Rechtsparallele $[0, P_3]$ zu b_p ab. Die Bahngerade b_p von P schneidet die zwei zu Π parallelen Erzeugenden i_1 und i_2 . Die elliptische Länge der Schiebstrecke ist daher vom Doppelverhältnis der zu Π parallelen Ebenen durch P_u , P , sowie i_1 und i_2 abhängig. Sie ist somit dem Betrag nach gleich dem halben Drehwinkel $\varphi/2$ der kinematischen Abbildung.

b_p ist zu b linksparallel, ist daher wie b von oben nach unten orientiert. Rechtsparallel zu b_p ist die im Sinn $\overrightarrow{OP_3}$ orientierte Gerade $[0, P_3]$. Die Rechtsschiebung $\overrightarrow{P_u P}$ hat unter Beachtung der Orientierung von b_p und des Winkels φ (Abb.22) die Länge $+\varphi/2$.

Die sphärische Elementabbildung hat folgende Eigenschaft (siehe etwa [40]):

9.6 Erfolgt auf einer orientierten Geraden g eine Rechtsschiebung

²⁹⁾ Diese Schiebung ist eine Drehung von Ω mit dem Großkreis durch N und P_5 als Bahnkurve.

9. Netzprojektion, kinematische Abbildung, Speerabbildung

mit der im positiven Sinn gemessenen elliptischen Länge $\varphi/2$, so bildet sie sich durch die sphärische Elementabbildung ab auf eine Drehung durch den Winkel φ um die zu g rechtsparallele orientierte Gerade g_r durch O . Dabei ergibt der Drehsinn von φ mit der Orientierung von g_r eine Linksschraubung.

Also bildet sich die Rechtsschiebung $\overrightarrow{P_u P}$ ab auf eine Drehung um $[O, P_3]$ durch den Winkel φ , die von innen in P_3 gegen den Uhrzeigersinn erfolgt.

9.7 Das dem Punkt P in der Abbildung (N.3) entsprechende Linien-element E_3 ergibt sich aus dem zum Grundelement E_2 ungleichsinnig parallelen Element in N durch Verschiebung längs einem Großkreis nach P_3 und eine Drehung um P_3 durch den Winkel φ , die von innen gegen den Uhrzeigersinn erfolgt.

Verschiebung längs Großkreis und Drehung um P_3 sind vertauschbar. Ein Vergleich mit 9.5 zeigt: Fordert man zusätzlich e) die Ursomen der kinematischen Elementabbildung und der sphärischen Elementabbildung seien gleichsinnig parallel, so sind bei Erfüllung der Bedingungen a....e) die Bilder E_5 der Abbildung (N.5) nach Drehung, Spiegelung an O und Polarität mit den Bildern E_3 durch (N.3) identisch.

Satz 6: Voraussetzungen: (I) Die kinematische Elementabbildung nach Π habe das Ursoma E_0 durch den Punkt O . Das absolute Gebilde der zugehörigen quasielliptischen Geometrie liege in den Ebenen $\pm ki$ bzgl. Π .

(II) Die nullteilige Kugel \mathcal{K} als absolutes Gebilde der sphärischen Elementabbildung habe den Mittelpunkt O und den Radius ki . Das Ursoma E_2 durch den Punkt N unter Π liege auf der Kugel Ω mit dem Radius $2k$ und der Mitte O ; die Tangentialebene in N sei parallel zu Π ; E_2 sei zu E_0 gleichsinnig parallel.

Die sphärische Elementabbildung (II), also die ne.GKT (N.3) STRUBECKERS ist mit der Zusammensetzung aus

- 1) der kinematischen Elementabbildung (I) nach Π ,
- 2) der stereographischen Projektion von Π nach Ω aus N ,
- 3) der Polarität an Ω , von innen als Drehung um 90° gegen den Uhrzeigersinn definiert,

9. Netzprojektion, kinematische Abbildung, Speerabbildung

also der ne.GKT (N.5), mit

- 4) einer Drehung von Ω um den zu Π normalen Durchmesser um 90° , von oben gesehen gegen den Uhrzeigersinn, und
- 5) mit dem Übergang zu Gegenpunkten auf Ω identisch.

Führt man die Polarität nicht durch, so müßte das Ursoma E_2 gegenüber E_0 um 90° , von oben gesehen gegen den Uhrzeigersinn, gedreht sein.

10. Transformationsmöglichkeiten des Typs b)
=====

Die im § 5 unter b) genannte zweite Möglichkeit der Verallgemeinerung der MÜLLERSchen GKT besteht darin, diese aus der Abbildung von Ebenenbündeln oder Punktfeldern des Linienraumes auf die entsprechenden Gebilde im Kugelraum zusammensetzen:

(I) Nichteuklidischer Fall: Die ne.GKT zwischen Punkten aus L_3 und Tangenten der absoluten Fläche Ω in K_3 ist nach 2.1 zweieindeutig. Mit den Punkten einer allgemeinen Ebene τ werden zugleich jene der bzgl. \mathfrak{J} involutorischen Ebene $\bar{\tau}$ abgebildet. Die Schnittgerade $(\tau, \bar{\tau}) = o$ geht durch \mathfrak{J} in sich über. Auf ihr bilden durch \mathfrak{J} zugeordnete Punkte eine Involution mit den Punkten P und Q auf den Achsen p, q der windschiefen Involution als Doppelpunkten. Die Punktepaare von τ und $\bar{\tau}$ können zugleich als Punktepaare auf durch \mathfrak{J} zugeordneten HauptgewindestrahلبüscheIn aufgefaßt werden; daher entsprechen ihnen Tangenten, die eine feste Tangente t von Ω schneiden. Enthielte τ die Gerade p oder q, so wäre t eine Erzeugende von Ω . Für diesen Fall geben SCHRÖDER [25] und BRACH [7] die ne.GKT (N.2) an. Dieser Fall wird ausgeschlossen.

Die Zuordnung zwischen Punkten A aus τ und den t schneidenden Tangenten a durch eine ne.GKT ist i.allg. eineindeutig. Nur für Punkte auf o ist die Beziehung zweieindeutig. Andererseits geht durch einen Punkt A_o auf Ω , der nicht in der Tangentialebene ω durch t liegt, genau eine t schneidende Tangente.

10.1 Um eine i.allg. eineindeutige Abbildung von Punkten A aus τ auf die t schneidenden Tangenten a von Ω zu erhalten, kann man A stereographisch aus dem Berührungspunkt O von t nach Ω in den Punkt A_o projizieren. A_o sei der Berührungspunkt der zugeordneten Tangente a.

Zu beachten ist dabei:

- a) o muß die singuläre Gerade der stereographischen Projektion sein. Also ist o die Schnittgerade der Tangentialebene ω mit τ .
- b) Den Spurpunkten P und Q von p und q in τ müssen nach 2.2 die t schneidenden Erzeugenden e und f auf Ω entsprechen.

Es zeigt sich nun, daß bei Erfüllung der Bedingungen a) und b) die Abbildung für Punkte von o tatsächlich zweieindeutig ist:

10. Transformationsmöglichkeiten des Typs b)

g sei eine von o verschiedene Gerade aus τ durch den Punkt C auf o . Stereographische Projektion von g ergibt einen Kegelschnitt g_o auf Ω durch O . Die längs g_o Ω berührenden und t schneidenden Geraden bilden eine Erzeugendenschar einer Fläche γ 2. Ordnung. Aus Stetigkeitsgründen ist die Erzeugende c dieser Schar durch O dem Punkt C nach 10.1 zuzuordnen, falls sie von der Wahl von g unabhängig ist.

Ω und γ berühren einander längs g_o , haben daher zur Ebene g_o denselben Pol. Zur Tangente c_1 an g_o in O ist bzgl. Ω und γ dieselbe Tangente c_2 konjugiert. Die Erzeugenden e und f von Ω durch O sind die Doppelgeraden der Involution der bzgl. Ω konjugierten Tangenten. Also ist der Spurpunkt \bar{C} der konjugierten Tangente c_2 zum Spurpunkt C der Tangente c_1 harmonisch bzgl. der Spurpunkte E und F von e und f . Andererseits müssen t und die zweite Erzeugende c von γ durch O bzgl. c_1 und c_2 harmonisch liegen.

10.2 Bild des bzgl. E und F harmonischen Punktepaars C, \bar{C} auf o ist die Tangente c in O mit jenem Punkt auf o als Spurpunkt, welcher zum Spurpunkt T von t bzgl. C und \bar{C} harmonisch ist. c ist somit von g unabhängig.

Die Abbildung 10.1 von Punkten aus τ auf die t schneidenden Tangenten ist also für Punkte von o zweieindeutig. Den Punkten E und F entsprechen nach 10.2 die inzidenten Erzeugenden e und f . Um die Bedingung b) zu erfüllen, müssen P und Q mit E und F identisch gewählt werden.

