

H ü l l b a h n e n   v o n   T r o c h o i d e n  
b e i   T r o c h o i d e n b e w e g u n g e n

Mit 15 Abbildungen und 8 Tafeln

Als Habilitationsschrift  
an der Technischen Hochschule in Graz eingereicht von  
Hellmuth S t a c h e l

1 9 7 0

# Inhaltsverzeichnis

Einleitung . . . . .	1
<u>1. Kinematische Behandlung</u> . . . . .	6
1.1 Bestimmung der Hüllbahn . . . . .	6
1.2 Dreifache Erzeugung der Hüllbahn . . . . .	10
1.3 Reziproke Radienverhältnisse . . . . .	12
1.3.1 Allgemeines . . . . .	12
1.3.2 Bestimmung der Hüllpunkte der Kreise $q$ . . . . .	16
1.4 Trochoiden als Hüllbahnen . . . . .	18
1.5 Der Fall $R' = r$ , $R = r'$ . . . . .	23
<u>2. Netzprojektion quasielliptischer Schraub­schiebflächen</u> . . . . .	29
2.1 Kinematische Abbildung und Netzprojektion . . . . .	29
2.2 Quasielliptische Schraubung und ihre Abbildung . . . . .	31
2.2.1 Quasielliptische Schraubung . . . . .	31
2.2.2 Bild einer Rechtsschiebung in der $E^*$ -Abbildung . . . . .	32
2.2.3 Bild einer Geraden . . . . .	32
2.2.4 Bild einer Linksschiebung . . . . .	33
2.2.5 Bild einer Quasischraubung . . . . .	33
2.3 Schraub­schiebflächen . . . . .	35
2.4 Abbildung der Schraub­schiebflächen . . . . .	41
2.5 Regelschraubflächen und andere Sonderfälle . . . . .	45
2.5.1 Regelschraubflächen . . . . .	45
2.5.2 Schraubtorsen . . . . .	51
2.5.3 Wendelflächen . . . . .	51
2.5.4 Drehflächen . . . . .	52
<u>3. Allgemeine Eigenschaften der Hüllbahn</u> . . . . .	55
3.1 Anzahl der bewegten Trochoiden . . . . .	55
3.2 Anzahl der Symmetrieachsen . . . . .	56
3.3 Anzahl der Teilkurven . . . . .	56
3.4 Anzahl der Hüllpunkte . . . . .	62
Literatur . . . . .	68

Tafeln I bis VIII

EINLEITUNG

In der Gangebene  $E$  liege die Trochoide  $k_1$ ; sie sei erzeugbar als Punktbahn beim Abrollen eines Kreises  $p$  (Mitte  $M$ ; Radius  $r$ ) auf dem Kreis  $p'$  ( $M'$ ;  $r'$ )<sup>1)</sup>; der  $k_1$  beschreibende Punkt  $A$  habe von der Rollkreismitte  $M$  den Abstand  $h$  (kurz:  $k_1 = [r', r ; h]$ ). Nun soll der in  $E$  liegende und mit  $k_1$  konzentrische Kreis  $P$  ( $M'$ ;  $R$ ) auf dem Kreis  $P'$  ( $O$ ;  $R'$ ) der Rastebene  $E'$  abrollen (siehe Abb.1). Diese Bewegung von  $E$  gegenüber  $E'$  werde mit  $B_1$  bezeichnet (kurz:  $B_1 = [R', R]$ ). Ferner sollen sich die Polkreisradien bei der Erzeugung von  $k_1$

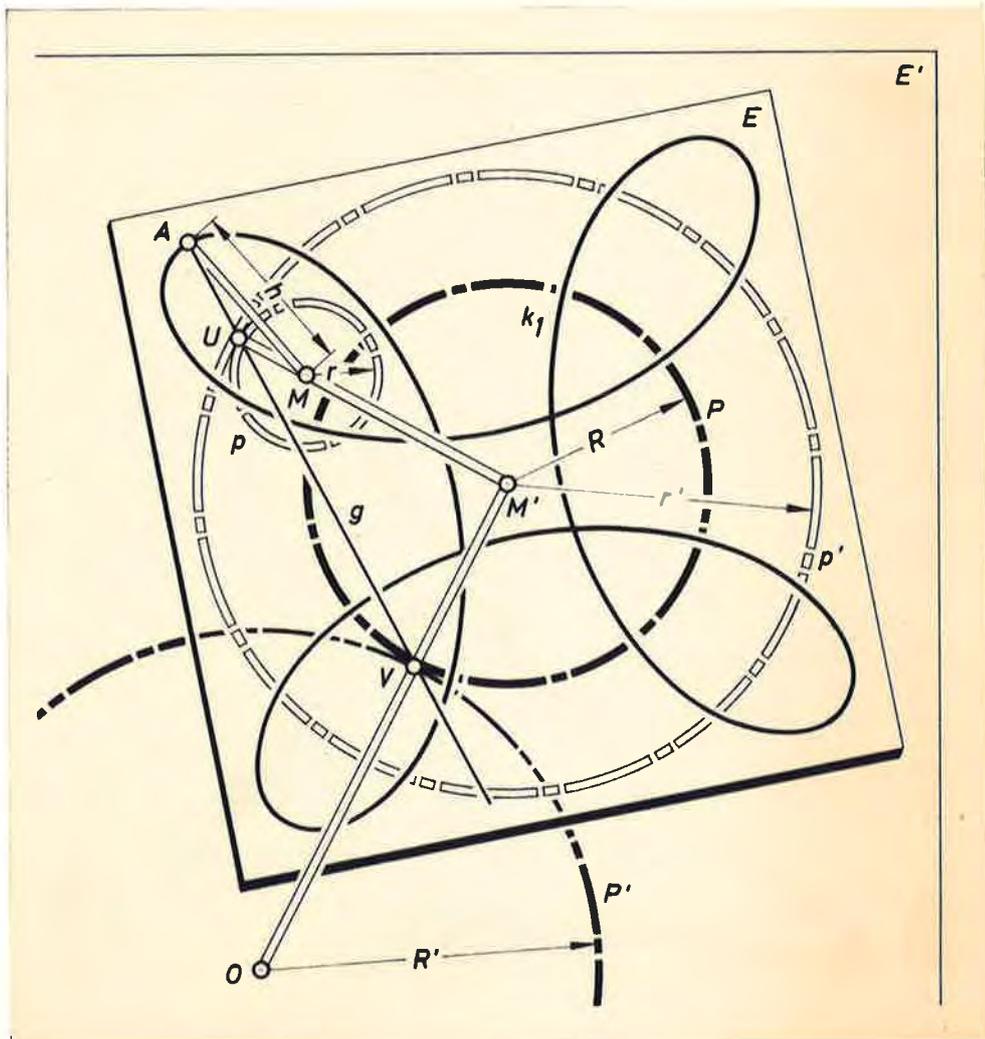


Abb. 1

<sup>1)</sup> Für die Vorzeichen der Polkreisradien wird wie üblich vereinbart: Wenn die Kreise auf derselben Seite der Polbahntangente liegen, sind die Vorzeichen gleich, ansonsten verschieden.



Einleitung

vorausgesetzt. Damit ist der feste Polkreis  $p'$  einer Erzeugung von  $k_1$  mit dem Rollkreis  $P$  der Bewegung  $B_1$  identisch und es spalten sich von der Hüllbahn  $e$  nach dem Verzahnungsprinzip von CAMUS [8] Trochoiden  $e_c$  ab, sogenannte CAMUS-Bahnen.

W. WUNDERLICH [37] zeigte 1959, daß die Resthüllbahn  $e_r$ , d.h. die Hüllbahn ohne CAMUS-Bahnen, bei nicht gespitzten bewegten Trochoiden  $k_1$  dann und nur dann eine gespitzte Trochoide ist, wenn  $N_0 : N_1 = (2n_0 - n_1) : n_0$ . Bei  $n_0 : n_1 = 2 : 1$  erhält man als Sonderfall ein von W. FRÉCHET

[9] bei Untersuchungen zur Dreiecksgeometrie im Jahr 1902 gefundenes Ergebnis, wonach sich eine Ellipse  $k_1$  in einer STEINERSchen Hypozykloide  $e_r$  unter ständiger Berührung umwenden läßt (siehe Abb.2b). J. HOSCHEK [13] konnte 1963 als Ergänzung zu [37] zeigen, daß immer  $\infty^1$  Trochoiden  $k_1$  bei geeigneten Bewegungen dieselbe gespitzte Trochoide einhüllen; unter diesen  $\infty^1$  bewegten Trochoiden ist immer auch eine gespitzte,

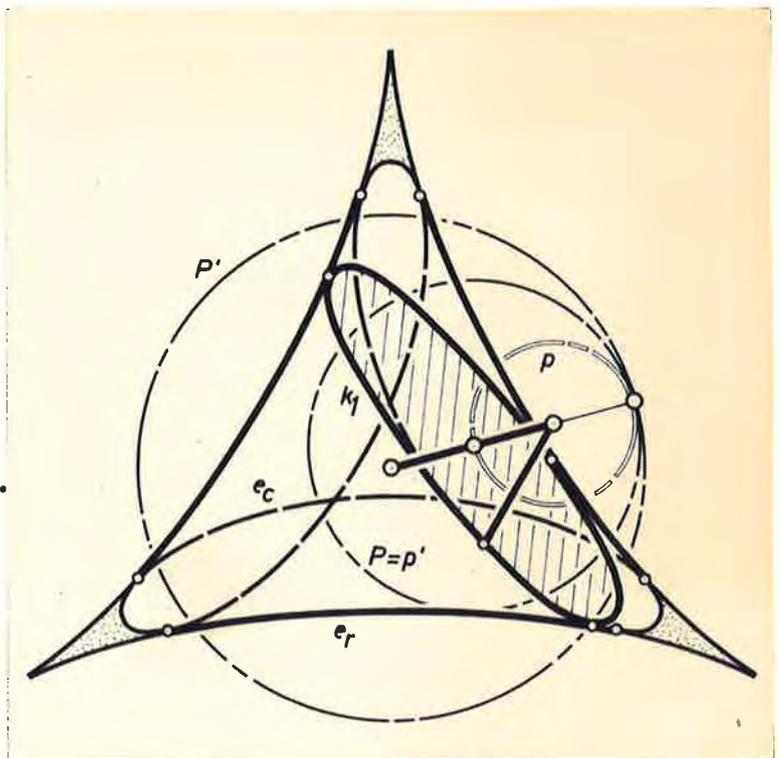


Abb. 2b

die dann mit der Resthüllbahn zusammen ein MORLEYSches Zyklidenpaar bildet. Das von WUNDERLICH gefundene Ergebnis stellt also eine direkte Verallgemeinerung der Untersuchungen von MORLEY dar.

Schließlich wies P. MEYER [16] im Jahr 1966 einen weiteren interessanten Sonderfall nach: Bei  $|R| = |r'|$  und  $N_0 : N_1 = (n_0 - n_1) : n_0$  ist die Resthüllbahn eine i.allg. nicht gespitzte Trochoide (siehe Tafel IV).

In jenen Fällen, wo bei  $|R| = |r'|$  die Radienverhältnisse keinen einschränkenden Bedingungen unterliegen, ist über die

## Einleitung

Hüllbahn  $e$  bisher nur wenig bekannt. WUNDERLICH schrieb in [37], daß "kompliziertere Resthüllen auftreten, die anscheinend keiner bekannten Kurvenfamilie angehören". Die Verallgemeinerung auf den Fall  $|R| \neq |r'|$  wurde erst 1968 von P. MEYER in [19] angedeutet.

In der vorliegenden Arbeit wird vom allgemeinsten Fall ausgegangen. Im ersten Abschnitt wird gezeigt, daß der Bewegung  $B_1$  von  $k_1$  ein zweigliedriger Bewegungsvorgang  $B_{II}$  so zugeordnet werden kann, daß die Hüllbahn  $e$  mit der Grenzlinie der  $\infty^2$  Lagen, die ein spezieller Punkt bei  $B_{II}$  annimmt, identisch ist. Daraus läßt sich ableiten, daß es i.allg. immer drei Fälle gibt, wo Trochoiden bei Trochoidenbewegungen dieselbe Bahn  $e$  einhüllen.

Ist das Radienverhältnis einer Erzeugung von  $k_1$  reziprok zu jenem von  $B_1$ , also  $n_0 : n_1 = N_1 : N_0$ , so ist  $e$  als Einhüllende von Kreisen einfach konstruierbar. Ist zusätzlich  $k_1$  gespitzt, so zerfällt diese Einhüllende in zwei Trochoiden. Es zeigt sich, daß damit alle in früheren Arbeiten genannten Sonderfälle mit Trochoiden als Hüllbahnen zusammengefaßt werden können.

Für den technisch wichtigen Sonderfall  $R = r'$ ,  $R' = r$ , wo natürlich auch reziproke Radienverhältnisse auftreten, hat bereits O. BAIER auf dem VII. Österreichischen Mathematikerkongreß (Linz, 1968) diese Konstruktion als Einhüllende doppelt berührender Kreise angegeben. In 1.5 wird bewiesen, daß die Hüllbahnen  $e$  dieser Fälle i.allg. in insgesamt acht verschiedenen Fällen auftreten. Dieses Ergebnis ist auch von praktischer Bedeutung, da aus jedem einzelnen Fall eine Fertigungsmöglichkeit von  $e$  ableitbar ist.

Im zweiten Abschnitt wird ein Teil dieser Ergebnisse mit Hilfe einer räumlichen Deutung abgeleitet: Unterwirft man eine euklidische Schraublinie mit der Achse  $a$  einer euklidischen Schraubung mit zu  $a$  paralleler Achse, so entsteht nach E. MÜLLER [21] eine Schiebfläche. Zu einem analogen Ergebnis kam W. WUNDERLICH [36] bei dem entsprechenden quasielliptischen Problem; wie im Euklidischen sind auch hier die Normalschnitte der "Schraubschiebflächen" Trochoiden. In der vorliegenden Ar-

## Einleitung

beit wird noch ein zweites Paar von Schiebkurvenscharen auf den quasielliptischen Schraub-schiebflächen nachgewiesen. Ferner wird mit Hilfe einer von R. BEREIS [2] gefundenen Beziehung zwischen einer quasielliptischen Parallelprojektion, also Netzprojektion, und der kinematischen Abbildung (nach W. BLASCHKE und J. GRÜNWALD) bewiesen: Bildet man diese Schraub-schiebflächen durch geeignete Netzprojektionen auf ihre Normalschnittebenen ab, so erhält man scheinbare Umrißkurven, welche zugleich Hüllbahnen von Trochoiden sind. Der mehrfachen Erzeugung der Schraub-schiebflächen entsprechen die i.allg. drei verschiedenen Fälle mit gleicher Hüllbahn. Die quasielliptischen Regelschraubflächen und Drehflächen führen auf jene Fälle, in welchen die Hüllbahn als Einhüllende von Kreisen konstruierbar ist. Aus der Abbildung der Schraubtorsen und Wendelflächen erhält man die bekannten Sonderfälle mit Trochoiden als Resthüllbahn.

Der tiefere Grund für diese Beziehung zwischen Schraub-schiebflächen und Trochoidenhüllbahnen liegt in der kinematischen Abbildung; diese ordnet nämlich den quasielliptischen Schraub-schiebflächen genau die zweigliedrigen Bewegungsvorgänge  $B_{II}$  des ersten Abschnittes zu.

Im dritten Abschnitt schließlich wird auf Anzahlprobleme eingegangen, die sich bei allgemeinen Trochoidenhüllbahnen ergeben. Es werden Formeln für die Anzahlen der Symmetrieachsen und der Kurvenzüge von  $e$  angegeben sowie die Anzahlen der Hüllpunkte der bewegten Trochoide und damit zusammenhängende Realitätsfragen behandelt.

Der Inhalt des ersten und dritten Abschnittes ist zum größten Teil in [29] veröffentlicht; der zweite Abschnitt deckt sich im wesentlichen mit [30]. Der Vollständigkeit halber sind teilweise auch Ergebnisse aus [28] und [31] aufgenommen worden.