Durch einen allgemeinen Punkt B aus K_3 gehen zwei t schneidende Tangenten. Diese sind die Schnittgeraden des Tangentialkegels aus B mit der Ebene $[B, t]$. Die stereographischen Bilder B_1, B_2 der Berührungspunkte ergeben ein ungeordnetes Punktepaar auf einer Geraden durch T . Die dazu involutorisch gelegenen Punkte in $\bar{\tau}$ seien \bar{B}_1, \bar{B}_2 . Sie liegen auf einer Geraden durch \bar{T} , dem zu T bzgl. $E, F = P, Q$ harmonisch gelegenen Punkt auf o . Nun sind B die Geraden $b = [B_1, \bar{B}_2]$ und $\bar{b} = [\bar{B}_1, B_2]$ zuzuordnen. b und \bar{b} sind involutorisch bzgl. \mathcal{U} und Geraden eines Strahlengewindes \mathcal{L}_γ . Dieses wird durch die Büschel T und \bar{T} in den Ebenen τ und $\bar{\tau}$ nach SYLVESTER erzeugt.

Punkten von Ω entsprechen über zusammenfallende Punkte in τ die Treffgeraden an p und q . Punkten der Tangentialebene ω in O sind nach singulärer Abbildung auf Punktepaare auf o aus Stetigkeitsgründen die Treffgewindestrahlen von o zuzuordnen. Die Bezie-

10. Transformationsmöglichkeiten des Typs b)

hung zwischen Punkten aus K_3 und Gewindestrahlen aus L_3 ist ein-
zweideutig, daher nach Satz 4 eine ne.GKT.

(N.8): Voraussetzungen: a) In K_3 sei eine Tangente an eine reguläre
Fläche Ω 2. Ordnung im Punkt O . Die Tangentialebene in O
schneide eine allgemeine Ebene τ längs der Geraden o . E, F
in τ seien die Spurpunkte der Erzeugenden von Ω durch O .
b) Die Ebene τ sei Bildebene eines allgemeinsten Zweispur-
rensystems in L_3 und zugleich erste Spurebene. Die zweite
Spurebene $\bar{\tau}$ sei ihr durch eine windschiefe Involution \mathfrak{J} mit
den Achsen p und q , also allgemein kollinear zugeordnet. Da-
bei sei $(\tau, \bar{\tau}) = o$, $(o, p) = E$, $(o, q) = F$.

- 1) Aus Punkten B aus K_3 legt man die zwei t schneidenden Tan-
genten an Ω und projiziert deren Berührungspunkte aus O nach τ .
- 2) Das so erhaltene ungeordnete Punktepaar in τ kann als
Bild zweier Geraden b und \bar{b} im obigen allgemeinsten Zwei-
spurensystem aufgefaßt werden.

Die Zuordnung zwischen B aus K_3 und b und \bar{b} aus L_3 ist eine
ne.GKT.

Ein allgemeiner Punkt A aus L_3 gemeinsam mit dem involuto-
rischen \bar{A} bildet sich durch (N.8), als Ort inzidenter Gewindestrah-
len aufgefaßt, auf zwei Geraden a_1, a_2 in τ ab, die auf o ein bzgl.
 E und F harmonisches Punktepaar C, \bar{C} ausschneiden. Den Geraden $a_1,$
 a_2 entsprechen zwei Ω berührende Flächen α_1, α_2 2. Ordnung. Gemein-
same Geraden von α_1 und α_2 sind die Tangente t , die dem Punktepaar
 C, \bar{C} auf o nach 10.2 entsprechende Gerade c und die Tangente, die
dem Schnittpunkt (a_1, a_2) entspricht. Letzere berührt Ω im stereo-
graphischen Bild A_0 von (a_1, a_2) . (a_1, a_2) ist die Netzprojektion
des Punktes A durch p und q nach τ . Die vierte gemeinsame Erzeugen-
de a von α_1 und α_2 ist das Bild von A . Sie berührt Ω in A_0 und
schneidet die Tangente c . Daraus ergibt sich als Verallgemeinerung
von 10.1 folgende vereinfachte Zuordnung zwischen allgemeinen Tan-
genten a an Ω und Punktepaaren A, \bar{A} aus L_3 :

- 10.3
- 1) Die stereographische Projektion des Berührungspunktes von a
mit Ω nach τ ist zugleich die Netzprojektion von A, \bar{A} an
 p und q .
 - 2) Das dem Schnittpunkt mit der Tangentialebene ω in O nach
10.2 zugeordnete Punktepaar auf o ist zugleich Schnittpunkt
der Ebenen der Hauptgewindestrahlen durch A, \bar{A} mit o .

10. Transformationsmöglichkeiten des Typs b)

Bemerkung 10.10: Bildet man mit Hilfe dieser Abbildung die Punkte aus K_3 ab, so ist Punkt 2 der Abbildungsvorschrift 10.3 entbehrlich. Diese Konstruktion deckt sich mit (N.7).

Man könnte nun noch weiter zeigen, wie den aus Tangenten bestehenden Regelscharen die Punktepaare von Geradenpaaren in L_3 entsprechen ³⁰⁾. Beachtet man weiters, daß ein t schneidendes Erzeugendenpaar eine Ω berührende Regelschar γ eindeutig bestimmt, wenn man die zweite mögliche Regelschar durch t ausschließt, so läßt sich die Abbildungsvorschrift (N.8) allgemeiner formulieren:

(N.8') Voraussetzungen a), b) aus (N.8).

1) Ist γ eine Ω berührende Erzeugendenschar, also eine orientierte ne.Kugel, so werden die zwei Berührungspunkte der t schneidenden Erzeugenden von γ aus O nach τ zu G_1, G_2 projiziert.

2) Dieses ungeordnete Punktepaar kann als Bild zweier Geraden g, \bar{g} im allgemeinsten Zweispurensystem b) aufgefaßt werden.

(II) Euklidischer Fall: Den Punkten einer Ebene μ_1 aus L_3 entsprechen im Sonderfall, wo μ_1 die Achse u des Nebenkomplexes enthält, die Minimalgeraden eines Bündels. Diese Zuordnung führt auf die MÜLLERSche Abbildung. Den Punkten einer allgemeinen Ebene entsprechen nach 1.1 i.allg. eineindeutig die eine Minimalgerade m_1 außerhalb des absoluten Kegelschnittes schneidenden oder mit m_1 in gemeinsamer Minimalebene liegenden Minimalgeraden. Eine Beziehung dieser Art könnte man herstellen, wenn man durch Punkte von μ_1 die m_1 schneidenden Minimalgeraden aufsuchte. Dabei entsprächen jedoch den ∞^1 Minimalgeraden durch einen Punkt von m_1 nicht die Punkte einer Geraden in μ_1 .

Sind die Minimalgeraden C-Geraden bzgl. μ_1 , so kann man diese notwendige Bedingung erfüllen, wenn die Ebene μ_1 einer Inversion mit dem Spurpunkt M_1 von m_1 als Zentrum unterworfen wird. Einem Punkt P aus μ_1 ordnet man nun die m_1 schneidende C-Gerade durch den inversen Punkt P' zu. Dadurch entsprechen

1) allen Punkten einer Geraden durch M_1 parallele C-Geraden,

³⁰⁾ Speziell entsprechen Ebenen aus K_3 die Geraden des Nebenkomplexes \mathcal{N}_n . Dieser wird durch die "verschränkten" Strahlbüschel \bar{T} in τ^n , T in $\bar{\tau}$ erzeugt.

10. Transformationsmöglichkeiten des Typs b)

- 2) den Punkten der Ferngeraden von μ_1 die C-Geraden durch M_1 ,
- 3) dem Punkt M_1 singulär die in der Fernebene liegenden m_1 schneidenden Geraden.
- 4) Für Punkte der isotropen Geraden durch M_1 in μ_1 erhält man, Stetigkeit vorausgesetzt, folgende Abbildung: I, \bar{I} seien die absoluten Kreispunkte von μ_1 . Ein Punkt P von $[M_1, I]$ habe bzgl. des Inversionskreises die Polare p . p und die absolute Tangente in I bestimmen eine zu μ_1 normale Ebene. P entspricht nun die m_1 schneidende C-Gerade dieser Ebene.

Die analoge Abbildung kann nun für Punkte einer zweiten Ebene μ_2 und die m_2 schneidenden C-Geraden durchgeführt werden. Um Widerspruchsfreiheit zu erhalten, müssen den Punkten der Schnittgeraden s von μ_1 und μ_2 je die gleichen m_1 und m_2 schneidenden C-Geraden zugeordnet werden. Dabei zeigt sich, daß dies nur erreichbar ist, wenn μ_1 und μ_2 zusätzlich einer Kollineation unterworfen werden: Es sei die Ebene μ den Ebenen μ_1 und μ_2 je kollinear zugeordnet (eventuell $\mu = \mu_1$). Die Spurpunkte von m_1, m_2 in μ seien nun mit M_1, M_2 bezeichnet:

Alle Treff-C-Geraden von m_1 und m_2 liegen auf einer C-Kugel \mathcal{K}_{12} . Unterwirft man deren Spurkurve s_{12} in μ durch M_1 und M_2 den beiden Inversionen, so erhält man projektiv zugeordnete Geraden s^1 und s^2 . Werden μ_1 und μ_2 derart auf μ abgebildet, daß Punkten der Schnittgeraden $s = (\mu_1, \mu_2)$ Paare derselben Projektivität zwischen s^1 und s^2 entsprechen, so ist eine e.GKT hergestellt.

Beweis: Einem Punkt P aus K_3 entsprechen über die m_1 bzw. m_2 schneidenden C-Geraden zwei Bilder in μ , die als Spurpunkte eine Gerade festlegen. Die Punkte einer C-Geraden g bilden sich über eine Kugel \mathcal{K}_1 durch g und m_1 bzw. \mathcal{K}_2 durch g und m_2 auf zwei projektiv zugeordnete Geraden g^1, g^2 in μ ab. Dabei müssen als Bilder des endlichen Schnittpunktes (g, \mathcal{K}_{12}) die Schnittpunkte (g^1, s^1) und (g^2, s^2) einander in der Projektivität zwischen s^1, s^2 und auch g^1, g^2 entsprechen. Damit erhält man als Spurkurven in μ_1 bzw. μ_2 zwei einander auf s schneidende perspektive Geraden, die somit einen Punkt in L_3 festlegen. Nach Satz 2 ist die Transformation eine e.GKT.

Analog zu (N.8') läßt sich die Konstruktionsvorschrift verallgemeinern:

(E.10): Voraussetzungen: a) m_1, m_2 in K_3 seien zwei windschiefe oder einander schneidende C-Geraden bzgl. der Ebene μ .

10. Transformationsmöglichkeiten des Typs b)

Ihre Spurpunkte in μ seien M_1 bzw. M_2 . s_{12} sei die Spurkurve der C-Kugel durch m_1 und m_2 .

b) \mathfrak{I}_1 und \mathfrak{I}_2 seien zwei Inversionen mit Zentren M_1 bzw. M_2 . Invers zu s_{12} seien die projektiv zugeordneten Geraden s^1, s^2 .

c) μ sei zugleich Bildebene eines allgemeinsten Zweispurensystems in L_3 . Die zwei Spurebenen μ_1, μ_2 seien derart kollinear auf μ abgebildet, daß der Schnittgeraden $s = (\mu_1, \mu_2)$ das Geradenpaar s^1, s^2 in derselben projektiven Zuordnung wie in b) entspricht.

1) Eine Erzeugendenschar γ einer C-Kugel (auch C-Nullkugel oder Ebene) in K_3 wird durch die Spurpunkte der m_1 bzw. m_2 schneidenden Erzeugenden auf ein geordnetes Punktepaar G_1^1, G_2^1 in μ abgebildet.

2) G_1^1 wird der Inversion \mathfrak{I}_1 , G_2^1 der Inversion \mathfrak{I}_2 unterworfen.

3) Das entstehende Punktepaar G_1, G_2 ist als Bild einer Geraden g im allgemeinsten Zweispurensystem c) aufzufassen.

Die Beziehung zwischen γ aus K_3 und g aus L_3 ist eine e.GKT. Die Achse u des Nebenkomplexes aus L_3 ist durch das Punktepaar M_1, M_2 festgelegt.

Bemerkung 10.11: Gehen beide Inversionskreise durch einen gemeinsamen Punkt auf s_{12} , so sind s^1 und s^2 perspektiv aufeinander bezogen. Damit können als Transformationen von μ_1 bzw. μ_2 nach μ Projektionen aus verschiedenen Punkten O_1 bzw. O_2 verwendet werden.

Literaturverzeichnis

=====

- [1] H. BECK Die beiden Geraden-Kugel-Transformationen von S. Lie. SB.kgl.bayr. Akad.Wiss.math.phys.(1917), S 51-74.
- [2] H. BECK Der Fundamentalsatz der Lieschen Kugelgeometrie im nichteuklidischen Raum. Math.Ztschr.15(1922), S 159-167.
- [3] H. BECK Zur Lieschen Kugelgeometrie im nichteuklidischen Raum. Jber.Dtsch.Math.Ver.32(1923), S 132-147.
- [4] H. BECK Konstruktion der Lieschen Geraden-Kugel-Transformation. Mh.Math.Phys.39(1932), S 359-370.
- [5] W. BLASCHKE Kinematische Begründung von S.Lies Geraden-Kugel-Transformation. SB.bayr.Akad.Wiss.math.natw.1948, S 291-297.
- [6] W. BRACH Zur Liebmannschen Konstruktion der Geraden-Kugel-Transformation. JBer.Dtsch.Math.Ver.44 (1934), S 293-295.
- [7] W. BRACH Systematische Begründung der Lieschen Abbildung der komplexen Ebene und Ableitung der Geraden-Kugel-Transformation aus der Geometrie der komplexen Ebene. Diss.Bonn 1937.
- [8] L. ECKHART Über die Abbildungsmethoden der Darstellenden Geometrie. SB.Akad.Wiss.Wien 132(1923), S 177-192.
- [9] L. ECKHART Konstruktive Abbildungsmethoden. Wien 1926.
- [10] O. FREYTAG Die nichteuklidische Geraden-Kugel-Transformation als Ausschnitt einer Abbildung von F. Aschieri. Dtsch.Math.1(1936), S 499-500.
- [11] G. GEISE Zu Lies ursprünglicher Begründung der Geraden-Kugel-Transformation. Wiss.Ztschr.TH Dresden 9 (1959/60),4, S 897-901.
- [12] G. HAENZEL Die Geometrie der linearen Strahlkongruenz und ihre Geraden-Kugel-Transformation. Jber.Dtsch.Math.Ver.42(1933), S 75-84.
- [13] F. HOHENBERG Projektionen projektiver Räume. Mh.Math.61 (1957), S 54-66.
- [14] F. KLEIN Über Liniengeometrie und metrische Geometrie. Math.Ann.5(1872) = Ges.math.Abh.I, S 106-126.
- [15] F. KLEIN Vorlesungen über höhere Geometrie. Berlin 1926.
- [16] S. LIE Sur une transformation géométrique.(1870) = Ges.Abh.Bd.I, Abh.3.
- [17] S. LIE Über Komplexe, insbesondere Linien- und Kugelkomplexe mit Anwendung auf die Theorie partieller Differentialgleichungen. Math.Ann.5(1872), S 145-256 = Ges.Abh.Bd.II₁,Abh.1.

- [18] S.LIE-ENGEL Theorie der Transformationsgruppen III. Leipzig 1893, S 137-138.
- [19] S.LIE-SCHEFFERS Geometrie der Berührtransformationen I. Leipzig 1896, Kap.10, S 411-475.
- [20] S.LIE Liniengeometrie und Berührtransformationen. Ber.sächs.Akad.Wiss.49(1897), S 687-740 = Ges.Abh.Bd.II₂, Abh.15.
- [21] H.LIEBMANN Die Liesche Geraden-Kugel-Transformation und ihre Verallgemeinerungen. SB.kgl.bayr.Akad. Wiss.math.phys.(1915), S 189-198.
- [22] E.MÜLLER-KRUPPA Vorlesungen über Darstellende Geometrie, Bd.1, Die linearen Abbildungen. Leipzig u.Wien 1923.
- [23] E.MÜLLER-KRAMES Vorlesungen über Darstellende Geometrie, Bd.2, Die Zyklographie. Wien 1929.
- [24] F.REHBOCK Zur Abbildung des Punkt- und Ebenenraumes auf die Kinematik der hyperbolischen und elliptischen Ebene. Mh.Math.Phys.38(1931), S 257-274.
- [25] H.SCHRÖDER Darstellend geometrische Behandlung der nicht-euklidischen Geraden-Kugel-Transformation. Diss.Bonn 1937.
- [26] F.SCHUR Geometrische Untersuchungen über Strahlkomplexe ersten und zweiten Grades. Math.Ann.15(1879), S 432-464.
- [27] H.STÄHELIN Die charakteristischen Zahlen analytischer Kurven auf dem Kegel 2.Ordnung und ihre Studyschen Bildkurven. Math.Ann.93(1925), S 217-229.
- [28] K.STRUBECKER Zur nichteuklidischen Geraden-Kugel-Transformation. SB.Akad.Wiss.Wien Abt.IIa.139(1930), S 685-705.
- [29] K.STRUBECKER Die Geometrie sphärischer Kurvenscharen. Jber. Dtsch.Math.Ver.44(1934), S 184-198.
- [30] K.STRUBECKER Über die Lieschen Abbildungen der Linienelemente der Ebene auf Punkte des Raumes. Ein Beitrag zur Geometrie der Minimalebene. Mh.Math. Phys.42(1935), S 309-376.
- [31] K.STRUBECKER Die Geometrie des isotropen Raumes und einige ihrer Anwendungen. Jber.Dtsch.Math.Ver.48 (1939), S 236-257.
- [32] K.STRUBECKER Kinematik, Liesche Kreisgeometrie und Geraden-Kugel-Transformation. El.Math.8(1953), S 4-13.
- [33] K.STRUBECKER Beitrag zur kinematischen Abbildung. Mh.Math. 65(1961), S 366-390.
- [34] E.STUDY Über nichteuklidische und Liniengeometrie. Jber.Dtsch.Math.Ver.11(1902), S 313-342.
- [35] E.STUDY Vereinfachte Begründung von Lies Kugelgeometrie I. SB.preuss.Akad.Wiss.phys.math.(1926) S 360-380.
- [36] E.A.WEISS S.Lies erste Begründung der Geraden-Kugel-Transformation. Math.Ann.108(1933), S 621.