## 1. KINEMATISCHE BEHANDLUNG

### 1.1 Bestimmung der Hüllbahn

Die Trochoide  $k_1$  werde der Bewegung  $B_1$  unterworfen. Ein Punkt  $A^0$  ist dann und nur dann ein Hüllpunkt von  $k_1$ , wenn in ihm die Normale an  $k_1$  mit der Bahnnormalen in  $B_1$  zusammenfällt oder eine der Normalen unbestimmt ist. Ein Hüllpunkt  $A^0$  liegt also mit dem zugehörigen Momentanpol  $U$  der Erzeugung von  $k_1$  und dem Momentanpol  $V$  der Bewegung  $B_1$  auf einer Geraden  $g$  (siehe Abb.1 oder Abb.3). Folgende Sonderfälle sind zu beachten:

I. Die Pole  $U$  und  $V$  fallen zusammen. Dies ist nur bei  $|R| = |r'|$  möglich, wenn also der Rastpolkreis der Erzeugung von  $k_1$  zugleich Rollkreis der Bewegung  $B_1$  ist. Die zugehörigen Lagen von  $A^0$  erfüllen eine Bahnkurve beim Abrollen von  $p$  auf  $P'$ . Dieser Bestandteil  $e_c$  der Hüllbahn  $e$  wird wegen des Zusammenhanges mit dem Verzahnungsprinzip von CAMUS<sup>2)</sup> CAMUS-Bahn genannt. Da  $k_1$  zugleich von mehreren Punkten beim Abrollen von  $p$  auf  $p'$  beschrieben wird, treten nach [37] mehrere kongruente CAMUS-Bahnen auf; nach [14] oder [28] ist bei den in (1) angegebenen Radienverhältnissen ihre Anzahl  $(n_1, N_0)$ ; dieses Ergebnis wird im 3. Abschnitt nochmals abgeleitet.

II.  $A^0$  fällt mit  $U$  zusammen. Dann ist  $A^0$  eine Spitze von  $k_1$ . Die Bahnen der Spitzen werden ebenfalls zur Hüllbahn gezählt.

Für die Resthüllkurve  $e_r$ , d.h. Hüllbahn ohne CAMUS-Bahnen oder Bahnen der Spitzen, läßt sich unmittelbar eine Fertigungsmöglichkeit angeben (siehe Abb.3):

<sup>2)</sup> Nach diesem Prinzip, das im wesentlichen auf CH. E. L. CAMUS [8] zurückgeht (vgl. auch [24], Satz 12 oder [12], Seite 285), erhält man zusammengehörige Hüllbahnen der Bewegung  $B_1$  auf folgende Weise: Eine in einer dritten Ebene  $E''$  feste "Hilfsrollkurve" (im obigen Fall  $p$ ) läßt man einmal auf dem Kreis  $P$  in der Gangebene  $E$ , einmal auf  $P'$  in der Rastebene  $E'$  abrollen. Die Bahnen eines Punktes aus  $E''$  in  $E$  und  $E'$  ergeben dann immer ein Hüllkurvenpaar.

1.1 Bestimmung der Hüllbahn

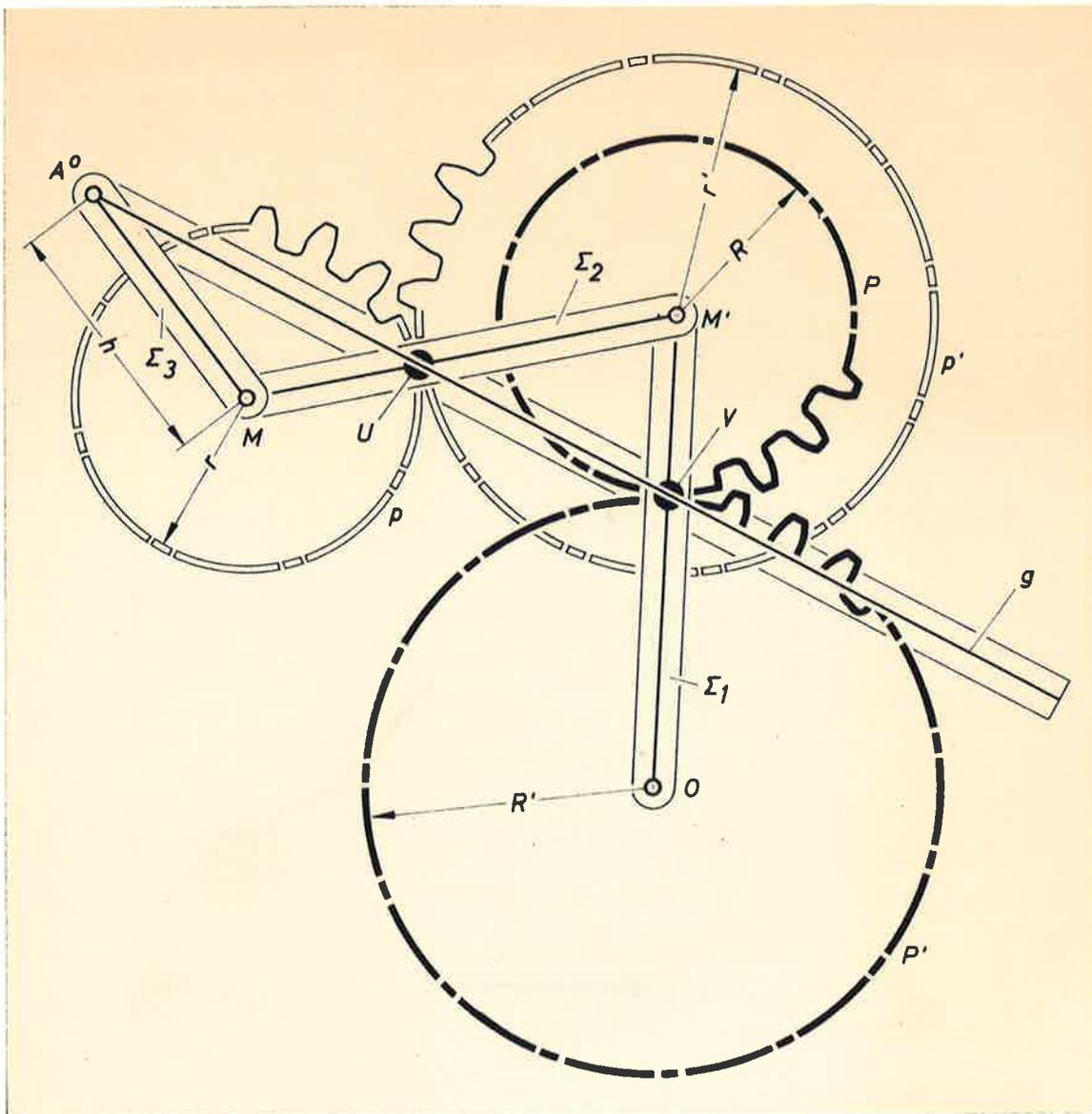


Abb. 3

Satz 1: Die Resthüllkurve  $e_p$  ist Bahnkurve des Punktes  $A^0$  bei folgendem Mechanismus: Der um  $O$  drehbare Arm  $\Sigma_1 = OM'$  erzwingt das Abrollen des Kreises  $P$  auf dem ruhenden Kreis  $P'$ . Mit  $P$  ist  $p'$  konzentrisch und starr verbunden. Mit Hilfe des Armes  $\Sigma_2 = M'M$  rollt auf  $p'$  der Kreis  $p$  ab, der mit dem Arm  $\Sigma_3 = MA^0$  starr verbunden ist. Eine Bindung zwischen den beiden Rollbewegungen wird durch die Normale  $g$  hergestellt:  $g$  wird in  $A^0$  auf  $\Sigma_3$  befestigt und gleitet durch die auf  $\Sigma_1$  bzw.  $\Sigma_2$  befestigten Wälzpunkte  $V$  bzw.  $U$  <sup>3)</sup>. (Wenn  $U$  mit  $V$

<sup>3)</sup> Dieser Mechanismus führt, wie in 3.3 gezeigt wird, bei stetigem Ablauf immer nur auf eine Teilkurve der Hüllbahn. Weitere Teilkurven erhält man erst, wenn man das Getriebe auseinanderlöst und in anderer Lage neu zusammenfügt.

### 1.1 Bestimmung der Hüllbahn

oder  $A^0$  zusammenfallen kann, so muß in solchen Lagen die Gerade  $g$  die Tangente in  $U$  an  $p'$  sein, um die Hüllbahnen nach I. und II. auszuschließen.)

Da  $k_1$  auf zwei Arten erzeugbar ist und die gleiche Hüllbahn, wie gezeigt werden wird, in mehreren Fällen auftritt, gibt es auch mehrere Möglichkeiten für eine solche (zumindest theoretische) Fertigung einer Trochoidenhüllbahn.

Bei einer konstruktiven Bestimmung der Hüllbahn  $e$  (siehe [1] oder [24]) geht man am besten von  $k_1$  in der Gangebene  $E$  aus. In einem Punkt  $A$  von  $k_1$  bestimmt man die Normale und schneidet sie mit dem Kreis  $P$ . Nun läßt man  $P$  unter Mitnahme von  $E$  solange auf  $P'$  abrollen, bis ein solcher Schnittpunkt Momentanpol wird. In dieser Bewegungslage ist dann  $A$  ein Hüllpunkt von  $k_1$ ;  $A$  deckt sich somit mit einem Punkt der in der Rastebene  $E'$  liegenden Hüllbahn. Es sei auch darauf hingewiesen, daß die Krümmungsmitten der Resthüllkurve einfach konstruierbar sind: entweder als Momentanpole der Bewegung der Normalen  $g$  aus Satz 1 gegenüber  $E'$  oder als Krümmungsmitten der Bahnen der Krümmungsmittelpunkte von  $k_1$  in den Hüllpunkten (vgl. [4] oder [24]).

Ein Punkt  $A$ , der  $k_1$  durchläuft und zusätzlich der Bewegung  $B_1$  unterworfen wird, nimmt  $\infty^2$  Bewegungslagen an, unterliegt also einem zweigliedrigen Bewegungsvorgang  $B_{II}$ . Erzeugt man die Trochoidenbewegungen in bekannter Weise (siehe etwa [24]) als Zusammensetzungen von Drehungen zweier gelenkig verbundener Arme und führt man für die Erzeugung von  $k_1$  den reellen Parameter  $t$ , für  $B_1$  den Parameter  $T$  ein, so wird  $B_{II}$  folgendermaßen beschrieben:

- (2) Der Arm  $\Sigma_1 = OM'$  dreht sich um  $O$  durch den Winkel  $\alpha_1 = T$ , der Arm  $\Sigma_2 = M'M$  durch  $\alpha_2 = CT + t$ , der Arm  $\Sigma_3 = MA$  schließlich, der in  $B_{II}$  das Gangsystem darstellt, durch  $\alpha_3 = CT + ct$ . Dabei gilt  $C = \frac{R - R'}{R}$  und  $c = \frac{r - r'}{r}$ ;  $C \neq 0$ ,  $c \neq 0$ .

Man findet sofort

### 1.1 Bestimmung der Hüllbahn

$$(3) \quad \alpha_3 = (1 - c)C \alpha_1 + c \alpha_2 .$$

Die Drehwinkel der drei Arme sind also linear abhängig.

Hält man in  $B_{II}$  den Parameter  $t$  fest, so beschreibt  $A$  eine Bahnkurve von  $B_1$ ; hält man  $T$  fest, so wandert  $A$  auf einer Lage von  $k_1$ .

Analytisch wird die Bahn des Punktes  $A$  in  $B_{II}$  nach (2) durch

$$(4) \quad z = (R' - R)e^{iT} + (r' - r)e^{i(CT+t)} + he^{i(CT+ct)}$$

erfaßt. Dabei sind die kartesischen Koordinaten in der Rastebene  $E'$  zu komplexen Zahlen  $z$  zusammengefaßt. Die reelle Zahl  $h$  legt den Punkt  $A$  in der durch  $\Sigma_3$  und  $p$  repräsentierten Gangebene fest; auch in dieser werden die Koordinaten durch komplexe Zahlen ersetzt. In der Ausgangslage  $T = t = 0$  decken sich die reellen Achsen der Gang- und Rastebene.

Wählt man  $T$  und  $t$  als mindestens einmal ableitbare Funktionen eines reellen Parameters  $u$ , also  $T = T(u)$ ,  $t = t(u)$ , so erhält man einen eingliedrigen Bewegungsvorgang  $B_I$  aus  $B_{II}$ . Für die Bahntangentenvektoren des Punktes  $A$  in  $B_I$  findet man durch Ableiten nach  $u$  die Darstellung

$$\begin{aligned} \dot{z} &= i(R' - R)\dot{T}e^{iT} + i(r' - r)(C\dot{T} + \dot{t})e^{i(CT+t)} + \\ &+ ih(C\dot{T} + \dot{c}\dot{t})e^{i(CT+ct)} = \dot{T}.z_1(T,t) + \dot{t}.z_2(T,t) . \end{aligned}$$

Die Bahntangentenvektoren sind also in jeder Lage  $T = T_0$ ,  $t = t_0$  linear abhängig von den Tangentenvektoren  $z_1$  bzw.  $z_2$  der Bewegung  $B_1$  ( $T = u$ ,  $t = t_0$ ) bzw. der Erzeugung der zu  $T_0$  gehörigen Lage von  $k_1$  ( $T = T_0$ ,  $t = u$ ). Sind  $z_1$  und  $z_2$  selbst voneinander linear abhängig - dies ist genau in Hüllpunkten  $A^0$  von  $k_1$  der Fall -, so fallen für alle  $B_I$  aus  $B_{II}$  die Bahntangentenvektoren in eine Gerade zusammen. Diese "kurvenläufigen" Lagen  $A^0$  des Punktes  $A$  (vgl. [5], III, Kap.8) bilden die "Grenzlinie" <sup>4)</sup> von  $A$  bei  $B_{II}$ .

<sup>4)</sup> Bei jenen Bewegungslagen von  $B_{II}$ , in welchen der Punkt  $A$  auf der Resthüllkurve liegt (Abb.3), ist die Hüllbahnnormale  $g$  jeweils Polachse. Liegt  $A$  auf einer CAMUS-Bahn, so artet die zugehörige Polachse in einen Punkt aus. Daher erfaßt die "Grenzlinie" im Sinne von W. BLASCHKE [5], III, Kap.18 keine CAMUS-Bahnen.



### 1.2 Dreifache Erzeugung der Hüllbahn

In 2. und 3. kann der zum letzten Arm gehörige Drehwinkel wiederum als Linearkombination der ersten beiden Drehwinkel dargestellt werden. Ein Vergleich mit (3) ergibt neue Werte  $c_i, C_i$  ( $i = 2, 3$ ) für  $c$  und  $C$  und damit Radienverhältnisse für weitere Trochoiden  $k_i$  und Trochoidenbewegungen  $B_i$  mit gleicher Hüllbahn:

$$(6) \text{ Ad 2. } \alpha_3 = c \alpha_2 + (1 - c)C \alpha_1 ,$$

$$c_2 = (1 - c)C , \quad C_2 = \frac{c}{1 - C + Cc} .$$

$$\text{Ad 3. } \alpha_2 = \frac{1}{c} \alpha_3 + \frac{c - 1}{c} C \alpha_1 ,$$

$$c_3 = \frac{(c - 1)C}{c} , \quad C_3 = \frac{1}{C - Cc + c} .$$

Die Längen der ersten beiden Arme geben jeweils die Differenz  $(R'_i - R_i)$  bzw.  $(r'_i - r_i)$  der Polkreisradien bei der Bewegung  $B_i$  bzw. bei einer Erzeugung von  $k_i$  an. Die dritte Armlänge ist gleich dem Abstand  $h_i$  des Punktes A vom Mittelpunkt des bewegten Polkreises bei der Erzeugung von  $k_i$ . Bei Verwendung der Schreibweise  $k_i = [r'_i, r_i; h_i]$  und  $B_i = [R'_i, R_i]$  gilt

Satz 3: Die folgenden drei Trochoiden  $k_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) haben bei den Trochoidenbewegungen  $B_i$  jeweils dieselbe Hüllbahn:

$$1. \quad k_1 = [r', r; h] = \left[ h \frac{r'}{r}, h \frac{r' - r}{r}; r' - r \right]$$

$$B_1 = [R', R]$$

$$2. \quad k_2 = \left[ \frac{R'r' - Rr' + Rr}{r'}, \frac{Rr}{r'}; h \right] =$$

$$= \left[ h \frac{R'r' - Rr' + Rr}{Rr}, h \frac{(R' - R)r'}{Rr}; R' - R \right]$$

$$B_2 = \left[ \frac{R'r'}{R}, \frac{R'r' - Rr' + Rr}{R} \right]$$

1.3 Reziproke Radienverhältnisse

$$\begin{aligned}
 3. \quad k_3 &= \left[ \frac{R'r' - Rr}{r'}, \frac{R(r' - r)}{r'} ; r' - r \right] = \\
 &= \left[ \frac{R'r' - Rr}{R}, \frac{(R' - R)r'}{R} ; R' - R \right] \\
 B_3 &= \left[ h \frac{R'r'}{Rr}, h \frac{R'r' - Rr}{Rr} \right].
 \end{aligned}$$

Für 2. ist  $R'r' - Rr' + Rr \neq 0$ , für 3.  $R'r' - Rr \neq 0$  vorauszusetzen. Die Anfangslagen der Trochoiden  $k_i$  sind durch die zugehörigen Anordnungen in (5) festgelegt.

Ist bei einer gewissen Stellung der Arme  $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$  der Punkt  $A^0$  ein Hüllpunkt von  $k_1$ , so auch von  $k_2$  und  $k_3$ . Die Normale  $g$  in  $A^0$  geht daher auch durch die Momentanpole der Erzeugungen von  $k_2$  und  $k_3$  sowie der Bewegungen  $B_2$  und  $B_3$ . Damit sind konstruktiv sehr einfach die weiteren Polkreisradien zu ermitteln (siehe Abb.4).

Gilt  $|R| = |r'|$ , so hüllt mit  $k_1$ , wie aus Satz 3 abzulesen ist, auch  $k_2$  eine CAMUS-Bahn ein;  $k_3$  ist gespitzt. Die CAMUS-Bahnen von  $k_1$  und  $k_2$  und die Bahnen der Spitzen von  $k_3$  sind identisch.

1.3 Reziproke Radienverhältnisse

1.3.1 Allgemeines:  $B_{II}$  oder die daraus durch Vertauschung der Arme abgeleiteten zweigliedrigen Bewegungsvorgänge können als spezielle eingliedrige Bewegungen kontinuierliche Drehungen um jeweils feste Punkte enthalten. Dies tritt dann ein, wenn beim Festhalten des ersten Armes zugleich der Winkel zwischen dem zweiten und dem dritten Arm konstant bleibt; dann enthält der zweigliedrige Bewegungsvorgang die Drehung des dritten Armes um den Endpunkt des ersten Armes.

Für die zweite Anordnung aus (5), bei welcher übrigens der nach (2) zugeordnete zweigliedrige Bewegungsvorgang mit  $B_{II}$  identisch ist, bedeutet dies, daß die Winkel  $\alpha_2$  und  $\alpha_3 - \alpha_1$  linear abhängig sind, also nach (2)

### 1.3 Reziproke Radienverhältnisse

$C : 1 = (C - 1) : c$ , somit  $(r' - r) : r' = R' : R$  ist. Aus der dritten Anordnung erhält man  $r : r' = R' : R$ . Beide Fälle können dadurch charakterisiert werden, daß das Radienverhältnis der Bewegung  $B_1$  zum Radienverhältnis einer Erzeugung von  $k_1$  reziprok ist. Diese Fälle mußten in je einem Punkt des Satzes 3 ausgeschlossen werden.

Für die erste Erzeugung von  $k_1 = [r', r ; h]$  führt unter der Bedingung  $r' : r = R' : R$  die dritte Anordnung zu

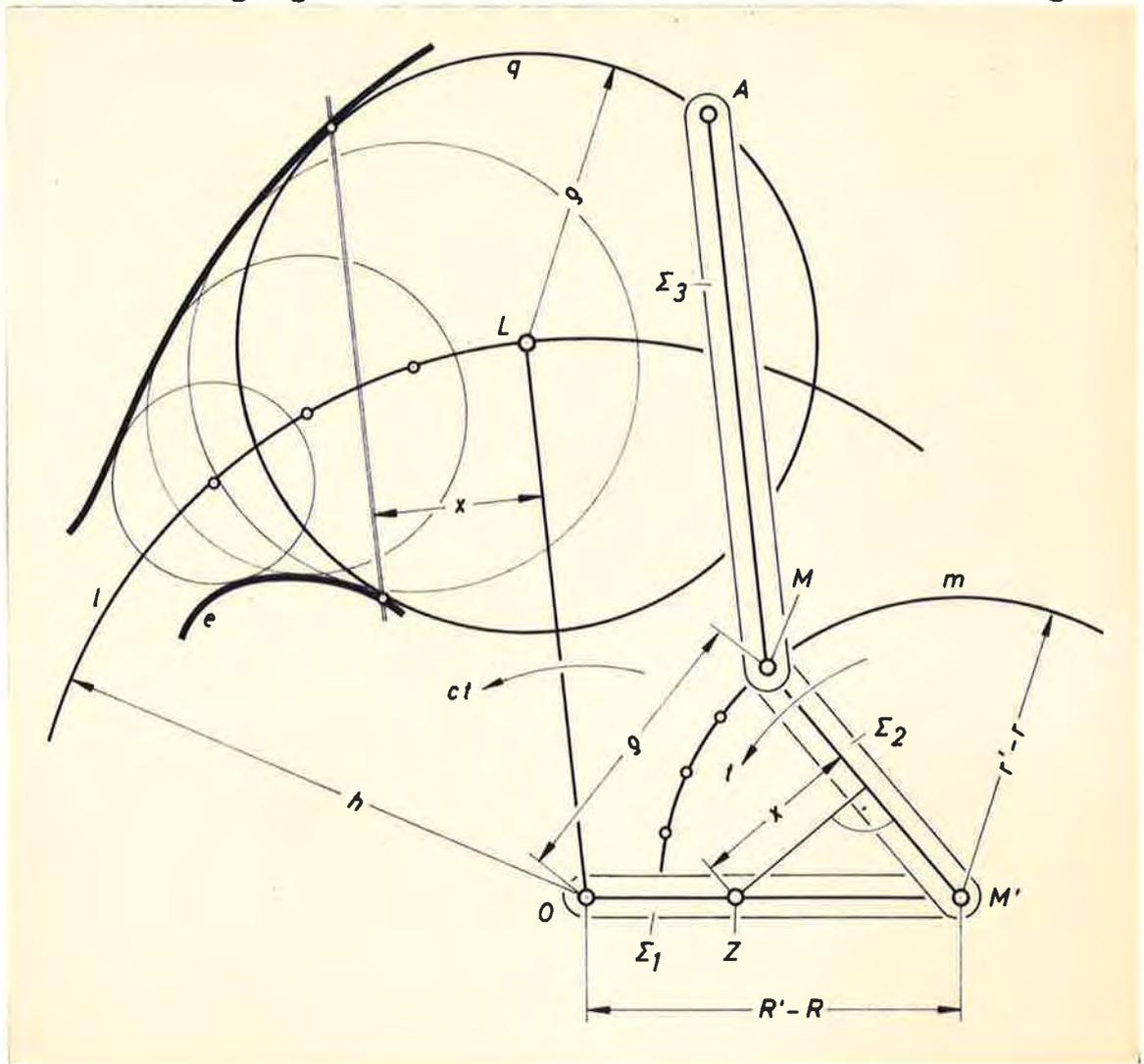


Abb. 5

Drehungen. Bei jeder Stellung der drei Arme  $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$  erhält man einen Drehungsmittelpunkt (siehe Abb.5) als Endpunkt L des durch O parallel verschobenen Armes  $\Sigma_3$ . Der Punkt A beschreibt bei dieser Drehung einen Kreis q um L mit dem Radius  $\rho = \overline{LA} = \overline{OM}$ . Man erhält alle Drehungen und Drehungskreise, wenn man A die Trochoide  $k_1$  durchlaufen läßt:  $\Sigma_1$  bleibt fest,

### 1.3 Reziproke Radienverhältnisse

mit  $\Sigma_2$  dreht sich M auf dem Kreis m um M' durch den Winkel t,  
mit  $\Sigma_3$  L auf dem Kreis l um O durch  $ct = \frac{r - r'}{r} t$ .

Für die Bahn des Punktes A in  $B_{II}$  können die linear unabhängigen Drehwinkel von  $\Sigma_3$  und  $\Sigma_2$  als neue Parameter  $T^*$  bzw.  $t^*$  eingeführt werden. Die Parameterlinien  $T^* = \text{konst}$  sind die Drehungskreise q. Auf Grund der Bemerkung am Schluß von 1.1 ist die Einhüllende dieser Kreise mit der Grenzlinie e von A und daher nach Satz 2 mit der Hüllbahn von  $k_1$  bei  $B_1$  identisch.

Satz 4: Ist das Radienverhältnis der Erzeugung von  $k_1 = [r', r; h]$  zu jenem der Bewegung  $B_1 = [R', R]$  reziprok, gilt also  $r' : r = R : R'$ , so erhält man die Hüllbahn e von  $k_1$  bei allgemeiner Anfangslage O, M', M, A als Einhüllende von Kreisen (siehe Abb.5): Mittelpunkt des zur Ausgangslage gehörigen Kreises q ist L bei  $\overrightarrow{OL} = \overrightarrow{MA}$ ; der Kreisradius ist gleich dem Abstand  $\overline{OM}$ . Man erhält nach derselben Vorschrift alle weiteren Kreise, wenn L den Kreis  $l = (O; h)$  und M den Kreis  $m = (M', r' - r)$  durchläuft, wobei sich die Winkelgeschwindigkeiten wie  $(r - r') : r$  verhalten.

Ist  $B_1$  genau die Umkehrbewegung zur Erzeugung von  $k_1$ , also  $R' = r, R = r'$ , so geht der Kreis m durch O. Nun gibt es unter der Kreismannigfaltigkeit (q) Kreise mit verschwindendem Radius in den Stützpunkten von  $k_1$ .<sup>5)</sup>

Beispiel 1: Tafel I zeigt in den Bildern a), b) und c) die Hüllbahn der dreibogigen geschlungenen Hypotrochoide  $k_1 = [150, 100; 40]$  (alle Maße in mm) bei den Bewegungen a)  $B_1 = [56, 84]$ , b)  $B_1 = [40, 60]$ , c)  $B_1 = [30, 45]$ . R ist also einmal größer, einmal gleich und einmal kleiner als der Radius des festen Polkreises  $\bar{p}'$  bei der zweiten Erzeugung  $[60, 20; 50]$  von  $k_1$ . Das Radienverhältnis von  $B_1$  ist in allen drei Fällen zu jenem von  $k_1$  reziprok. Also ist die Hüllbahn e nach Satz 4

<sup>5)</sup> Für diesen Fall hat O. BAIER auf dem VII. Österreichischen Mathematikerkongreß (Linz 1968) bereits diese Konstruktion angegeben, jedoch auf anderem Weg abgeleitet.

Eine interessante geometrische Eigenschaft dieser Kreismannigfaltigkeit (q) ist in (15), Seite 49 angeführt.

### 1.3 Reziproke Radienverhältnisse

als Einhüllende der Kreisschar (q) konstruierbar.

In a) besteht die Hüllbahn e aus vier paarweise kongruenten Kurvenzügen; in c) weist e zwei Kurvenzüge auf. In b) zerfällt e in die CAMUS-Bahn  $e_c = [40, 20; 50]$  (eine Ellipse) und in die Resthüllbahn  $e_r$ ; in 1.4 wird gezeigt werden, daß  $e_r$  ebenfalls eine Trochoide, nämlich die geschlungene Epitrochoide  $[40, -20; 50]$  ist.  $e_c$  und  $e_r$  oskulieren einander in vier Punkten.

Gemeinsam mit den in Tafel II und Tafel VI gezeigten Hüllbahnen sind im wesentlichen alle Formen erfaßt, die bei diesen Radienverhältnissen auftreten.

Aus Satz 3 erhält man bei  $r : r' = R' : R$  eine weitere Trochoide  $k_2 = [2R' - R, R'; h]$ , die bei der Bewegung  $B_2 = [r, 2r - r']$  dieselbe Bahn e wie  $k_1$  einhüllt. Die Anfangslage von  $k_2$  ist durch die zweite Anordnung aus (5) festgelegt. Die gemäß Satz 4 zugehörige Kreismannigfaltigkeit (q) ist mit jener für  $k_1$  identisch, denn der Kreis l und das Verhältnis der Absolutbeträge der Winkelgeschwindigkeiten der Punkte L und M bleiben unverändert; es sind nur die Längen der ersten beiden Arme  $OM'$  und  $M'M$  vertauscht, was am Ergebnis der Konstruktion aus Satz 4 nichts ändert.

Die Konstruktion in Satz 4 zeigt noch zwei weitere Trochoiden mit der gleichen Hüllbahn e: Wählt man eine Anfangslage, bei der  $\sum_1$  und  $\sum_2$  in eine Gerade fallen (vgl. Abb.5), so bleibt die Mannigfaltigkeit (q) und damit e unverändert, wenn man M im entgegengesetzten Sinn um  $M'$  dreht, also - c statt c setzt. Dies ergibt ein neues Radienverhältnis; aus den Anfangslagen für  $k_1$  und  $k_2$  erhält man die neuen Trochoiden  $k_3$  und  $k_4$  und die zugehörigen Bewegungen  $B_3$  bzw.  $B_4$ .

Satz 5: Die folgenden vier Trochoiden  $k_i$  ( $i = 1, \dots, 4$ ) haben bei den Trochoidenbewegungen  $B_i$  unter der Bedingung  $r : r' = R' : R$  jeweils dieselbe Hüllbahn:

$$1. \quad k_1 = [r', r; h] = \left[ h \frac{r'}{r}, h \frac{r' - r}{r}; r' - r \right]$$

$$B_1 = [R', R]$$

### 1.3 Reziproke Radienverhältnisse

$$2. \quad k_2 = [2R' - R, R'; h] = \left[ h \frac{r' - 2r}{r}, h \frac{r' - r}{r}; R - R' \right]$$

$$B_2 = [r, 2r - r']$$

$$3. \quad k_3 = [2r - r', r; h] = \left[ h \frac{r' - 2r}{r}, h \frac{r' - r}{r}; r' - r \right]$$

$$B_3 = [R', 2R' - R]$$

$$4. \quad k_4 = [R, R'; h] = \left[ h \frac{r'}{r}, h \frac{r' - r}{r}; R - R' \right]$$

$$B_4 = [r, r'] .$$

Dabei muß für 2. und 3.  $r' : r \neq 2 : 1$  vorausgesetzt werden.<sup>6)</sup>

Beispiel 2: In Tafel II ist  $k_1$  als gestreckte PASCALSche Schnecke gewählt, die einer elliptischen Bewegung unterworfen wird; also  $r : r' = R' : R = 2 : 1$  ( $r' = 26, r = 52; R' = 36, R = 18$ ). Die Hüllbahn besteht aus zwei Kurvenzügen. Aus Satz 5 folgt, daß noch eine zweite gestreckte PASCALSche Schnecke  $k_4$  sowie zwei dreizählige Hypotrochoiden  $k_2$  und  $k_3$  dieselbe Bahn einhüllen.