- [37] E.A.WEISS Einführung in die Liniengeometrie und Kinematik. Leipzig und Berlin 1935.
- [38] E.A.WEISS Die geschichtliche Entwicklung der Lehre von der Geraden-Kugel-Transformation. Dtsch.Math. 1(1936), S 23-37, 125-145, 275-290, 447-459, 544-560. Dtsch.Math.2(1937), S 171-188. Dtsch.Math.3(1938), S 11-35.
- [39] E.A.WEISS Die Eulersche Transformation. Mh.Math.Phys. 44(1936), S 326-342.
- [40] E.A.WEISS Die euklidische Geraden-Kugel-Transformation als Gegenstand der Punktgeometrie. Dtsch.Math. 2(1937), S 285-293.
- [41] E.A.WEISS Die orientierten Linienelemente einer Kugel als dreifach binäres Gebiet. Dtsch.Math.3 (1938), S 302-317.
- [42] E.A.WEISS S.Lies Abbildung der Linienelemente einer Ebene und die nichteuklidische Geraden-Kugel-Transformation. Mh.Math.Phys.46(1938), S 199-205.
- [43] E.A.WEISS Punktreihengeometrie. Leipzig u. Berlin 1939.

Abb. 1 - Abb. 5

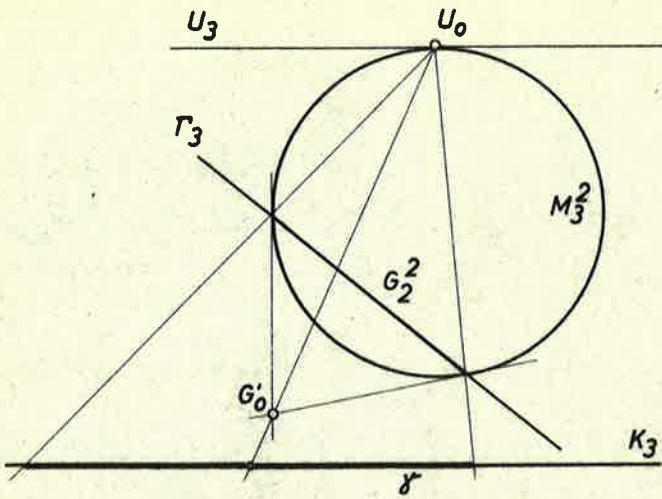


Abb. 1

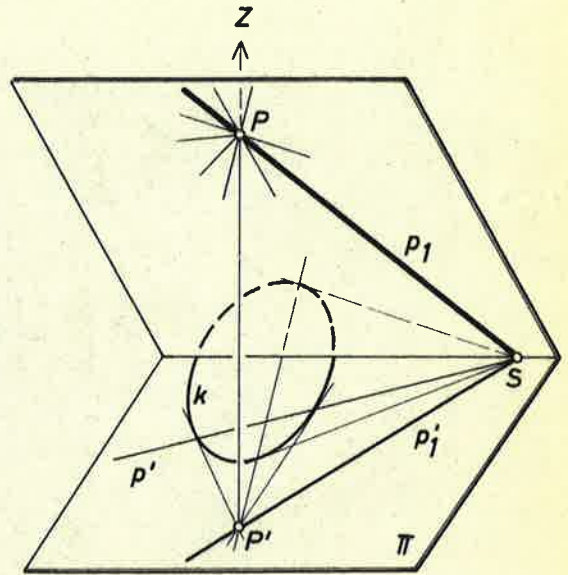


Abb. 2

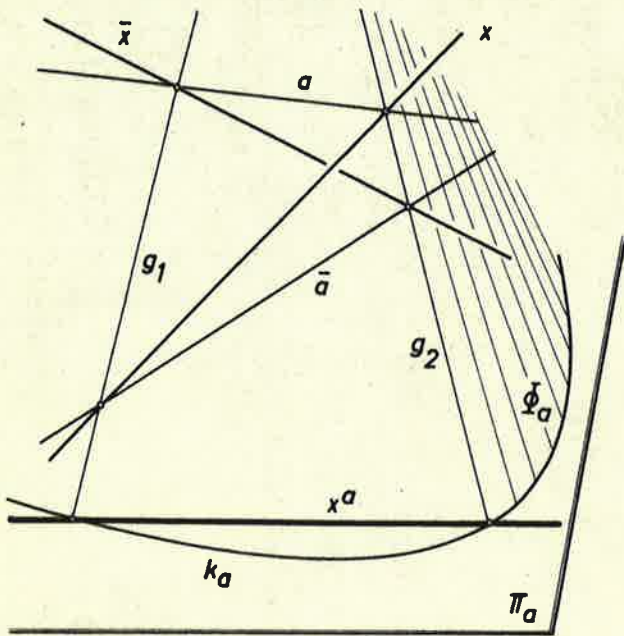


Abb. 4

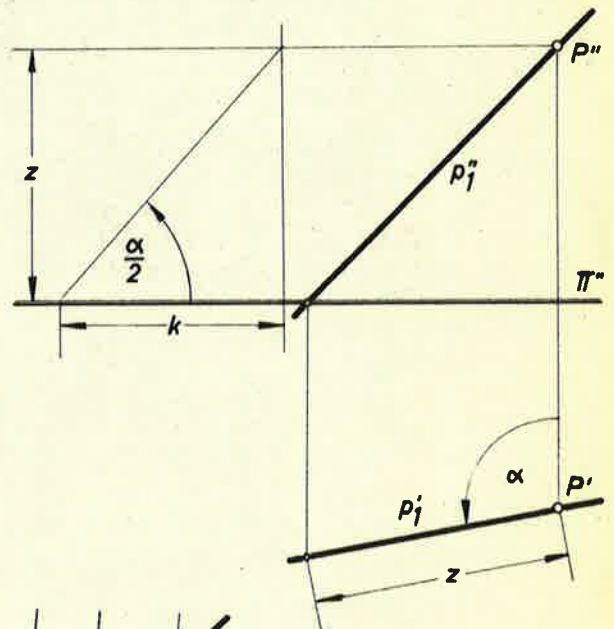


Abb. 3

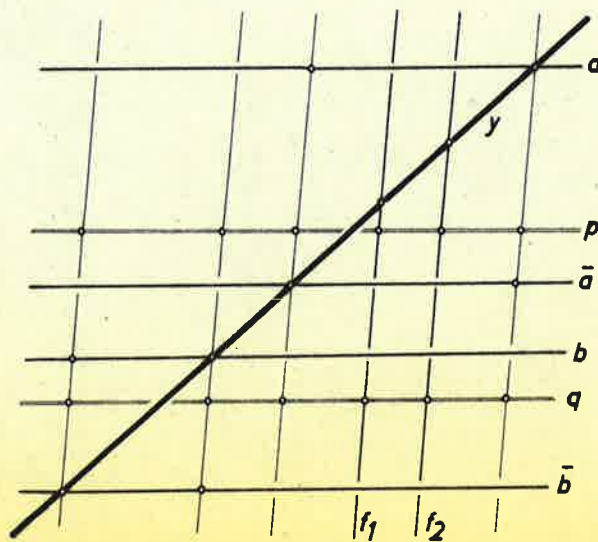


Abb. 5

Abb. 6-Abb. 11

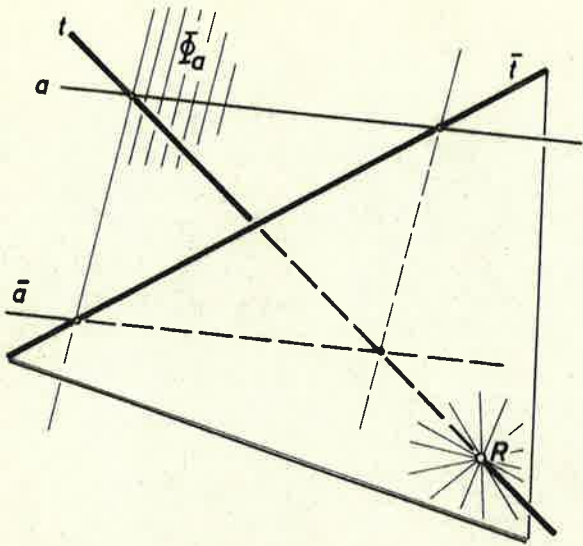


Abb. 6

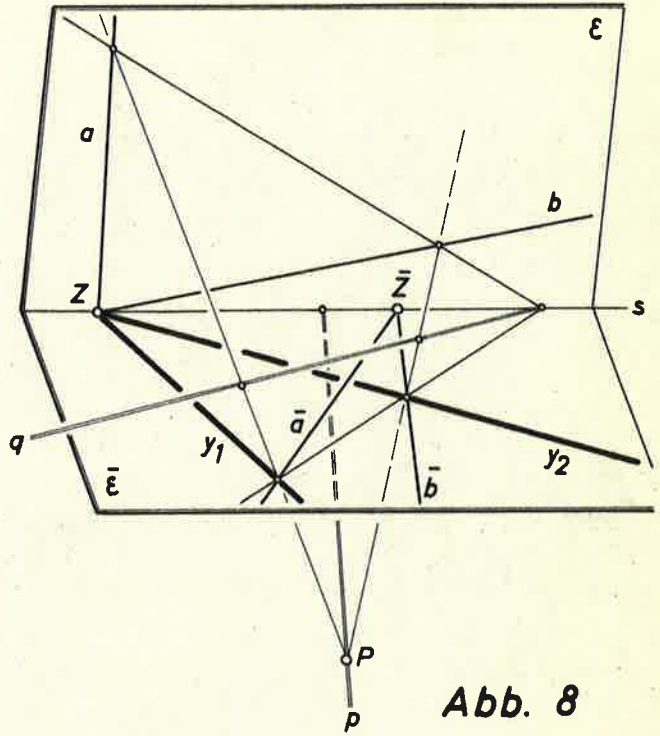


Abb. 8

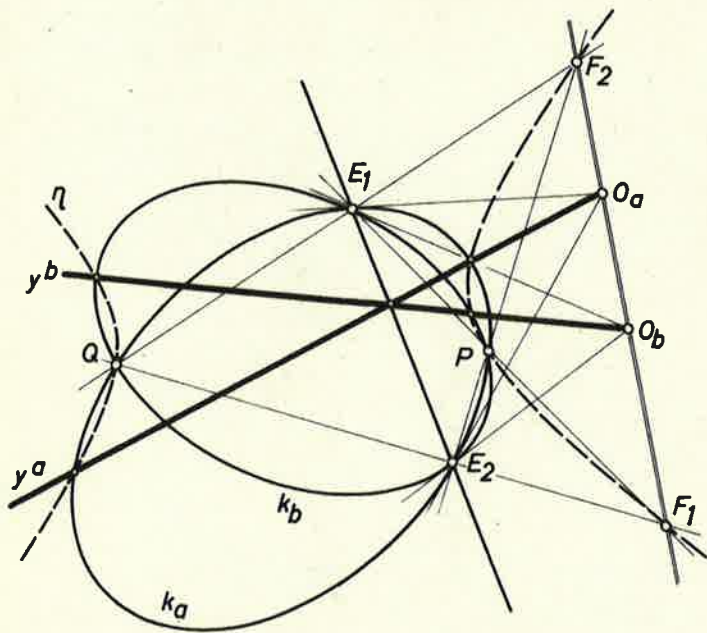


Abb. 7

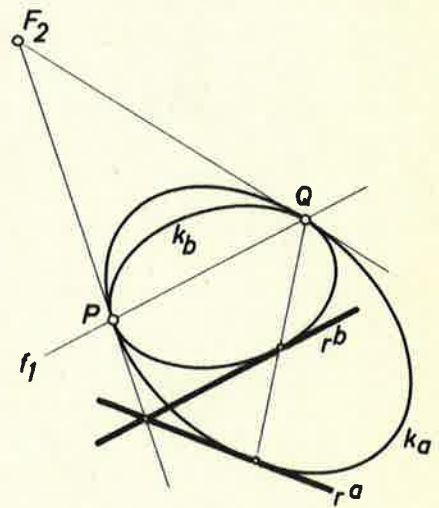


Abb. 9

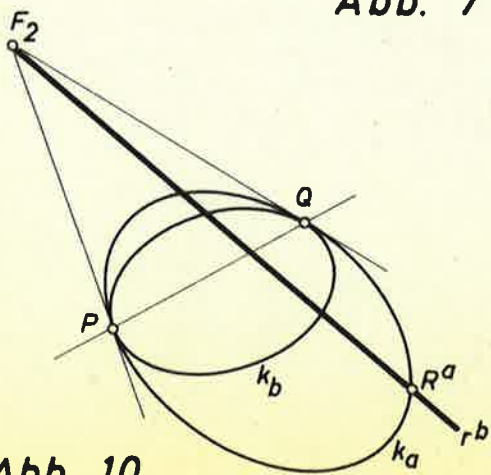


Abb. 10

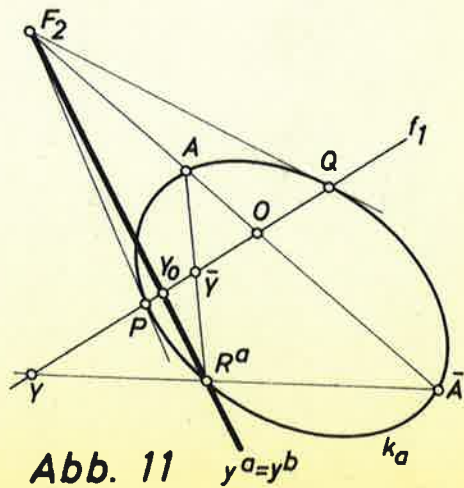


Abb. 11

Abb. 12 - Abb. 16

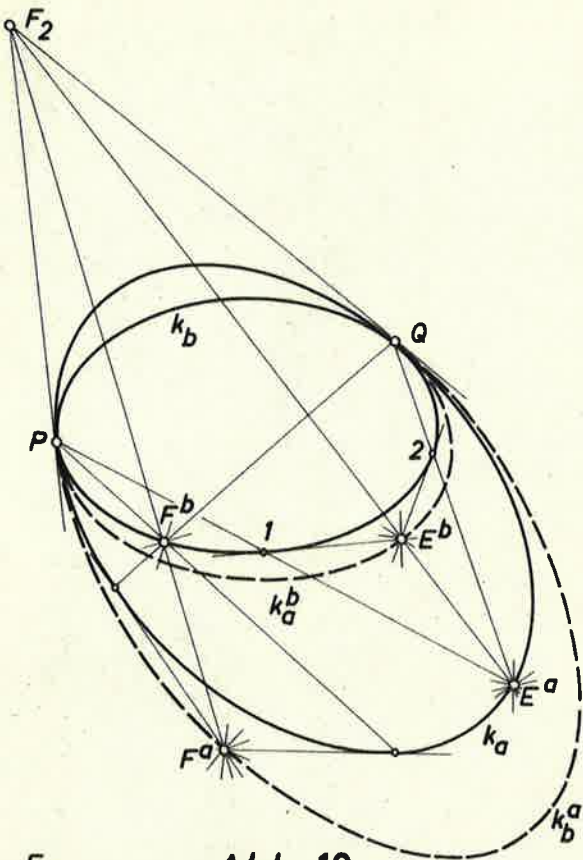


Abb. 12

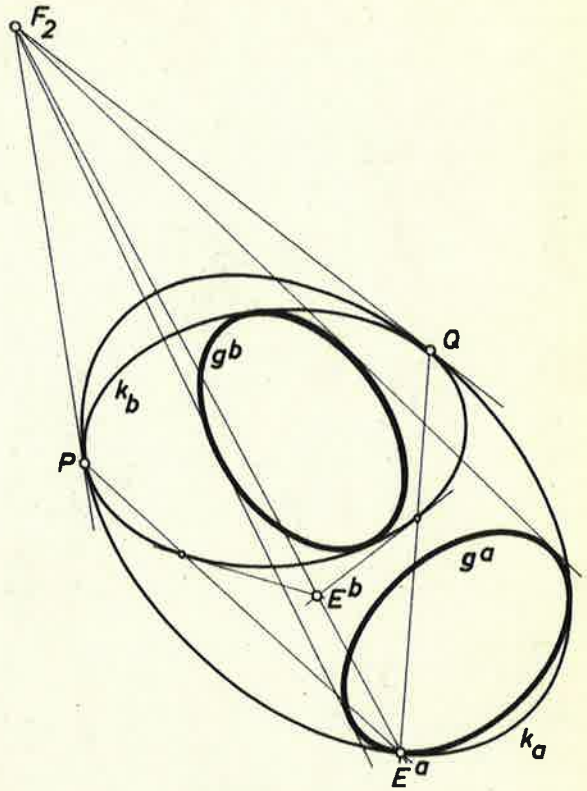


Abb. 13

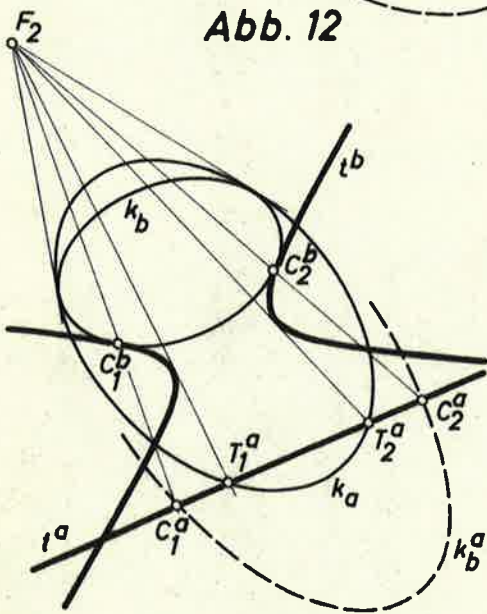


Abb. 14

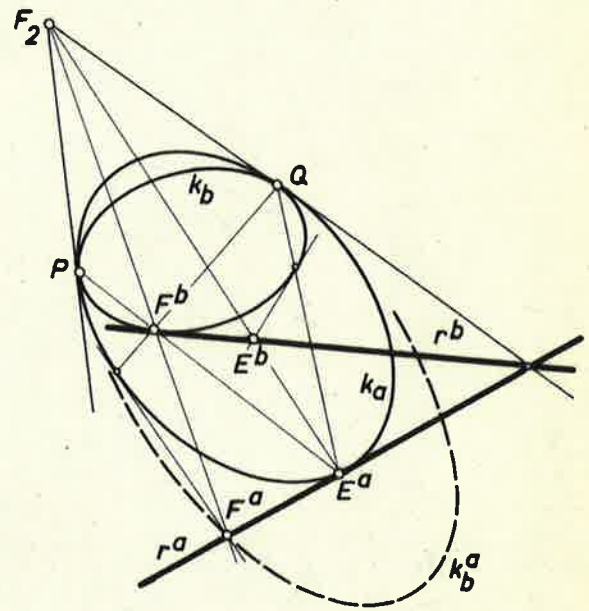


Abb. 16

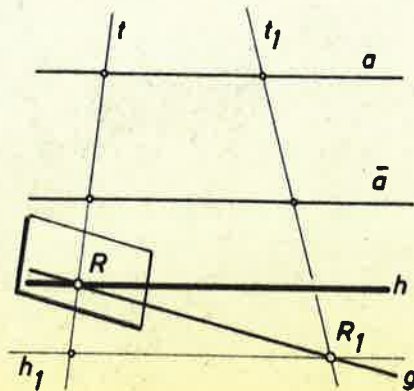


Abb. 15

Abb. 17 - Abb. 21

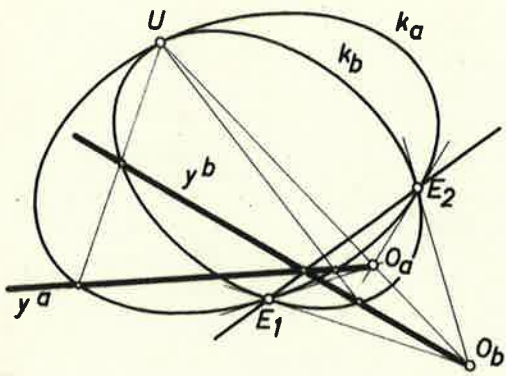


Abb. 17

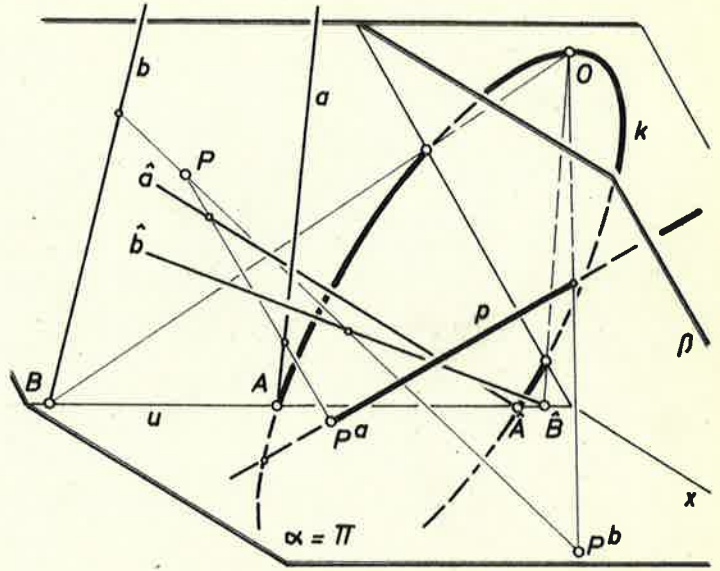


Abb. 19

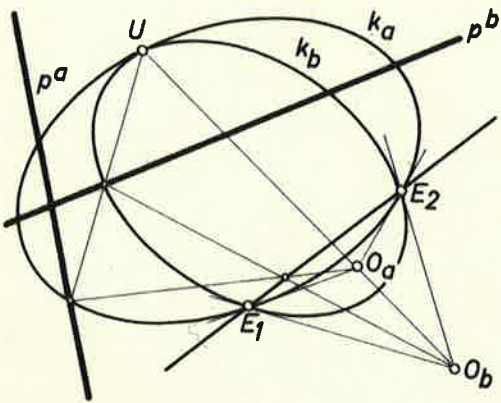


Abb. 18

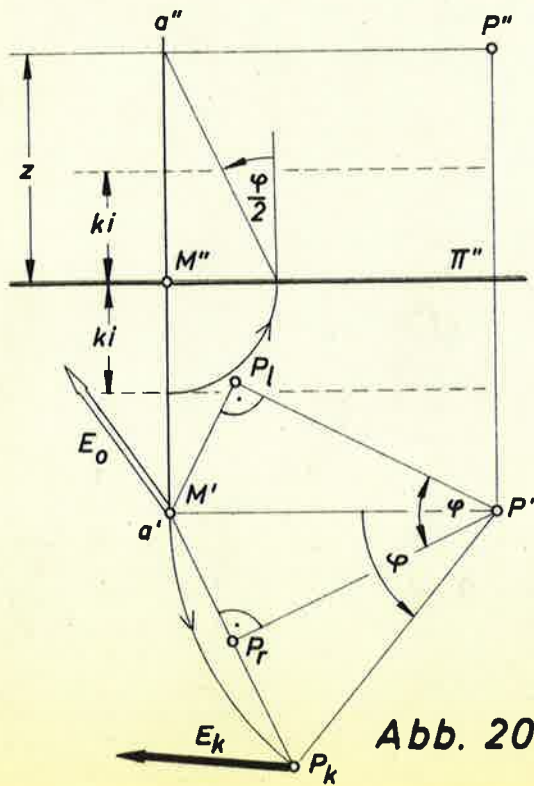


Abb. 20

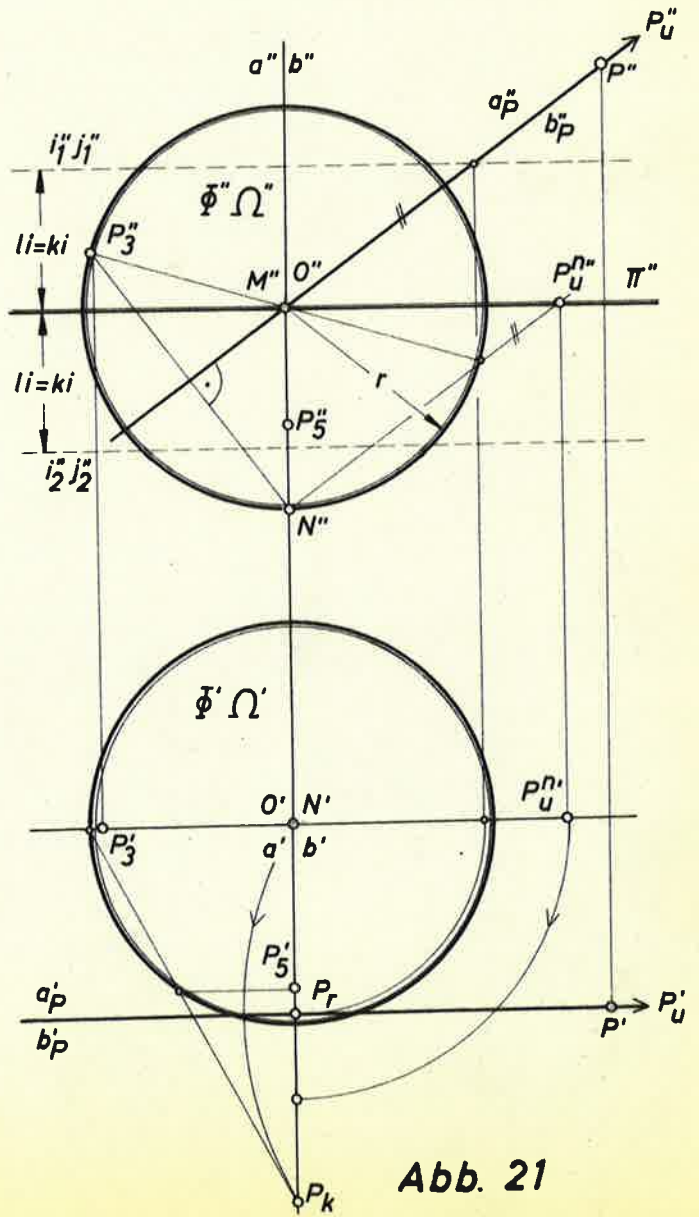
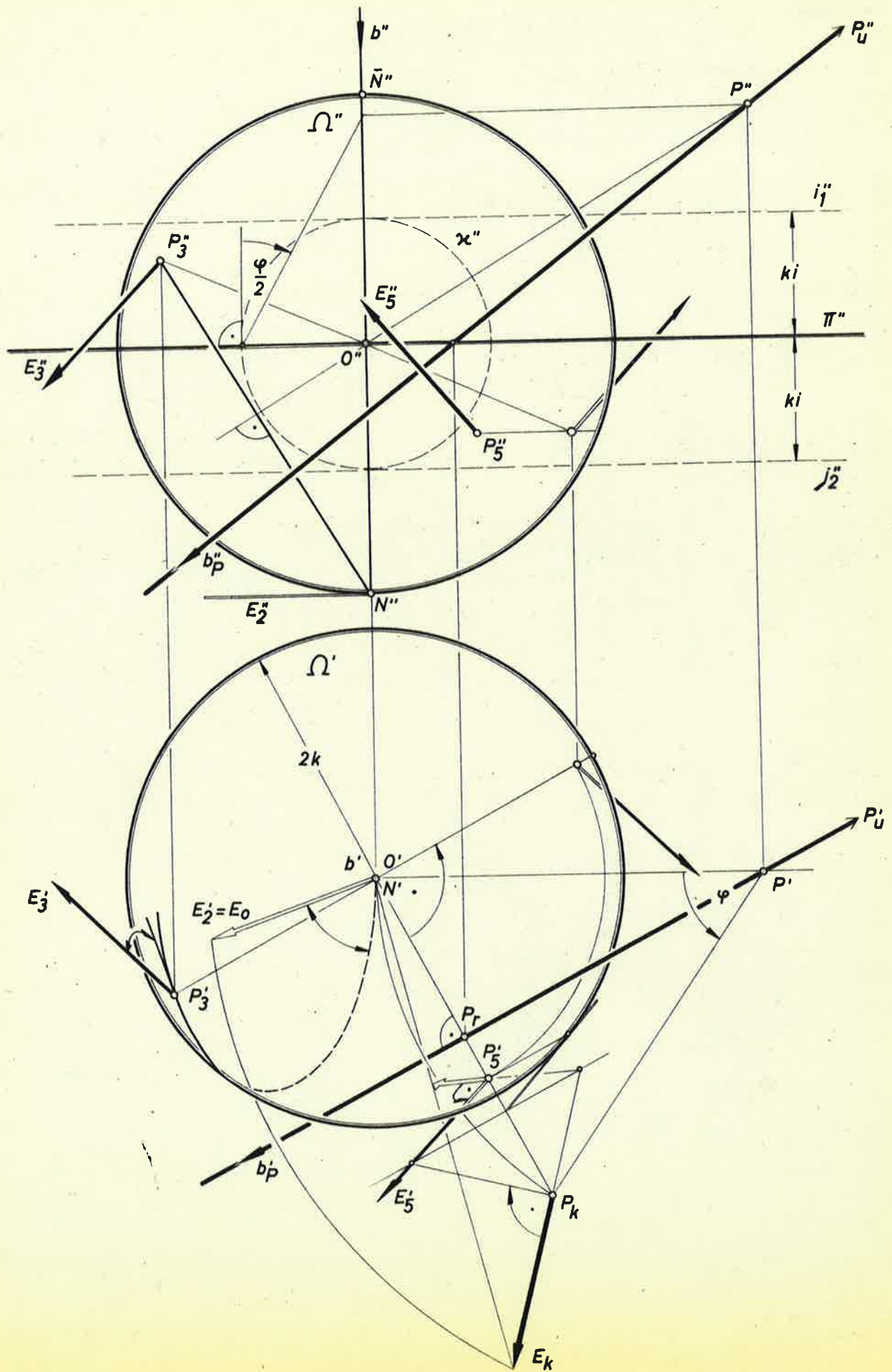


Abb. 21

Abb. 22



Z u s a m m e n f a s s u n g

Als LIEsche Geraden-Kugel-Transformationen werden jene Berührtransformationen bezeichnet, welche die Geraden des "Linienraumes" auf die orientierten euklidischen oder nichteuklidischen Kugeln des "Kugelraumes" abbilden. Dadurch sind die Liniengeometrie und die euklidische oder nichteuklidische Kugelgeometrie einander zugeordnet: Es entsprechen z.B. den dualistischen Transformationen im Linienraum, welche lineare Strahlkomplexe festlassen, die MÖBIUS- oder LAGUERREtransformationen. Bei der Transformation von Flächen gehen Schmiegestreifen in Krümmungsstreifen über. Regelflächen bilden sich auf Kanalflächen ab, speziell Flächen 2.Ordnung auf DUPINsche Zykliden.

Die vorliegende Arbeit befaßt sich mit der Frage, wie diese Transformationen durch Zusammensetzung von Abbildungsmethoden der Darstellenden Geometrie erzeugbar sind und welche Beziehungen zwischen den einzelnen Abbildungsmethoden sich daraus ergeben. Auf Grund dieser Aufgabenstellung wird eine