1.3.2 Bestimmung der Hüllpunkte der Kreise  $q$ : Die Schnittpunkte zweier Kreise  $q = (L; \rho)$  und  $q_1 = (L_1; \rho_1)$  liegen bei  $\overline{LL_1} = z$  auf einer Geraden normal zur Zentralen im Abstand  $x = \frac{z^2 + \rho^2 - \rho_1^2}{2z}$  von  $L$ . Sind diese Kreise nach Satz 4

konstruiert und gehören sie zu den Parameterwerten  $t$  bzw.  $t_1$ , wobei in der Ausgangsstellung  $t = 0$  der Punkt  $M$  auf der Geraden  $OM'$  liegt, so gilt

$$\rho^2 - \rho_1^2 = 2(R' - R)(r' - r)(\cos t - \cos t_1),$$

$$z = 2h \cdot \sin \left[ \frac{r - r'}{2r} (t - t_1) \right].$$

Mit  $t_1$  gegen  $t$  geht die Zentrale in die Tangente an den Mitlenkreis  $l$  über; die Schnittpunkte von  $q$  mit  $q_1$  werden Berührungspunkte von  $q$  mit der Einhüllenden. Man findet somit nach einem Grenzübergang

<sup>6)</sup> Dieser Fall ist im Beispiel 9 (Seite 49) behandelt.

1.3 Reziproke Radienverhältnisse

Satz 6: Die Berührungspunkte eines Kreises  $q$  aus der im Satz 4 beschriebenen Mannigfaltigkeit mit der Einhüllenden  $e$  (siehe Abb.5) liegen auf einer Geraden, die vom Mittelpunkt  $L$

von  $q$  den Abstand  $x = \frac{(R' - R) \cdot r}{h} \sin t$  hat und zur Geraden

$OL$  parallel ist.  $x$  ist gleich dem Abstand der Geraden  $M'M$  von einem (von  $L$  unabhängigen) Punkt  $Z$ , der auf  $OM'$  liegt und von

$M'$  den Abstand  $\frac{(R' - R) \cdot r}{h}$  hat.

Wenn die Berührsehne den Kreis  $q$  berührt, so ist dieser ein Scheitelkrümmungskreis der Einhüllenden. Die zu solchen Kreisen gemäß Satz 4 gehörigen Punkte  $M_i$  auf  $m$  haben die Ei-

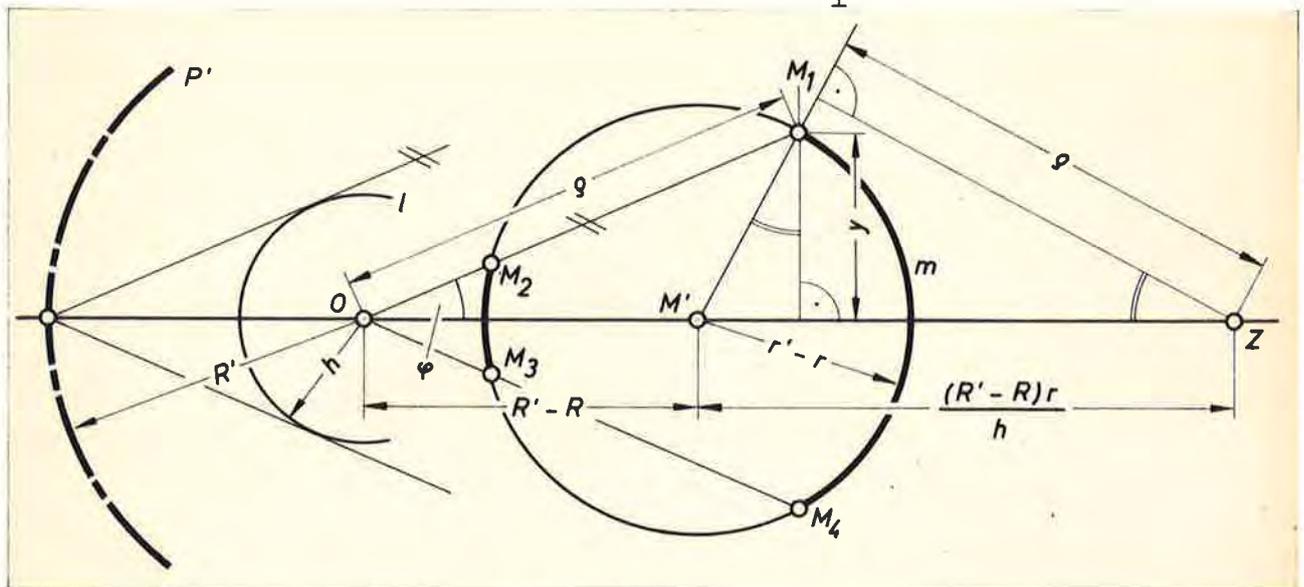


Abb. 6

genschaft, daß die Abstände  $\rho = \overline{OM_i}$  gleich sind den Normalabständen der Geraden  $M_iM'$  vom Punkt  $Z$  (siehe Abb.6). Bezeichnet man den Normalabstand eines solchen Punktes  $M_1$  von der Geraden  $OM'$  mit  $y$ , so gilt auf Grund gleicher Winkel

$$\rho : \frac{(R' - R) \cdot r}{h} = y : (r' - r), \text{ also } y = \frac{\rho(r' - r)h}{(R' - R) r} = \frac{\rho h}{R'}$$

Bezeichnet man den Winkel  $M'OM_1$  mit  $\varphi$ , so gilt  $\sin \varphi = \frac{y}{\rho} = \frac{h}{R'}$ .

Satz 6a: Jene Punkte  $M_i$  ( $i = 1, \dots, 4$ ) auf  $m$ , welchen gemäß Satz 4 Scheitelkrümmungskreise der Hüllbahn  $e$  zuge-

#### 1.4 Trochoiden als Hüllbahnen

ordnet sind, erhält man auf folgende Weise (siehe Abb.6): Aus einem Schnittpunkt der Geraden  $OM'$  mit dem festen Polkreis  $P'$  der Bewegung  $B_1$  legt man die Tangenten an den Kreis  $l$ . Diese werden parallel durch  $O$  verschoben und schneiden dann  $m$  in den vier Punkten  $M_i$ .

Diese Punkte  $M_i$  begrenzen zugleich auf  $m$  jene Bereiche (in Abb.6 dick ausgezogen; siehe auch Tafel I, Bild a), deren Punkten Kreise mit reellen Hüllpunkten zugeordnet sind.

#### 1.4 Trochoiden als Hüllbahnen

Die Konstruktion der Kreismannigfaltigkeit ( $q$ ) aus Satz 4 für den Fall  $r : r' = R' : R$  läßt sich, falls eine gespitzte Trochoide  $k_1 = [r', r ; r]$  bewegt wird, anders deuten: Nun bewegen sich die Punkte  $L$  auf  $l$  und  $M$  auf  $m$  (vgl. Abb.5) mit gleicher Geschwindigkeit. Man kann daher  $m$  auf  $l$  abrollen lassen (zwei Möglichkeiten), wobei immer zugeordnete Punkte  $M$  und  $L$  zur Deckung kommen. Bewegt man mit  $m$  den Punkt  $O$  mit, so berührt dessen Bahn jeweils einen Kreis mit dem Wälzpunkt  $L$  als Mitte und dem Radius  $\overline{MO}$ , also einen Kreis  $q$ . Die Einhüllende der Kreismannigfaltigkeit ( $q$ ) zerfällt somit in diesem Fall in zwei Trochoiden  $h_1 = [r, r - r'; R' - R]$  und  $h_2 = [r, r' - r; R' - R]$ .  $h_1$  ist, wie die zweite Erzeugung  $[R', R; r']$  zeigt, die Bahn der Spitzen von  $k_1$  bei der Bewegung  $B_1$ . Satz 5 ergibt drei weitere Trochoiden mit derselben Hüllbahn.

$h_1$  und  $h_2$  werden also erzeugt, indem der Kreis  $m$  mit dem Punkt  $O$  auf beiden Seiten von  $l$  abrollt.  $L$  sei gemeinsamer Wälzpunkt. Dann liegen die zugehörigen Bahnpunkte von  $h_1$  und  $h_2$  spiegelbildlich bzgl. der Polbahntangente, also bzgl. der Tangente in  $L$  an  $l$ . Wenn aus  $O$  reelle Tangenten an  $m$  legbar sind und man  $m$  solange auf  $l$  abrollt, bis eine der Tangenten Polbahntangente ist, so fallen die zugehörigen Punkte von  $h_1$  und  $h_2$  zusammen. Da zusätzlich der Momentanpol dann Krümmungsmittelpunkt für  $h_1$  und  $h_2$  ist, oskulieren einander  $h_1$  und  $h_2$  in solchen Lagen. Der Kreis  $m$  wälzt sich wegen (1)  $|n_1|$  - mal

### 1.4 Trochoiden als Hüllbahnen

auf 1 ab, bis er wieder in die Ausgangslage kommt; daher gibt es  $2|n_1|$  Oskulationsstellen.

Zusammenfassend gilt

Satz 7: In den folgenden vier Fällen

$$1. \quad k_1 = [r', r ; r] = [r', r' - r ; r] , \\ B_1 = [R', R]$$

$$2. \quad k_2 = [2R' - R , R' ; r] = [r' - 2r , r' - r ; R - R'] , \\ B_2 = [r , 2r - r']$$

$$3. \quad k_3 = [2r - r' , r ; r] = [r' - 2r , r' - r ; r' - r] , \\ B_3 = [R', 2R' - R]$$

$$4. \quad k_4 = [R , R' ; r] = [r', r' - r ; R - R'] , \\ B_4 = [r , r']$$

besteht bei  $r : r' = R' : R$  ( $\neq 1 : 2$  für 2. und 3.) die Hüllbahn aus dem Trochoidenpaar  $h_1 = [r , r - r' ; R' - R]$  und  $h_2 = [r , r' - r ; R' - R]$ .

$k_1$  und  $k_3$  sind gespitzte Trochoiden.  $h_1$  ist für  $k_1$  Bahn der Spitzen,  $h_2$  für  $k_3$ ;  $h_1$  ist für  $k_2$  CAMUS-Bahn,  $h_2$  für  $k_4$ .

$h_1$  und  $h_2$  oskulieren einander bei  $|R| > |r'|$  wegen (1) in  $2|n_1|$  Punkten. Bei  $|R| < |r'|$  sind diese Oskulationsstellen konjugiert komplex.

Beispiel 3: Tafel I, Bild d, zeigt die Bewegung  $B_1 = [100, 50]$  der Cardioide  $k_1 = [20, 40; 40]$ . Die Ellipse  $e_s = [100, 50; 20] = [40, 20; 50]$  ist die Bahn der Spitze von  $k_1$ ; die zweizählige Epitrochoide  $e_r = [40, -20; 40]$  ist Resthüllbahn.  $e_r$  und  $e_s$  oskulieren einander in vier Punkten.

Zu derselben Hüllbahn führt die geschlungene Hypotrochoide  $k_2 = [60, 20; 50]$  (in Tafel I, Bild c, mit  $k_1$  bezeichnet) bei der Bewegung  $[40, 60]$ . In Tafel I wurde genau jene Lage eingezeichnet, in welcher die bewegte Trochoide den Oskulationspunkt H von  $e_r$  mit  $e_s$  enthält und in H beide Hüllkurven dreipunktig berührt.

Unterwirft man  $h_2 = [r , r' - r ; R' - R] = [R', 2R' - R ; 2r - r']$  der Umkehrbewegung  $[R , R']$  zu  $B_1$ ,

#### 1.4 Trochoiden als Hüllbahnen

so wird neben der CAMUS-Bahn  $e_c = [R, 2R' - R; 2r - r']$  die gespitzte Trochoide  $k_1 = [r', r; r]$  eingehüllt. Dies ist nach W. WUNDERLICH [37] der einzige Fall, wo nicht gespitzte Trochoiden bei Trochoidenbewegungen gespitzte Trochoiden als Resthüllkurve einhüllen.

Da  $k_1$  bei jeder Wahl von  $R'$  Trochoiden einhüllt, sofern  $r' : r = R : R'$ , gibt es umgekehrt  $\infty^1$  Trochoiden  $h_2$ , die dieselbe Trochoide  $k_1$  einhüllen. Diese Erweiterung stammt von J. HOSCHEK [13].

Setzt man vorübergehend

$$(7) \quad 2R' - R = a, \quad 2r - r' = b, \quad \frac{R'}{2R' - R} = m,$$

so findet man die Darstellungen:  $h_2 = [ma, a; b]$ ,

$$B_1^{-1} = [(2m - 1)a, ma], \quad k_1 = [(2m - 1)b, mb; mb].$$

WUNDERLICH hat erkannt, daß in diesem Fall bei  $|b| > |a|$  im Reellen nicht die ganze Trochoide  $k_1$  als Hüllbahn auftritt, sondern nur doppelt überdeckte Kurvenstücke von  $k_1$  (vgl. Abb. 2b oder Tafel III). Die Grenzpunkte dieser Kurvenstücke sind die Berührungspunkte der CAMUS-Bahn  $e_c$  mit der Resthüllbahn  $k_1$ . Die Konstruktion dieser Stellen ist in Tafel III ersichtlich und in [37] und [28] beschrieben; es sind dies jene in Satz 1 erwähnten speziellen Lagen, wo die Normale  $g$  in einem Hüllpunkt der bewegten Trochoide den festen Polkreis  $p'$  der Trochoidenerzeugung (zugleich Rollkreis  $P$  der Trochoidenbewegung  $B$ ) berührt.

Satz 7a (WUNDERLICH, HOSCHEK): Alle Trochoiden

$h_2 = [ma, a; b]$  ( $a$  reell, aber beliebig) hüllen bei den Bewegungen  $[(2m - 1)a, ma]$  neben den CAMUS-Bahnen die vom Wert  $a$  unabhängige gespitzte Trochoide

$k_1 = [(2m - 1)b, mb; mb]$  ein. Bei  $|b| > |a|$  treten im Reellen nur doppelt überdeckte Kurvenstücke von  $k_1$  als Hüllbahn auf; bei  $|b| < |a|$  wird ganz  $k_1$  "ausgefegt".

Erzeugung von  $k_1$ : Der Radius des festen Polkreises ist gleich der Summe der Polkreisradien der zweiten Erzeugung von  $h_2 = [mb, (m - 1)b; (m - 1)a]$ . Der Radius des bewegten Pol-

#### 1.4 Trochoiden als Hüllbahnen

kreises ist gleich dem Radius des festen oder bewegten Polkreises der zweiten Erzeugung von  $h_2$ .

Da  $k_1$  noch als  $[(2m - 1)b, (m - 1)b; (m - 1)b]$  erzeugbar ist, zeigt ein Koeffizientenvergleich, daß  $k_1$  auch Resthüllbahn der Trochoiden  $h_2^* = [(1 - m)a, a; b]$  bei den Bewegungen  $[(1 - 2m)a, (1 - m)a]$  ist.<sup>7)</sup>

Satz 3 ergibt zur Bewegung von  $h_2$  als Fall mit gleicher Hüllbahn die Bewegung einer Strecke (gespitzte Trochoide bei einer elliptischen Bewegung). Da die Durchmesser des Rollkreises bei Trochoidenbewegungen bekanntlich (vgl. [24]) gespitzte Trochoiden einhüllen, ließe sich Satz 7a auch auf diesem Weg ableiten.

Beispiel 4: Tafel III zeigt als Beispiel zu Satz 7a die Bewegung  $B_1^{-1} = [80, 60]$  der dreizähligen gestreckten Hypotrochoide  $h_2 = [60, 40; 80]$  (also  $m = \frac{3}{2}$ ,  $a = 40$ ,  $b = 80$ ) mit Flachpunkten. Als CAMUS-Bahnen erhält man zwei Ellipsen  $e_c = [80, 40; 80]$ ; die Astroide  $k_1 = [160, 40; 40]$  ist Resthüllbahn. Jede Ellipse  $e_c$  berührt  $k_1$  in vier Punkten. (Dasselbe Beispiel gibt WUNDERLICH in [37], Abb.4 an.)

Für die Erzeugung von  $h_2$  wurde jene Lage gewählt, wo der Momentanpol mit dem Momentanpol V der Bewegung  $B_1^{-1}$  zusammenfällt. Die zwei zugehörigen Bahnpunkte A sind dann die Berührungspunkte von  $h_2$  mit den CAMUS-Bahnen.