synthetische Behandlung vorgezogen. (Analytische Darstellungen der Geraden-Kugel-Transformationen findet man z.B. in Arbeiten von H.BECK oder E.A.WEISS). Ausgangspunkt sind die folgenden, im euklidischen Fall auch ausführlich begründeten Definitionen der Geraden-Kugel-Transformationen:

Eine euklidische Geraden-Kugel-Transformation wird erzeugt, wenn Geraden eines Strahlgewindes i.allg. eineindeutig auf Punkte des Kugelraumes abgebildet werden, wobei den Gewindestrahlen durch einen Punkt die Punkte einer Geraden entsprechen und diese Geraden die Treffgeraden eines Kegelschnittes sind. Diese werden als Minimalgeraden bezeichnet; der euklidische Kugelraum ist also komplexprojektiv verallgemeinert. Diese Art der Beziehung zwischen Strahlgewinde und Minimalgeradenkomplex wird nach LIE "L-polar" genannt.

Im § 4 wird synthetisch gezeigt, daß eine eineindeutige L-polare Abbildung eines Strahlgewindes immer auf den Treffgeradenkomplex eines Kegelschnittes führt und umgekehrt. Dieser Satz in etwas anderer Formulierung ist von LIE mit Hilfe der Theorie partieller Differentialgleichungen bewiesen worden.

Eine nichteuklidische Geraden-Kugel-Transformation entsteht aus einer zweieindeutigen L-polaren Beziehung zwischen den Geraden eines Strahlgewindes und dem Tangentenkomplex einer regulären Fläche 2.Ordnung, also dem Komplex der isotropen Geraden einer elliptischen oder hyperbolischen Raumgeometrie. Je zwei Geraden des Linienraumes, die einander in einer windschiefen Involution entsprechen, bilden sich dabei auf denselben Punkt des Kugelraumes ab.