Nach Satz 7 hüllt  $k_4 = [R, R'; r] = [r', r' - r; R - R']$  bei  $B_4 = [r, r']$  neben der CAMUS-Bahn  $h_2$  die Trochoide  $h_1$  ein. Nun ist das Radienverhältnis der ersten Erzeugung von  $k_4$  zu jenem von  $B_4$  reziprok; der Rollkreis von  $B_4$  ist mit dem festen Polkreis  $\bar{p}'$  der zweiten Erzeugung von  $k_4$  identisch. Diesen Fall hat P. MEYER gefunden ([16], [17] oder [18]). Wieder gibt es wegen der zweiten Erzeugungsmöglichkeit von  $h_1$  noch eine zweite bewegte Trochoide  $k_4^*$  mit derselben Resthüllbahn. Nach einer Bezeichnungsänderung analog zu (7) erhält man

<sup>7)</sup> Die im 2. Absatz von Satz 7a beschriebene Konstruktion der Resthüllbahn ist in [28] angegeben. Die zweite Schar von Trochoiden  $h_2^*$ , die ebenfalls  $k_1$  einhüllen, hat als erster HOSCHEK in [13] nachgewiesen.

#### 1.4 Trochoiden als Hüllbahnen

Satz 7b (MEYER): Die Trochoide  $k_4 = [ma, a; b]$  hüllt bei der Bewegung  $B_4 = [(m-1)a, ma]$  neben der CAMUS-Bahn die Trochoide  $h_1 = [(m-1)a, -a; b]$  ein. Dieselbe Resthüllbahn tritt bei  $k_4^* = [b, mb; ma]$  und der Bewegung  $[(1-m)b, b]$  auf.

Konstruktion von  $h_1$ : Man spiegelt den Rollkreis der Erzeugung der CAMUS-Bahn  $h_2 = [(m-1)a, a; b]$  samt dem erzeugenden Bahnpunkt an der Polbahntangente und läßt ihn auf der zweiten Seite des Rastpolkreises abrollen.

Beispiel 5: Tafel IV zeigt den Fall  $m = 4$ : Die vierzählige geschlungene Hypotrochoide  $k_4 = [144, 36; 72]$  hüllt bei der Bewegung  $B_4 = [108, 144]$  neben der CAMUS-Bahn  $h_2 = [108, 36; 72]$  die geschlungene Epitrochoide  $h_1 = [108, -36; 72]$  ein.  $h_1$  und  $h_2$  oskulieren einander in 6 Punkten.

Ein weiteres Beispiel zu Satz 7b ist in Tafel I, Bild c gezeigt ( $m = 3$ ).

Schließlich sei noch auf folgenden Sonderfall hingewiesen: Wenn die bewegte Trochoide  $k_1$  gespitzt ist und der feste Polkreis der Erzeugung von  $k_1$  mit dem Rollkreis der Bewegung  $B_1$  identisch ist, also  $h = |r|$  und  $|r'| = |R|$ , besteht für alle  $R'$  die gesamte Hüllbahn aus gespitzten Trochoiden. Diese sind, da beide Erzeugungsmöglichkeiten von  $k_1$  den gleichen festen Polkreis haben, alle als CAMUS-Bahnen erklärbar. Daß damit tatsächlich die gesamte Hüllbahn von  $k_1$  erfaßt ist, zeigt die Abzählung der Hüllpunkte.<sup>8)</sup>

Gilt speziell  $R = r'$  und ferner  $R' = r + R$  (siehe Abb. 2a) oder  $R' = r' - r + R$ , so fällt die Bahn der Spitzen von  $k_1$  mit einer CAMUS-Bahn zusammen; die zweite Erzeugung der Spitzenbahnen hat dann nämlich die Polkreisradien  $R', r$  bzw.  $R', r' - r$ .  $k_1$  bildet in diesen Fällen mit der Bahn der Spitzen ein MORLEYSches Zyklidenpaar nach F. MORLEY [20].

<sup>8)</sup> Nach 3.4, Satz 19 gibt es  $|n_1| + |n_0 - n_1|$  Hüllpunkte der gespitzten Trochoide  $k_1$ .  $|n_1|$  Punkte liegen auf den CAMUS-Bahnen zur 1. Erzeugung von  $h_1$  (Radienverhältnis  $n_0 : n_1$ ),  $|n_0 - n_1|$  Punkte auf jenen zur 2. Erzeugung ( $n_0 : (n_0 - n_1)$ ).

1.5 Der Fall  $R' = r, R = r'$

Technische Bedeutung in Zusammenhang mit der Entwicklung der Rotationskolbenmaschinen haben jene Fälle erlangt, wo  $B_1$  die Umkehrbewegung zu einer Erzeugung von  $k_1$  ist, also  $R = r'$  und  $R' = r$ .<sup>9)</sup> Die zugehörige Hüllbahn ist nach Satz 4 wieder die Einhüllende einer Kreismannigfaltigkeit ( $q$ ). Die CAMUS-Bahnen bestehen nun nur aus je einem Stützpunkt ("Anliegepunkt" oder "Dichtepunkt") der bewegten Trochoide; diese Stützpunkte sind Doppelpunkte der Hüllbahn; bei  $h < |r|$  sind sie nach Satz 6a isoliert. Aus Satz 5 leiten sich nun nur zwei verschiedene Trochoiden  $k_1 = k_4$  und  $k_2 = k_3$  mit gleicher Hüllbahn ab, die auch O. BAIER bereits angegeben hat.

Den einfachsten Fall mit nur einem Anliegepunkt erhält man aus Satz 7 bei  $r : r' = R' : R = 1 : 2$  (siehe Tafel V): Die Ellipse  $k_4 = [2R', R'; r] = [2r, r; R']$  (Halbachsenlängen  $|R' + r|, |R' - r|$ ) hüllt bei der Umkehrbewegung  $B_4 = [r, 2r]$  zu ihrer Erzeugung die PASCALSche Schnecke  $h_1 = [r, -r; R'] = [R', 2R'; 2r]$  ein. Dieses Ergebnis hat bereits O. RICHTER [26] angegeben.<sup>10)</sup> (In Tafel V ist als zweite Lage  $k_4^1$  von  $k_4$  jene eingezeichnet, die im Stützpunkt A einen Zweig der PASCALSchen Schnecke oskuliert.)  $h_1$  wird nach Satz 4 von jedem Kreis der Mannigfaltigkeit ( $q$ ) doppelt berührt (siehe Abb.7); der Ort l der Kreismittelpunkte ist zugleich fester Polkreis  $\bar{p}'$  der zweiten Erzeugung von  $h_1$ .

Nun soll der Kreis  $\bar{p}'$  unter Mitnahme der nicht gespitzten PASCALSchen Schnecke  $h_1$  auf einem Kreis  $P'$  abrollen (siehe Abb.7): Die Hüllpunkte sind jeweils die Fußpunkte der aus dem Momentanpol an  $h_1$  legbaren Normalen. Der Punkt L auf  $\bar{p}'$  sei ein Momentanpol: Zwei der Normalenfußpunkte sind die Berührungspunkte von  $h_1$  mit dem Kreis  $q$  mit Mittelpunkt L. Die restlichen zwei (vgl. 3.4, Satz 19) sind die Bahnpunkte bei der zweiten Erzeugung von  $h_1$ , wenn L der Momentanpol ist. Diese

<sup>9)</sup> Eine Übersicht über die technisch brauchbaren Fälle ist bei O. BAIER [1], Bild 20 sowie bei F. WANKEL [35], Bauformenblatt 13 sowie 15 - 18 angegeben.

<sup>10)</sup> Diese Bewegung findet übrigens beim sogenannten "Ovalwerk" von LEONARDO DA VINCI Verwendung. Vgl. F. REULEAUX, [25], Seite 316 f.

1.5 Der Fall  $R' = r$ ,  $R = r'$

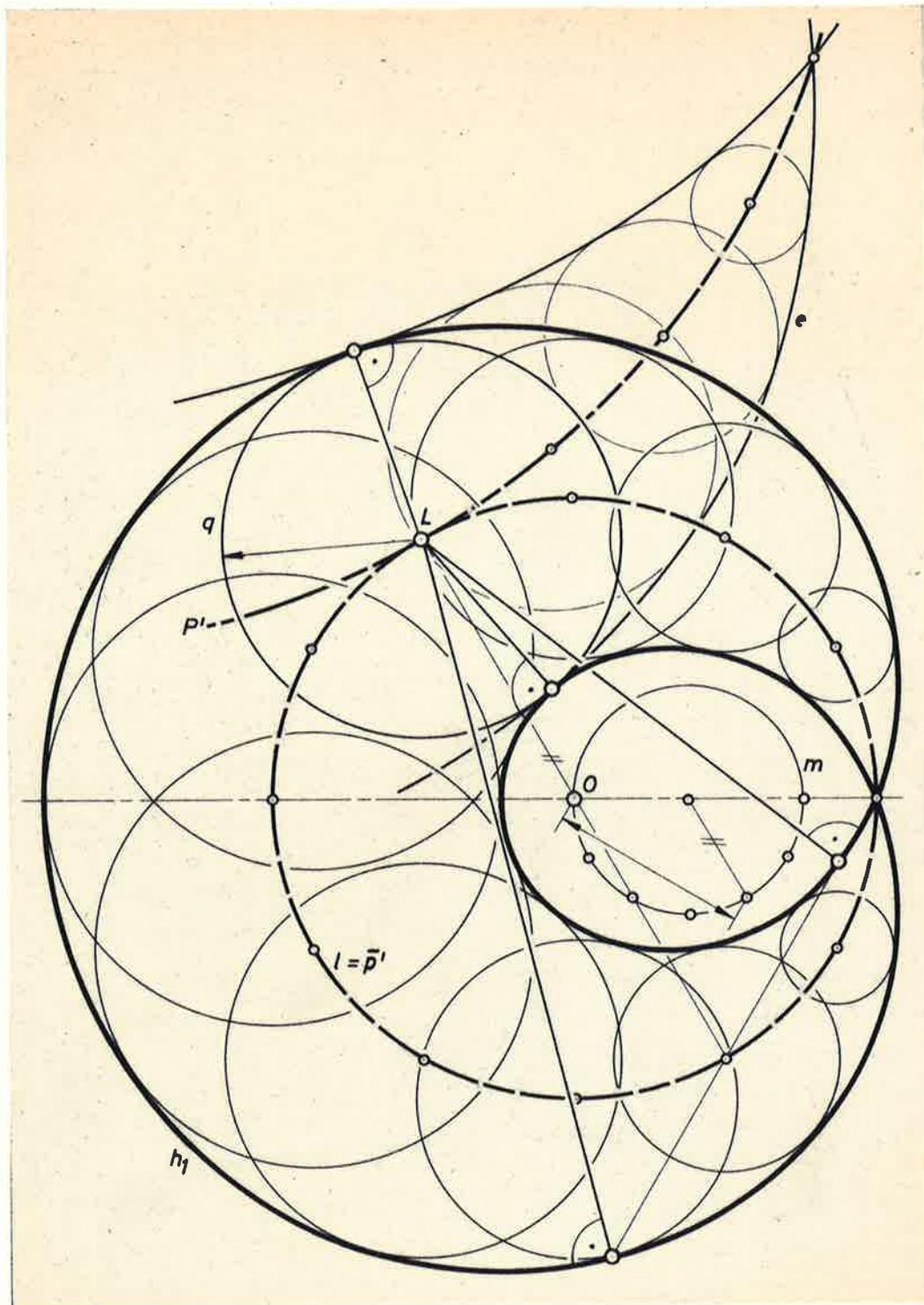


Abb. 7

beschreiben bei der Bewegung von  $h_1$  die CAMUS-Bahn. Die ersten beiden Hüllpunkte ergeben die Resthüllbahn; sie ist Einhüllende der Kreise  $q$ , deren Mittlen im jeweiligen Momentanpol liegen und die  $h_1$  in der zugehörigen Lage doppelt berühren. Da  $\bar{p}'$  auf  $P'$  abrollt, unterliegen diese Kreise dem gleichen Bildungsgesetz wie jene in Satz 4 bei  $R = r'$ ,  $R' = r$ . Somit

1.5 Der Fall  $R' = r$ ,  $R = r'$

kann zu jeder solchen Hüllbahn  $e$  eine PASCALsche Schnecke  $h_1$  angegeben werden, die neben einer CAMUS-Bahn  $e_c$  ebenfalls  $e$  einhüllt. Dabei kann bei gleicher Resthüllkurve der Mittenkreis  $\bar{p}'$  von  $h_1$  auf beiden Seiten des Mittenkreises von  $e$  abrollen. Zu jeder solchen Bewegung von  $h_1$  gibt es ferner nach Satz 3 zwei weitere Trochoiden mit gleicher Hüllbahn. Bei geänderter Bezeichnung gilt schließlich

Satz 8: Unterwirft man die Trochoide  $k_1 = [r', r ; h]$  der Umkehrbewegung  $B_1 = [r, r']$  zu ihrer Erzeugung, so erhält man die gleiche Hüllbahn  $e$  wie bei  $k_2 = [2r - r', r ; h]$  und der Bewegung  $B_2 = [r, 2r - r']$ .  $e$  tritt als Resthüllkurve auch in den folgenden Fällen auf:

$$3. \quad k_3 = \left[ h \frac{r - r'}{r}, 2h \frac{r - r'}{r}; 2(r - r') \right] =$$

$$= \left[ r - r', r' - r; h \frac{r' - r}{r} \right]$$

$$B_3 = \left[ h, h \frac{r - r'}{r} \right] \quad \text{und} \quad \bar{B}_3 = \left[ h, h \frac{r' - r}{r} \right]$$

$$4. \quad k_4 = \left[ h \frac{2r - r'}{r}, 2h \frac{r - r'}{r}; 2(r - r') \right] =$$

$$= \left[ 2r - r', r'; h \frac{r'}{r} \right]$$

$$B_4 = \left[ h, h \frac{2r - r'}{r} \right]$$

$$5. \quad k_5 = \left[ h \frac{r'}{r}, 2h \frac{r' - r}{r}; 2(r' - r) \right] =$$

$$= \left[ r', 2r - r'; h \frac{2r - r'}{r} \right]$$

$$B_5 = \left[ h, h \frac{r'}{r} \right]$$

$$6. \quad k_6 = \left[ h \frac{2r' - r}{r}, h \frac{r' - r}{r}; h \frac{r' - r}{r} \right] =$$

1.5 Der Fall  $R' = r$  ,  $R = r'$

$$= \left[ h \frac{2r' - r}{r} , h \frac{r'}{r} ; h \frac{r'}{r} \right]$$

$$B_6 = [r , 2r' - r]$$

$$7. \quad k_7 = \left[ h \frac{3r - 2r'}{r} , h \frac{r - r'}{r} ; h \frac{r - r'}{r} \right] =$$

$$= \left[ h \frac{3r - 2r'}{r} , h \frac{2r - r'}{r} ; h \frac{2r - r'}{r} \right]$$

$$B_7 = [r , 3r - 2r'] .$$

$k_3$  ist eine PASCALSche Schnecke,  $k_6$  ( $r' : r \neq 1 : 2$ ) und  $k_7$  ( $r' : r \neq 3 : 2$ ) sind gespitzte Trochoiden. Bei  $k_2, k_3, k_4, k_5, k_7$  und  $\bar{B}_3$  ist  $r' : r \neq 2 : 1$  vor auszusetzen.

Beispiel 6:  $r' : r = 1 : 2$  (siehe Tafel VI): Nun sind  $k_1 = [r/2 , r ; h]$  und  $k_3 = [h/2 , h ; r]$  je PASCALSche Schnecken, die der Umkehrbewegung zu ihrer Erzeugung unterworfen werden. Daher ist die Hüllbahn  $e$  dieses Falles auf zwei Arten Einhüllende von Kreismannigfaltigkeiten ( $q$ ). Ort der Mittelpunkte sind zwei konzentrische Kreise mit den Radien  $h$  bzw.  $r$ .  $e$  hat auf einer Symmetrieachse vier Doppelpunkte, von welchen zwei isoliert sind.  $e$  besteht aus zwei kongruenten Kurvenzügen; beide haben in den reellen Knoten Scheitel, wie die Konstruktion gemäß Satz 6a zeigt. Nach O. BAIER ist  $e$  von achter Ordnung.

Bei  $h > |r|$  bilden die gestreckte PASCALSche Schnecke  $k_1$  und der äußere Teil der Hüllbahn  $e$  Läufer und Gehäuse des 2-Takt-Motors (OTTO oder DIESEL) System DORNIER-HUF.  $k_1$  hat in den reellen Knoten von  $e$  Stützpunkte (=CAMUS-Bahn). Es ist zu beachten, daß  $k_1$  zeitweise  $e$  gar nicht in reellen Punkten berührt, sondern nur durch die Doppelpunkte gleitet (vgl. 3.4, Seite 62). In jener Lage, wo eine Krümmungsmitte der zwei nicht auf der Symmetrieachse liegenden Scheitel von  $k_1$  der Momentanpol ist, berührt  $k_1$  einen Zug der Hüllbahn in einem reellen Knoten fünfpunktig.

$e$  wird nach Satz 8 zugleich von den dreibogigen Hypotrochoiden  $k_2 = [3r/2 , r ; h]$  bei  $B_2 = [r , 3r/2]$  und  $k_4 = [3h/2 , h ; r]$  bei  $B_4 = [h , 3h/2]$  eingehüllt.  $k_4$  glei-

1.5 Der Fall  $R' = r$  ,  $R = r'$

tet wie die geschlungene PASCALSche Schnecke  $k_3$  durch die isolierten Doppelpunkte von  $e$ .  $k_2$  hat in den reellen Knoten von  $e$  Stützpunkte; es wurde in Tafel VI genau jene Lage eingezeichnet, in welcher  $k_2$  in einem dieser Punkte die Hüllbahn oskuliert.  $e$  wird ferner von der Epitrochoide  $k_5 = [h/2, -h; r]$  bei der elliptischen Bewegung  $B_5 = [h, h/2]$  und der Astroide  $k_7 = [2h, h/2; h/2]$  bei der OLDHAM-Bewegung  $B_7 = [r, 2r]$  eingehüllt. Als CAMUS-Bahnen treten zwei gestreckte PASCALSche Schnecken auf; diese sind übrigens ähnlich zu  $k_1$  im Verhältnis  $2 : 1$ . Die Bewegungen  $B_5$  von  $k_5$  und  $B_3$  von  $k_3$  sind gleich. Daher könnte  $k_3$  mit  $k_5$  starr verbunden werden und dabei zu derselben Resthüllbahn  $e$  führen.

Da  $k_1$  und  $k_3$  gleichwertig sind, kann  $h$  mit  $r$  vertauscht werden, ohne die Hüllbahn zu ändern. Somit ist  $e$  auch Resthüllbahn der Epitrochoide  $k_5^* = [r/2, -r; h]$  bei der Bewegung  $B_5^* = [r, r/2]$  (diese ist mit der Bewegung  $B_1$  von  $k_1$  identisch) und der Astroide  $k_7^* = [2r, r/2; r/2]$  bei  $B_7^* = [h, 2h]$ . CAMUS-Bahnen sind nun zwei geschlungene, zu  $k_3$  ähnliche PASCALSche Schnecken; diese oskulieren die zwei Kurvenzüge von  $e$  in den reellen Knoten.

Da schließlich  $k_1$  und  $k_3$  auch bei den Bewegungen  $\bar{B}_1 = [r, -r/2]$  bzw.  $\bar{B}_3 = [h, -h/2]$  neben CAMUS-Bahnen die Kurve  $e$  einhüllen, tritt  $e$  in insgesamt 10 Fällen als Resthüllbahn auf. Satz 1 ergibt somit 20 verschiedene Fertigungsmöglichkeiten für  $e$ .

In Tafel VI ist  $h = 50$  ,  $r = 22$  gewählt worden.

Beispiel 7:  $r' : r = 2 : 3$  (siehe Tafel VII): Die zweibogige Epitrochoide  $k_1 = [2r/3, r; h]$  und der äußere Teil der Hüllbahn  $e$  dieses Falles bilden bei  $h > |r|$  Läufer und Gehäuse des Kreiskolbenkompressors von BORSIG.  $k_1$  und die innere Kontur von  $e$  sind Gehäuse und (theoretisch mögliches) Läuferprofil beim NSU-WANKEL-Motor (siehe etwa [35], [1] oder [12]).  $e$  ist zugleich Hüllbahn der vierbogigen Hypotrochoide  $k_2 = [4r/3, r; h]$  bei der Umkehrbewegung  $B_2 = [r, 4r/3]$  zu ihrer Erzeugung.

Ferner tritt  $e$  als Resthüllkurve bei den Bewegungen  $B_3 = [h, h/3]$  und  $\bar{B}_3 = [-h, h/3]$  der geschlungenen PASCAL-

1.5 Der Fall  $R' = r$  ,  $R = r'$

schen Schnecke  $k_3 = [h/3, 2h/3; 2r/3]$  und bei der Bewegung  $B_4 = [h, 4h/3]$  der zwei konzentrischen, durch  $90^\circ$  gegeneinander verdrehten Ellipsen  $k_4 = [4h/3, 2h/3; 2r/3]$  auf (vgl. Satz 16, Seite 55).  $e$  ist auch Resthüllbahn der gestreckten PASCALSchen Schnecke  $k_5 = [2h/3, -2h/3; 2r/3]$  bei  $B_5 = [h, 2h/3]$  (in der in Tafel VII gezeichneten Lage berührt  $k_5$  in  $H$  die Hüllbahn vierpunktig), der Cardioide  $k_6 = [h/3, -h/3; h/3]$  bei  $B_6 = [r, r/3]$  und der fünfspitzigen Hypotrochoide  $k_7 = [5h/3, h/3; h/3]$  bei  $B_7 = [r, 5r/3]$ .

Als CAMUS-Bahn bzw. Bahn der Spitzen tritt bei der Bewegung  $B_3$  von  $k_3$ , bei  $k_4$  und  $k_6$  eine dreizählige Hypotrochoide, bei der Bewegung  $\bar{B}_3$  von  $k_3$ , bei  $k_5$  und  $k_7$  eine dreizählige Epitrochoide auf.

In Tafel VII wurde  $r = 30$  ,  $h = 2r = 60$  gewählt. Bei dieser Annahme hat  $k_5$  einen Flachpunkt. Bei  $h = 3r$  gäbe es Lagen, in welchen  $k_1$  die Hüllbahn 6-punktig berührte, sich also besonders gut an die äußere Kontur der Hüllbahn anschmiegte (siehe Satz 20b, Seite 66); bei dieser Annahme hätte  $k_2$  vier Flachpunkte.

2. NETZPROJEKTION QUASIELLIPTISCHER SCHRAUBSCHIEBFLÄCHEN

2.1 Kinematische Abbildung und Netzprojektion

Der Ausgangspunkt für eine synthetische Behandlung der von W. BLASCHKE [3] und J. GRÜN WALD [10] entwickelten kinematischen Abbildung ist folgende Abbildung von Raumgeraden  $g$  auf die linken und rechten Bildpunkte  $G^L, G^R$  in der Bildebene  $\Pi$  (bei Verwendung kartesischer Koordinaten soll  $\Pi$  die Gleichung  $z = 0$  haben): Die Schnittpunkte von  $g$  mit den Ebenen  $z = -1$  und  $z = +1$  werden normal nach  $\Pi$  projiziert und um ihren Mittelpunkt  $G$ , den Spurpunkt von  $g$  in  $\Pi$ , durch  $+90^\circ$  zu  $G^L$  bzw.  $G^R$  gedreht (siehe Abb.8).

Diese Abbildung hat folgende wichtige Eigenschaft: Die Raumgeraden mit gleichem linken (rechten) Bildpunkt  $G^L$  ( $G^R$ ) bilden ein links-(rechts-)gewundenes Drehnetz mit  $G^L$  ( $G^R$ ) als Mitte. Die Achsen dieses Netzes sind "rechts-(links-)seitige" konjugiert komplexe Geraden in den

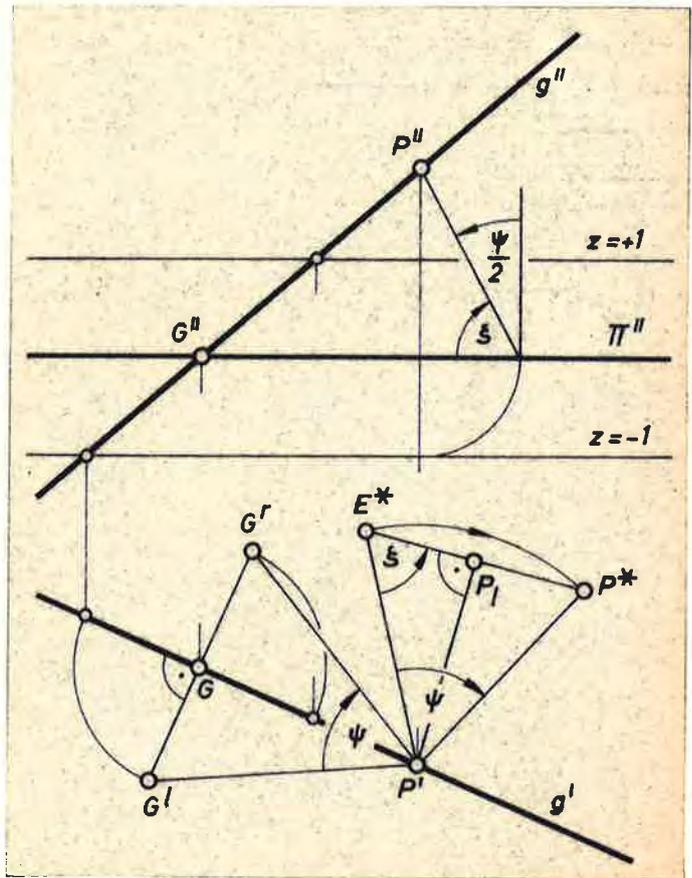


Abb. 8

Ebenen  $z = \pm i$  durch die absoluten Kreispunkte von  $\Pi$ .<sup>11)</sup>

Die Gesamtheit der rechts- und linksseitigen Achsen, also zwei Paare verschränkter Strahlbüschel, als absolutes Gebilde einer projektiven Maßbestimmung aufgefaßt, erteilen dem Raum eine quasielliptische Struktur. Raumgeraden mit gleichem linken (rechten) kinematischen Bildpunkt können nach CLIFFORD als

<sup>11)</sup> Zum Beweis siehe [3], [10] oder etwa [2], [5], [23], [34].

## 2.1 Kinematische Abbildung und Netzprojektion

links-(rechts-)parallel bzgl. dieses absoluten Gebildes bezeichnet werden. Die direkte Beziehung zwischen der quasi-elliptischen Raumgeometrie und der ebenen Kinematik wird hergestellt durch

Satz 9:<sup>11)</sup> Fundamentalsatz der kinematischen Abbildung: Unterwirft man die Raumgeraden einer quasielliptischen Links-(Rechts-)schiebung, bei der also die Punkte auf links-(rechts-)parallelen Geraden wandern, so bleiben die rechten (linken) Bildpunkte fest, während die linken (rechten) einer Drehung um den gemeinsamen linken (rechten) Bildpunkt der Bahngeraden unterworfen werden. Der Drehwinkel ist gleich der doppelten quasielliptischen Schieblänge. Er ist positiv, wenn die Linksschiebung von oben nach unten, also von positiven z-Werten über Null zu negativen, und die Rechtsschiebung von unten nach oben erfolgt.

Bei Raumgeraden durch den zu  $\Pi$  normalen Fernpunkt E fallen beide Bildpunkte mit dem Spurpunkt zusammen. E kann durch Rechtsschiebung in jeden nicht dem absoluten Gebilde angehörenden Raumpunkt P übergeführt werden. Aus dem Fundamentalsatz folgt: Es können die linken Bildpunkte der Geraden durch P mit den zugehörigen rechten durch eine Drehung zur Deckung gebracht werden. Mittelpunkt dieser Drehung ist der Spurpunkt der Geraden EP, also der Normalriß P' von P. Hat P die Höhe z über  $\Pi$ , so gilt für den Drehwinkel  $\psi$ :

$\text{ctg } \frac{\psi}{2} = -z$ . Diese Drehung wird nun als Bild des Raumpunktes P in der kinematischen Abbildung angesehen.

Unterwirft man einen fix vorgegebenen Punkt E\* in  $\Pi$  der dem Punkt P in der kinematischen Abbildung entsprechenden Drehung, so erhält man einen eindeutigen Bildpunkt P\* (siehe Abb.8). Diese Abbildung der Raumpunkte auf Punkte in  $\Pi$  werde kurz E\*-Abbildung genannt. (In dieser Abbildung entspricht z.B. einer Raumkurve die Bahn des Punktes E\* in dem durch die kinematische Abbildung zugeordneten eingliedrigen Bewegungsvorgang). P\* ist das rechte kinematische Bild jener Geraden h durch P, deren linkes Bild E\* ist. Alle Geraden mit dem linken

## 2.2 Quasielliptische Schraubung und ihre Abbildung

Bildpunkt  $E^*$  sind zueinander linksparallel; sie bilden das Grundnetz der  $E^*$ -Abbildung. Der Spurpunkt von  $h$ , aufzufassen als durch das Grundnetz vermittelter Netzriß  $P_1$  von  $P$  nach  $\Pi$ , liegt in der Mitte zwischen den zwei Bildpunkten  $E^*$  und  $P^*$ . Somit folgt:

Satz 10 (R. BEREIS [2], Satz 4): Das Bild  $P^*$  des Raumpunktes  $P$  in der  $E^*$ -Abbildung geht durch eine Streckung aus  $E^*$  im Verhältnis  $2 : 1$  in eine Netzprojektion von  $P$  über. Das zugehörige Abbildungsnetz ist ein linksgewundenes Drehnetz mit  $E^*$  als Mitte. Die Netzachsen gehören dem der kinematischen Abbildung zugrundeliegenden absoluten Gebilde an.

Satz 10 ergibt sich auch unmittelbar aus der Tatsache, daß nach [22] der Netzriß  $P_1$  des Raumpunktes  $P$  mit der Höhe  $z$  über  $\Pi$  aus dem Normalriß  $P'$  durch eine Drehstreckung um  $E^*$  mit dem Drehwinkel  $\xi$  und dem Ähnlichkeitsverhältnis  $1 : \cos \xi$  hervorgeht. Dabei ist die "Winkelkote"  $\xi$  gegeben durch  $\operatorname{tg} \xi = z$  (siehe Abb.8).  $\xi$  gibt, wie aus der LAGUERRESchen Winkelformel folgt, die quasielliptische Höhe von  $P$  über  $\Pi$  an.

Im folgenden werden gemäß Satz 10 die durch das Grundnetz vermittelten Linksnetzrisse von Raumbildern mit Hilfe der dazu zentrisch ähnlichen Bilder in der  $E^*$ -Abbildung bestimmt.

## 2.2 Quasielliptische Schraubung und ihre Abbildung

2.2.1 Quasielliptische Schraubung: Dreht man in  $\Pi$  das Feld der rechten kinematischen Geradenbildpunkte um einen Punkt  $S^r$  durch den Winkel  $2c_1t$ , das der linken um einen Punkt  $S^l$  durch  $2c_2t$  ( $c_1$  und  $c_2$  seien zueinander teilerfremde ganze Zahlen, aufzufassen als Geschwindigkeiten;  $t$  sei ein Parameter), so werden die zugehörigen Raumgeraden einer quasielliptischen Schraubung unterworfen. Nach Satz 9 ist diese das kommutative Produkt aus einer Rechtsschiebung mit der Länge  $c_1t$  und einer Linksschiebung mit der Länge  $c_2t$ .