Auch für die nichteuklidische Geraden-Kugel-Transformation gelten Sätze, aus welchen hervorgeht, daß in der obigen Definition Voraussetzungen weggelassen werden können: Eine zweieindeutige L-polare Abbildung eines Strahlgewindes ergibt immer den Tangentenkomplex einer regulären Fläche 2.Ordnung und umgekehrt. Dieser Satz kann auch noch verschärft werden: Jede ausnahmslos zweieindeutige Abbildung der Geraden eines Strahlgewindes auf Punkte oder von Punkten auf Tangenten einer regulären Fläche 2.Ordnung ist eine nichteuklidische Geraden-Kugel-Transformation.

In den ersten beiden Paragraphen sind die wichtigsten der bisher bekannten Möglichkeiten, Geraden-Kugel-Transformationen aus bekannten Abbildungsmethoden zusammensetzen, gesammelt und besprochen. Beim Aufsuchen neuer Möglichkeiten wird folgendermaßen vorgegangen:

Man untersucht auf Grund der Eigenschaften der Geraden-Kugel-Transformationen, wie Ebenenbündel oder Punktfelder a) aus dem Kugelraum, b) aus dem Linienraum abgebildet werden. Nun wird versucht, diese Teilabbildungen aus Abbildungsmethoden der Darstellenden Geometrie zusammensetzen. Dies wird für zwei Punktfelder oder Ebenenbündel durchgeführt. Nun werden allgemeine Geraden abgebildet, indem man sie mit den Punktfeldern schneidet oder mit den Bündelträgern verbindet und die in den Teilabbildungen entsprechenden Gebilde aufsucht. Mit Hilfe der allgemeinen Sätze des § 4 läßt sich dann zeigen, unter welchen Bedingungen dadurch eine Geraden-Kugel-Transformation erzeugt wird.