Die Gerade  $s$  mit den kinematischen Bildern  $S^r$  und  $S^l$

## 2.2 Quasielliptische Schraubung und ihre Abbildung

ist Bahngerade für beide Schiebungen und heißt Schraubachse. Die Ebenen durch  $s$  werden bei dieser Schraubung einer quasielliptischen Drehung durch den Winkel  $(c_1 + c_2)t$  unterworfen; die waagrechten, d.h. zu  $\Pi$  parallelen Ebenen drehen sich um die Ferngerade von  $\Pi$  durch den quasielliptischen Winkel  $(c_1 - c_2)t$ . Das Verhältnis dieser Drehwinkel heißt Schraubparameter  $p$ ; es gilt 
$$p = \frac{c_1 + c_2}{c_1 - c_2}.$$

Die Bahnkurven der Punkte bei dieser Schraubung liegen auf CLIFFORDSchen Flächen mit der Achse  $s$ ; dies sind Flächen 2. Grades durch die vier  $s$  schneidenden absoluten Geraden.

Die grundlegenden Arbeiten zu nichteuklidischen Schraubungen stammen von F. LINDEMANN [15] und K. STRUBECKER [32] und [33]. Die Abbildung nichteuklidischer Schraubungen in euklidischer und nichteuklidischer Parallelprojektion hat bereits W. WUNDERLICH [36] untersucht, wobei mit Hilfe dieser Abbildungen eine Reihe interessanter Eigenschaften nichteuklidischer Schraubflächen abgeleitet worden ist. F. HOHENBERG [11] hat die Netzprojektion verwendet, um Maß- und Lagenaufgaben der nichteuklidischen Raumgeometrie auf ebene Konstruktionen zurückzuführen.

2.2.2 Bild einer Rechtsschiebung in der  $E^*$ -Abbildung: Das Bild  $P^*$  eines Punktes  $P$  ist der rechte kinematische Bildpunkt jener Geraden durch  $P$ , deren linkes Bild  $E^*$  ist. Aus dem Fundamentalsatz (Satz 9) folgt

- (8) Einer Rechtsschiebung entspricht in der  $E^*$ -Abbildung eine Drehung um den rechten kinematischen Bildpunkt der Bahngeraden. Der Drehwinkel ist gleich der doppelten quasielliptischen Schieblänge.

2.2.3 Bild einer Geraden: Dem Spurpunkt  $G$  einer Geraden  $g$  entspricht in der kinematischen Abbildung eine Drehung um  $G$  durch  $180^\circ$ ; daher ergänzt dessen Bildpunkt  $G^*$  (siehe Abb.9) das Dreieck  $G^1, E^*, G^r$  zu einem Parallelogramm.  $G$  kann durch Rechtsschiebungen längs  $g$  in jeden anderen Punkt von  $g$  übergeführt werden. Nach (8) gilt somit

- (9) Das Bild einer nicht waagrechten Geraden  $g$  in der  $E^*$ -Ab-

## 2.2 Quasielliptische Schraubung und ihre Abbildung

bildung ist ein Kreis  $g^*$  mit der Mitte  $G^r$  durch  $G^*$ ; sein Radius ist gleich dem Abstand  $E^*G^l$  (vgl. [34] und [36]). Das Bild des Punktes  $G_\xi$  auf  $g$  mit der quasielliptischen Höhe  $\xi$  geht aus  $G^*$  durch Drehung um  $G^r$  durch  $2\xi$  hervor.

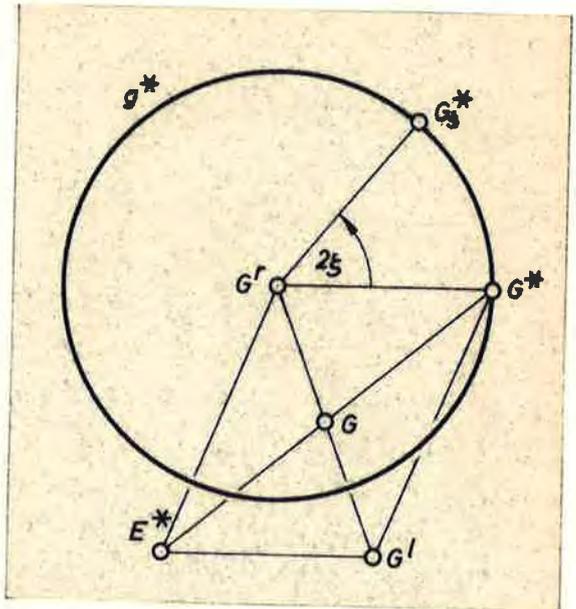


Abb. 9

2.2.4 Bild einer Linksschiebung: Zueinander linksparallele Geraden haben einen gemeinsamen linken kinematischen Bildpunkt  $G^l$ . Ihnen entsprechen in der  $E^*$ -Abbildung

nach (9) kongruente Kreise; die Strecken zwischen den Kreismitteln und den Bildern der zugehörigen Spurpunkte sind alle mit  $E^*G^l$  gleichgerichtet. Bei einer Linksschiebung mit der Länge  $c_2t$  längs diesem Geradennetz wird die quasielliptische Höhe der Raumpunkte um  $c_2t$  vermindert. Daher drehen sich die Bilder der Punkte aus  $\Pi$  (allgemeiner: aus einer waagrechten Ebene) auf den zugehörigen Bildkreisen der Bahngeraden nach (9) durch  $-2c_2t$ . Wegen der besonderen Anfangslage gilt

(10) Das Bild einer Linksschiebung der Länge  $c_2t$  in der  $E^*$ -Abbildung ist für Punkte einer waagrechten Ebene eine krumme Schiebung. Die Bahnkurven sind Kreise; der Drehwinkel auf den Bahnkreisen ist  $-2c_2t$ .

2.2.5 Bild einer Quasischraubung: Die Schraubung sei durch die Bilder  $S^r, S^l$  der Schraubachse  $s$  gegeben; sie werde aus den Links- und Rechtsschiebungen mit den Längen  $c_2t$  bzw.  $c_1t$  zusammengesetzt.  $P^*$  sei das Bild eines Punktes  $P$  aus  $\Pi$  (siehe Abb.10). Die durch  $P$  gehende Bahngerade der Linksschiebung habe die kinematischen Bildpunkte  $G^l = S^l$  und  $G^r$ . Da  $P^*$  das Bild des Spurpunktes ist, bilden die Punkte  $E^*, G^l, P^*, G^r$  ein Parallelogramm. Das Bild der Linksschiebung des Punktes  $P$  ist eine Drehung von  $P^*$  um  $G^r$  durch  $-2c_2t$ . Durch darauffolgende Drehung um  $S^r$  durch  $2c_1t$  als Bild der Rechtsschiebung

2.2 Quasielliptische Schraubung und ihre Abbildung

erhält man das Bild  $P_S^*$  des verschraubten Punktes  $P_S$ . Da das Verhältnis der Drehwinkel konstant ist, beschreibt  $P_S^*$  eine Trochoide.<sup>12)</sup>

Deren zweite Erzeugung erhält man, wenn man den Streckenzug  $S^r, G^r, P^*$  durch den Punkt  $S^*$  zu einem Parallelogramm ergänzt und nun die Glieder  $S^r S^*$  und  $S^* P^*$  mit proportionalen Geschwindigkeiten dreht. Da  $S^*$  das Bild des Spurpunktes von  $s$  und daher von  $P^*$

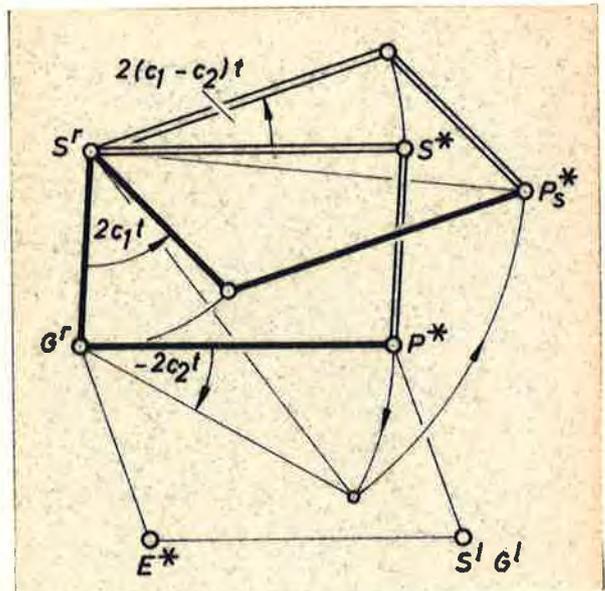


Abb. 10

unabhängig ist, beschreiben die Bilder aller Punkte aus  $\Pi$  Bahnkurven derselben Trochoidenbewegung:  $S^*$  dreht sich durch den Winkel  $2(c_1 - c_2)t$  um  $S^r$  und ist dann der Mittelpunkt einer Drehung des bewegten Feldes durch  $2c_1 t$ .<sup>13)</sup>

Satz 11: Eine quasielliptische Schraubung (Schraubachse  $s$ , Parameter  $p = (c_1 + c_2) : (c_1 - c_2)$ ) der Punkte von  $\Pi$  bildet sich in der  $E^*$ -Abbildung und analog in einer Linksnetzprojektion auf eine Trochoidenbewegung mit der Mitte  $S^r$  und dem Radienverhältnis  $r' : r = c_2 : (c_2 - c_1)$  ab. Der Mittelpunkt des bewegten Polkreises in der Anfangslage ist das Bild  $S^*$  des Spurpunktes der Schraubachse.

<sup>12)</sup> Siehe WUNDERLICH [36], Satz XIV. Dieses Ergebnis hängt unmittelbar damit zusammen, daß das kinematische Bild einer quasielliptischen Schraublinie eine Trochoidenbewegung ist (siehe [5], IV, Kap.11).

<sup>13)</sup> Lautet das Verhältnis dieser Drehwinkel allgemein  $v_1 : v_2$ , so verhalten sich die Radien des festen und bewegten Polkreises wie  $r' : r = (v_1 - v_2) : v_1$ .

### 2.3 Schraub-schiebflächen

Satz 12:<sup>14)</sup>  $k$  sei eine quasielliptische Schraublinie mit der Achse  $a$  und dem Parameter  $(d_1+d_2):(d_1-d_2)$ . Sie werde einer quasielliptischen Schraubung mit der zu  $a$  linksparallelen Achse  $s$  und dem Schraubparameter  $(c_1+c_2):(c_1-c_2)$  unterworfen. Dann gilt:

1. Die dadurch erzeugte Fläche  $\Phi$  kann bei  $d_2 \neq 0$  und  $c_1d_2 - c_2d_1 \neq 0$  auch durch krumme Rechtsschiebung von  $k$  erzeugt werden. Die Bahnkurven dieser Schiebung, eine zweite Schar von Schiebkurven ("Linksschiebkurven") auf der Fläche, sind Schraublinien mit zu  $s$  rechtsparallelen Achsen und dem Parameter  $(c_1d_2 + c_2d_1) : (c_1d_2 - c_2d_1)$ .

2. Die Spurkurve von  $\Phi$  in einer waagrechteten Ebene, also der quasielliptische Normalschnitt von  $\Phi$ , besteht bei  $d_1 \neq d_2$  und  $(d_1, d_2) = (c_1, c_2) = 1$  aus  $(c_1 - c_2, d_1 - d_2)$  kongruenten Trochoiden  $l$  mit dem Spurpunkt  $S$  von  $s$  als Mittelpunkt, erzeugbar beim Radienverhältnis  $d_1(c_1 - c_2) : c_1(d_1 - d_2)$ ; der Spurpunkt  $A$  von  $a$  ist Mitte des Rollkreises in der Anfangslage.

Dieses Ergebnis gilt auch dann, wenn bei  $d_1 = 1, d_2 = 0$   $k$  eine Gerade ist, also für quasielliptische Regelschraubflächen. In diesem Fall ist  $a$  die zu  $k$  rechtsparallele und zu  $s$  linksparallele Gerade.

3. Die Fläche  $\Phi$  ist bei  $c_1d_1 - c_1d_2 + c_2d_1 \neq 0$  und  $c_1(d_1 - d_2) \neq 0$  auch durch krumme Rechtsschiebung einer Schraublinie  $m$  erzeugbar:  $m$  hat eine zu  $s$  rechtsparallele Achse  $b$  und den Parameter  $(2c_1d_1 - c_1d_2 + c_2d_1) : (c_1d_2 - c_2d_1)$ . Die zugehörige Schar von Linksschiebkurven besteht aus Schraublinien mit zu  $s$  rechtsparallelen Achsen und dem Parameter  $(c_1d_1 - c_1d_2 + 2c_2d_1) : c_1(d_1 - d_2)$ . Wieder gilt dieses Ergebnis bei  $d_1 = 1$  und  $d_2 = 0$  auch für Regelschraubflächen. Es sind also die quasielliptischen Regelschraubflächen ebenfalls Schiebflächen.

<sup>14)</sup> Die Abschnitte 1. und 2. dieses Satzes sind mit WUNDERLICH [36], Satz XVI identisch. Die Beweise sind gegenüber WUNDERLICH etwas abgeändert. Vergleiche auch den analogen euklidischen Fall in [7] und [21].

### 2.3 Schraub-schiebflächen

Beweis: Ad 1. Die Schraublinie  $k$  liegt auf einer CLIFFORDfläche  $\Psi$  mit der Achse  $a$ .  $k_s$  sei eine um  $s$  verschraubte Lage auf der CLIFFORDfläche  $\Psi_s$  mit der Achse  $a_s$ . Diese Schraubung wird aus einer Rechtsschiebung mit der Länge  $c_1 t$  parallel zu  $s$  (kurz: Rechtsschiebung  $c_1 t // s$ ) und einer Linksschiebung  $c_2 t // s$  zusammengesetzt.

$a$  muß bereits durch die Rechtsschiebung  $c_1 t // s$  in  $a_s$  übergehen, denn  $a$  bleibt dabei zu  $s$  linksparallel <sup>15)</sup> und ist daher bei der Linksschiebung  $c_2 t // s$  Bahngerade, bleibt also fest. Damit kommt zugleich  $\Psi$  nach  $\Psi_s$ . Durch die Rechtsschiebung  $c_1 t // s$  sollen  $k$  in  $k_1$  und ein Spurpunkt  $P$  von  $k$  in  $P_1$  übergehen.  $k_1$  und  $k_s$  liegen nun auf derselben CLIFFORDfläche  $\Psi_s$  und sind kongruent (siehe Abb.11). Sie können nicht nur durch die Linksschiebung  $c_2 t // s$ , sondern auch durch eine Rechtsschiebung zur Deckung gebracht werden, falls  $k$  keine rechtsseitige Erzeugende von  $\Psi$  ist, d.h.  $d_2 \neq 0$ . Es schneidet nämlich jede rechtsseitige Erzeugende von  $\Psi$  die Schraublinie  $k$  in  $|d_2|$  Punkten. Die Länge dieser Rechtsschiebung wird eindeutig durch die Forderung, daß sie mit  $t \rightarrow 0$  ebenfalls gegen Null gehen soll.