Bei spezieller Wahl der Ebenenbündel oder Punktfelder ergibt sich aus a) und auch aus b) die LIEBMANNsche euklidische Geraden-Kugel-Transformation (E.3) bzw. dual die MÜLLERsche Abbildung (E.4) als Zusammensetzung eines Zweispurensystems mit einem

allgemeinen Zweibildersystem. Die neu gefundenen Abbildungsmöglichkeiten sind somit als Verallgemeinerungen der MÜLLERSchen Abbildung anzusehen.

Beispiele zum Typ a) sind die euklidische Geraden-Kugel-Transformation (E.6) und die nichteuklidische (N.6): Zwei nicht-parabolische Strahlnetze im Linienraum (im euklidischen Fall haben sie eine Netzachse gemein) werden durch die ECKHART-REHBOCK-Abbildung auf Geraden einer Ebene abgebildet. Da je eine Netzgerade durch einen vorgegebenen Raumpunkt geht, entspricht diesem ein Geradenpaar in der Bildebene. Dieses wird als Bild einer Geraden in einem allgemeinen Zweibildersystem aufgefaßt, wodurch sich unter bestimmten Bedingungen eine Geraden-Kugel-Transformation ergibt. (Zusätzlich wird in dieser Zusammensetzung aus den Eigenschaften der Teilabbildung abgeleitet, daß als Bildgeraden im Kugelraum tatsächlich isotrope Geraden erhalten werden).

Eine weitere Möglichkeit stellt die euklidische Geraden-Kugel-Transformation (E.7) dar, die sich aus zwei Netzprojektionen des Linienraumes und einem Zweispurensystem im Kugelraum zusammensetzt. Ähnlich dazu ist die nichteuklidische Transformation (N.7): Gewindestrahlen werden durch Netzprojektion auf Kegelschnitte einer Ebene abgebildet; diese werden durch geeignete stereographische Projektion auf eine Fläche 2.Ordnung projiziert und die sich ergebenden Kegelschnittsebenen polarisiert.

Ein Beispiel für eine Abbildung des Typs b) ist die nicht-euklidische Geraden-Kugel-Transformation (N.8): Aus dem Komplex der Tangenten an die absolute Fläche wird eine Tangente t herausgegriffen. Eine Tangentenschar, als orientierte nichteuklidische Kugel aufzufassen, enthält zwei t schneidende Erzeugende. Deren Berührungspunkte werden stereographisch in eine Ebene projiziert und als Bilder einer Geraden in einem Zweispurensystem des Linienraumes gedeutet. Die euklidische Transformation (E.8) zeichnet zwei Minimalgeraden m_1 und m_2 aus. Eine Schar von Minimalgeraden enthält zwei m_1 oder m_2 schneidende Geraden. Deren Spurpunkte in einer Ebene werden projektiven Inversionen unterworfen und dann ebenfalls als Bilder einer Geraden in einem Zweispurensystem aufgefaßt.

Neben der Auffindung neuer Zusammensetzungen werden in dieser Arbeit auch Querverbindungen zwischen einzelnen Abbildungen hergestellt. Bilden nämlich beispielsweise zwei euklidische oder zwei

nichteuklidische Geraden-Kugel-Transformationen Punkte des Kugelraumes auf Geraden im Linienraum ab, so besteht zwischen den Bildgeraden desselben Raumpunktes eine dualistische Transformation.

Die von mir als (N.5) bezeichnete Konstruktion einer nicht-euklidischen Geraden-Kugel-Transformation ergibt sich unmittelbar aus einer bekannten euklidischen Geraden-Kugel-Transformation (BLASCHKE, STRUBECKER): In der kinematischen Abbildung entsprechen Raumpunkten Drehungen in der Ebene. Unterwirft man ein festes orientiertes Linienelement diesen Drehungen, so führt dies auf eine eindeutige Abbildung der Raumpunkte auf orientierte Linienelemente der Ebene. Diese Abbildung wird von mir kurz "kinematische Elementabbildung" genannt. Dabei entsprechen den Geraden eines Gewindes Zykel. Stereographische Projektion dieser Zykel auf eine Kugel und Polarität ergibt (N.5). Die Kugelraumabbildung von (N.5) stimmt mit jener von (N.7) überein. Also muß eine Beziehung zwischen den beiden Linienraumabbildungen bestehen. Es zeigt sich, daß der Punkt des Bildelementes, welches einem Raumpunkt in der kinematischen Elementabbildung entspricht, zu einer Netzprojektion desselben Raumpunktes zentrisch ähnlich ist.

Eine weitere Beziehung ergibt sich aus der mit (N.3) bezeichneten Abbildung (STRUBECKER): Orientierten Raumgeraden entsprechen in der STUDY'schen Speerabbildung Punkte einer Kugel, den Geraden durch einen Punkt die Punktepaare einer Drehung. Ein festes orientiertes Linienelement dieser Kugel wird durch die Drehung zum Bildelement des Raumpunktes in dieser von mir "sphärische Elementabbildung" genannten Zuordnung. Dieses Bildelement bestimmt unmittelbar eine orientierte Tangente, wodurch die nichteuklidische Geraden-Kugel-Transformation (N.3) hergestellt ist. Die Ähnlichkeit der Bildelemente in dieser Abbildung mit jenen aus (N.5) läßt eine Beziehung zwischen (N.3) und (N.5) erwarten. Es zeigt sich, daß die sphärische Elementabbildung aus der kinematischen Elementabbildung, einer stereographischen Projektion und einer Bewegung der Kugel aufgebaut werden kann.

Eine dritte Querverbindung ergibt sich aus (E.1) und der MÜLLER-Abbildung (E.4): Man erhält die euklidische Geraden-Kugel-Transformation (E.1), indem man von Geraden eines Strahlengewindes in der durch PLÜCKER'sche Linienkoordinaten vermittelten Zuordnung auf Punkte der PLÜCKERquadrik übergeht und die entstehende Teil-

quadrik stereographisch auf den Kugelraum projiziert. Stellt man andererseits den Übergang vom Linienraum auf den Kugelraum durch (E.4) her, so muß als Zusammensetzung ein synthetischer Übergang von Geraden des Linienraumes auf Punkte der PLÜCKERquadrik herstellbar sein.

Es ergibt sich: Die Bilder von Raumgeraden in einem Zweispurensystem des Linienraumes werden als Bilder von Punkten eines vierdimensionalen Raumes in einem linearen Zweibildersystem mit zwei Geraden als Zentren aufgefaßt. Anschließende stereographische Projektion auf eine reguläre Quadrik eines fünfdimensionalen Raumes ergibt die eineindeutige Beziehung.

H. Stachel

Z u s a m m e n f a s s u n g

In meiner Dissertation "Die beiden Lieschen Geraden - Kugel - Transformationen in synthetischer Behandlung" werden die von Sophus Lie im Jahre 1870 entdeckten Berührtransformationen behandelt, durch welche die Geraden eines Raumes auf die orientierten euklidischen oder nichteuklidischen Kugeln eines zweiten Raumes abgebildet werden. Dabei geht es um die Frage, wie diese aus Abbildungsmethoden der Darstellenden Geometrie zusammensetzbar sind.

In den ersten beiden Abschnitten werden die wichtigsten der bisher bekannten Möglichkeiten angeführt, darunter die von E. Müller gefundene Herstellung einer euklidischen Geraden-Kugel-Transformation aus einer Zweispurenabbildung und einem allgemeinen linearen Zweibildersystem. Ferner werden am Beginn die im Laufe der Arbeit benötigten Eigenschaften der euklidischen und nichteuklidischen Geraden-Kugel-Transformationen zusammengestellt.

Die Geraden-Kugel-Transformationen sind aus speziellen (von mir "L-polar" genannten) Abbildungen zwischen Geradenkomplexen aufzubauen. Im § 4 wird gezeigt, daß aus den dafür bisher verwendeten Bedingungen einzelne weggelassen werden können. Dies wird beim Aufsuchen neuer Konstruktionsmöglichkeiten verwendet. So ergibt sich unter anderem: Die euklidische und die nichteuklidische Geraden-Kugel-Transformation sind aus Eckhart-Rehbock-Abbildungen zweier Strahlnetze und einem allgemeinen linearen Zweibildersystem zusammensetzbar. Die euklidische Geraden-Kugel-Transformation kann als Zusammensetzung von Netzprojektionen und einer Zweispurenabbildung hergestellt werden. Eine nichteuklidische Geraden-Kugel-Transformation ist erzeugbar, wenn man eine Netzprojektion und eine stereographische Projektion zusammensetzt.

Zusätzlich werden Querverbindungen zwischen einzelnen Konstruktionen hergestellt. Daraus ergibt sich im § 3 ein aus einem Zweispurensystem und Projektionen zusammengesetzter Übergang von Geraden eines Raumes auf Punkte einer regulären Quadrik eines fünfdimensionalen Raumes. Weitere Querverbindungen lassen Beziehungen zwischen kinematischer Abbildung und Netzprojektion, sowie zwischen einer Zusammensetzung aus kinematischer Abbildung und stereographischer Projektion und der Studyschen Speerabbildung vermuten. Dies wird im § 9 gezeigt.

Hellmuth Kachel