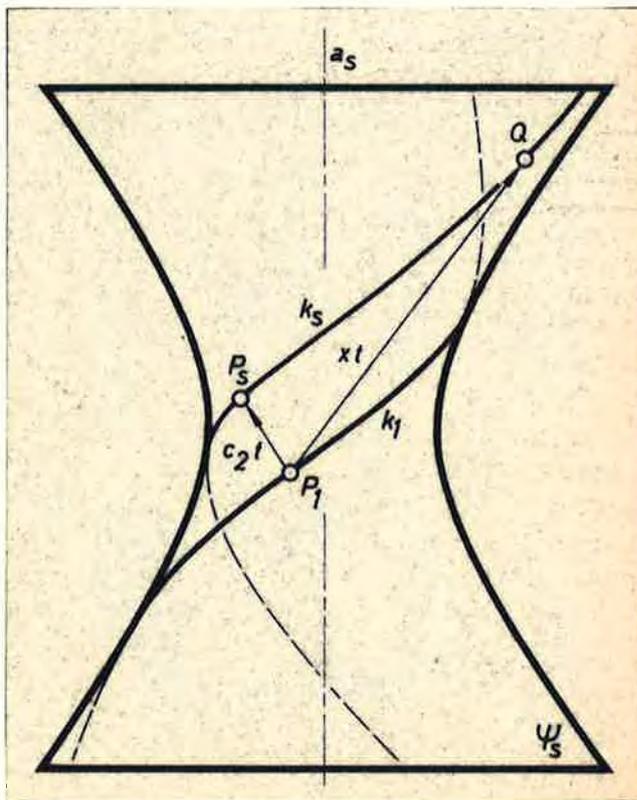


Abb. 11

$P_1$  gelange durch diese Rechtsschiebung  $// a_s$  - ihre Länge sei mit  $x t$  bezeichnet - in den Punkt  $Q$  auf  $k_s$ . Die Linksschiebung  $c_2 t // s$  und damit auch  $// a_s$  bringt  $P_1$  nach  $P_s$  auf  $k_s$ . Da nun  $P_s$  durch die Linksschiebung  $- c_2 t // a_s$  und die Rechtsschiebung  $x t // a_s$  wieder in einen Punkt auf  $k_s$ , nämlich

<sup>15)</sup> Rechts-(Links-)Schiebungen erhalten die Links-(Rechts-)Parallelität; dies folgt unmittelbar aus Satz 9.

### 2.3 Schraub-schiebflächen

in  $Q$  übergeht, gilt für das Verhältnis der Schieblängen:

$$xt : (-c_2 t) = d_1 : d_2, \text{ somit } x = -\frac{c_2 d_1}{d_2}.$$

(11)  $k$  geht also durch die Rechtsschiebungen  $c_1 t // s$  und  $-\frac{c_2 d_1}{d_2} t // a_s$  in  $k_s$  über.

Falls  $Q$  nicht in  $\Pi$  liegt, also  $c_1 d_2 - c_2 d_1 \neq 0$ , ist der Übergang von  $k$  nach  $k_s$  durch eine einzige Rechtsschiebung herzustellen; die bei Verschraubung von  $k$  überstrichene Fläche  $\Phi$  ist auch durch krumme Rechtsschiebung erzeugbar.

Die Bahnkurven dieser krummen Rechtsschiebung gehen wegen der Kommutativität von Links- und Rechtsschiebung auseinander durch Linksschiebungen hervor. Ein Punkt von  $a$  geht durch die Rechtsschiebung  $c_1 t // s$  in einen Punkt von  $a_s$  über und bewegt sich bei der Rechtsschiebung  $-\frac{c_2 d_1}{d_2} t // a_s$  auf  $a_s$ . Da  $a_s$  zu  $s$  linksparallel ist, ist die zweite Rechtsschiebung für Punkte von  $a_s$  zugleich eine Linksschiebung  $+\frac{c_2 d_1}{d_2} t // s$ . Die Bahnkurven der Punkte von  $a$  bei den Rechtsschiebungen (11) sind also Schraublinien mit der Achse  $s$  und dem Schieblängenverhältnis  $c_1 d_2 : c_2 d_1$ . Durch Linksschiebungen folgt daraus das allgemeine Ergebnis. Bei  $c_1 d_2 - c_2 d_1 = 0$  sind die Linksschiebungen waagrechte Kreise;  $\Phi$  ist dann eine quasielliptische Kreisschraubfläche.

Ad 2. Man kommt von einem Spurpunkt  $P$  von  $k$  zu einem Spurpunkt  $R$  von  $k_s$  auf folgende Weise:  $P$  wird um  $s$  nach  $P_s$  auf  $k_s$  und hierauf um  $a_s$  längs  $k_s$  nach  $R$  in  $\Pi$  verschraubt.  $P_s$  hat die quasielliptische Höhe  $(c_1 - c_2)t$ . Bei einer Verschraubung längs  $k_s$  (Schieblängen  $d_1 \bar{t}$ ,  $d_2 \bar{t}$ ) nimmt die Höhe um  $(d_1 - d_2)\bar{t}$  zu. Soll  $P_s$  dadurch in die Ebene  $\Pi$  kommen, so muß gelten:  $\bar{t} = -\frac{c_1 - c_2}{d_1 - d_2} t$ .

Nun wird der Spurpunkt  $A$  von  $a$  mit  $P$  mitbewegt: Bei der Verschraubung um  $s$  dreht sich die waagrechte Gerade  $AP$  durch  $(c_1 + c_2)t$  und bleibt dabei zu  $\Pi$  parallel; bei der Schrau-

### 2.3 Schraubtriebflächen

bung um  $a_s$  dreht sie sich durch  $-\frac{(d_1 + d_2)(c_1 - c_2)}{d_1 - d_2} t$  und

kommt nach  $\Pi$ . Dabei geht A in den Spurpunkt  $A_s$  von  $a_s$  über. Die Strecke  $A_s R$  ist also gegenüber AP durch den Winkel

$$\left[ c_1 + c_2 - \frac{(d_1 + d_2)(c_1 - c_2)}{d_1 - d_2} \right] t = \frac{2(c_2 d_1 - c_1 d_2)}{d_1 - d_2} t \text{ verdreht.}$$

Andererseits geht die Strecke SA (S sei der Spurpunkt von s) nach der Rechtsschiebung  $c_1 t // s$  und einer Linksschiebung  $c_1 t // a_s$  und zugleich  $// s$  in die Strecke  $SA_s$  in  $\Pi$  über;  $SA_s$  ist daher um  $2c_1 t$  gegenüber der Ausgangslage SA verdreht. Aus der Lage des Streckenzuges SAP gegenüber dem Streckenzug  $SA_s R$  und aus Fußnote 13 folgt: Die vom Punkt P beschriebene Spurkurve l ist eine Trochoide mit der Mitte S und dem Radienverhältnis  $d_1(c_1 - c_2) : c_1(d_1 - d_2)$ ; dieses Verhältnis ist noch durch das Produkt der größten gemeinsamen Teiler  $(c_1, d_1)(c_1 - c_2, d_1 - d_2)$  kürzbar.

k hat  $|d_1 - d_2|$  eigentliche Spurpunkte in  $\Pi$ , die ein regelmäßiges Vieleck mit A als Mitte bilden (siehe [32] oder [33]). Die Trochoide l wird zugleich von

$$\left| \frac{c_1(d_1 - d_2)}{(c_1, d_1)(c_1 - c_2, d_1 - d_2)} \right| \text{ Punkten beschrieben (siehe [24]),}$$

die ebenfalls ein regelmäßiges Vieleck mit der Mitte A bilden. Beide Vielecke haben mit einem Spurpunkt zugleich

$$\left| \frac{d_1 - d_2}{(c_1 - c_2, d_1 - d_2)} \right| \text{ Eckpunkte (= größter gemeinsamer Tei-}$$

ler der Eckenanzahlen) gemeinsam. Um alle  $|d_1 - d_2|$  Spurpunkte von k zu erfassen, sind daher  $(c_1 - c_2, d_1 - d_2)$  Trochoiden nötig. Es nimmt jedoch eine davon im Laufe der Verschraubung bei den Durchgängen durch  $\Pi$  die Lagen aller anderen an, bevor sie wieder in ihre Ausgangslage kommt.

Ad 3. Die Fläche  $\Phi$  ist durch die Angabe einer Trochoide l des Normalschnittes und des Schraubparameters eindeutig bestimmt, außer bei  $c_1 = c_2$ , wo die Schraubung eine Drehung um s ist und der Normalschnitt aus Kreisen besteht. Erzeugt man l auf die zweite Weise durch das Radienverhältnis

### 2.3 Schraub-schiebflächen

$d_1(c_1 - c_2) : (c_1 d_2 - c_2 d_1)$ , so bleibt  $\Phi$  gleich; gemäß 2. wird  $\Phi$  nun jedoch durch Verschraubung einer Schraublinie  $m$  mit zu  $s$  linksparalleler Achse  $b$  und dem Parameter  $(\bar{d}_1 + \bar{d}_2) : (\bar{d}_1 - \bar{d}_2)$  erzeugt.<sup>16)</sup> Dabei gilt  $\bar{d}_1(c_1 - c_2) : c_1(\bar{d}_1 - \bar{d}_2) = d_1(c_1 - c_2) : (c_1 d_2 - c_2 d_1)$ . Daraus folgt

$$(12) \quad \bar{d}_1 = c_1 d_1, \quad \bar{d}_2 = c_1 d_1 - c_1 d_2 + c_2 d_1.$$

Ersetzt man in 1.  $d_1$  durch  $\bar{d}_1$ ,  $d_2$  durch  $\bar{d}_2$ , so folgt bei  $\bar{d}_2 \neq 0$  alles weitere. Der Spurpunkt  $B$  der Schraubachse  $b$  von  $m$  ist der Mittelpunkt des bewegten Polkreises bei der zweiten Erzeugung von  $l$  in der Anfangslage, bildet also zusammen mit den Punkten  $S$ ,  $A$  und  $P$  ein Parallelogramm.

Satz 12a: Bei  $c_1 = c_2 = 1$  sind die Schraub-schiebflächen  $\Phi$  des Satzes 12 quasielliptische Drehflächen mit der Achse  $s$ . Diese sind bei  $d_2 \neq 0$  und  $2d_1 \neq d_2$  durch krumme Rechtsschiebung von insgesamt vier verschiedenen Schraublinien mit zu  $s$  rechtsp parallelen Achsen erzeugbar: Mit der Achse  $a$  die Schraublinien  $k$  [Schraubparameter  $(d_1 + d_2) : (d_1 - d_2)$ ] und  $\bar{k}$  [ $(3d_1 - d_2) : (d_2 - d_1)$ ], mit der Achse  $b$  die Schraublinien  $m$  [ $(3d_1 - d_2) : (d_2 - d_1)$ ] und  $\bar{m}$  [ $(d_1 + d_2) : (d_1 - d_2)$ ]. Gemeinsam mit den zugehörigen Linksschiebkurven trägt  $\Phi$  insgesamt 8 Scharen von jeweils quasielliptisch kongruenten Schraublinien. Nur wenn  $k$  die Achse  $s$  schneidet, fallen diese Schraublinienscharen paarweise zusammen. Bei  $d_2 = 0$  sind  $k$  und  $\bar{m}$ , bei  $d_2 = 2d_1$  sind  $\bar{k}$  und  $m$  Erzeugende verschiedener Scharen auf einer Fläche 2. Grades.

Beweis: Die Drehfläche werde durch eine Linksnetzprojektion in die Normalschnittebene  $\Pi$  abgebildet, wobei  $s$  und  $a$  dem Abbildungsnetz angehören sollen. Somit bilden sich  $s$  und  $a$  auf Punkte  $s_1$  bzw.  $a_1$  ab; das Bild der Schraublinie  $k$  ist ein Kreis  $k_1$  mit der Mitte  $a_1$  (vgl. [11] oder [36]).  $P = P_1$

<sup>16)</sup> Dieselbe Überlegung hat bereits L. BURMESTER [7] verwendet, um bei dem analogen euklidischen Fall die zweite Schar kongruenter Schraublinien auf der Fläche - nach E. MÜLLER [21] die zweite Schieb-kurvenscharen - nachzuweisen.

### 2.3 Schraub-schiebflächen

sei ein Spurpunkt von  $k$  in  $\Pi$  (siehe Abb.12).

Durch die Rechtsschiebung  $d_1 t // a$  und die Linksschiebung  $d_2 t // a$  gehe  $P$  in  $Q$  auf  $k$  über;  $Q$  hat dann die quasielliptische Höhe  $(d_1 - d_2)t$  über  $\Pi$ . Da die Linksschiebung die Netzbilder unverändert läßt, entsteht das Netzbild  $Q_1$  von  $Q$  aus  $P_1$  wegen 2.2, (8) durch Drehung um  $a_1$  durch den Winkel  $2d_1 t$ . Das Netzbild des auf  $\Phi$  liegenden Parallelkreises  $p$  durch  $Q$  ist der Kreis  $p_1$  um  $s_1$  durch  $Q_1$ .

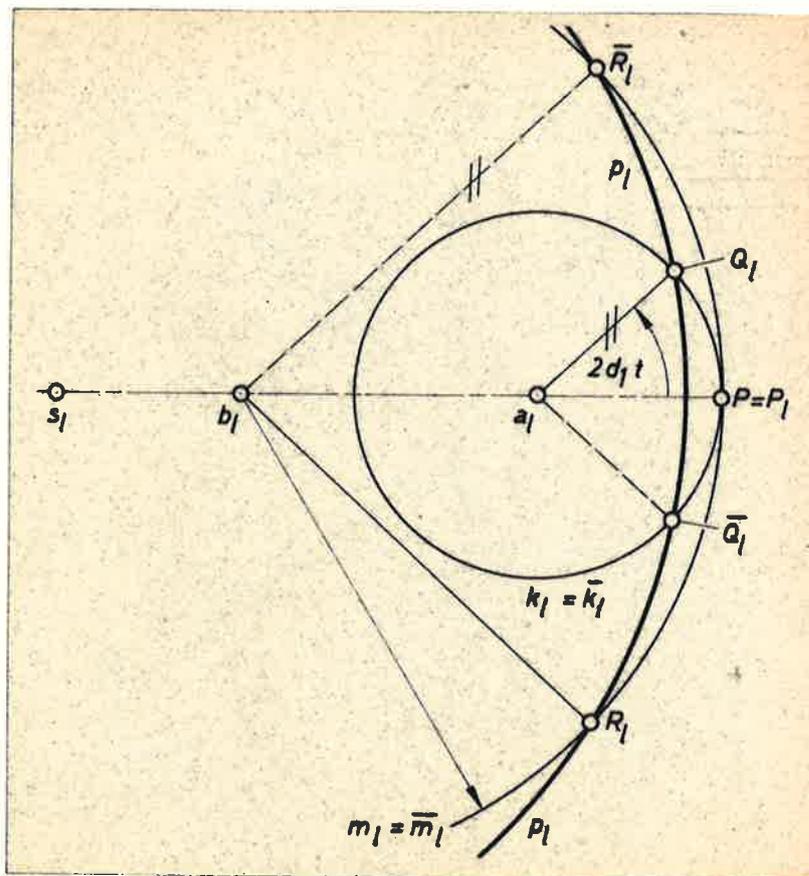


Abb. 12

$P$  sei auf der Geraden  $s_1 a_1$  angenommen, was bei der Drehfläche  $\Phi$  immer erreicht werden kann. Dreht man  $P$  auf  $k_1$  im entgegengesetzten Sinn, also durch  $-2d_1 t$ , so erhält man wieder einen Punkt  $\bar{Q}_1$  auf  $p_1$ . Wenn nun das Urbild  $\bar{Q}$  von  $\bar{Q}_1$  ebenfalls in der Höhe  $(d_1 - d_2)t$  über  $\Pi$  liegt, so gehört  $\bar{Q}$  wieder der Fläche  $\Phi$  an;  $\bar{Q}$  liegt nun aber auf einer Schraublinie  $\bar{k}$  mit der Achse  $a$  und dem Schieblängenverhältnis  $\bar{d}_1 : \bar{d}_2$  bei  $\bar{d}_1 = -d_1$ ,  $\bar{d}_1 - \bar{d}_2 = d_1 - d_2$ ; also gilt  $\bar{d}_1 : \bar{d}_2 = d_1 : (2d_1 - d_2)$ . Dies stimmt mit (12) bei  $c_1 = c_2 = 1$  überein.

Wählt man auf der Geraden  $s_1 P$  einen Punkt  $b_1$ , wobei  $\vec{s_1 b_1} = \vec{a_1 P}$ , und dreht man  $P$  auf dem Kreis  $m_1$  mit der Mitte  $b_1$  durch die Winkel  $-2d_1 t$  bzw.  $+2d_1 t$ , so erhält man Punkte  $R_1$  bzw.  $\bar{R}_1$ , die wiederum auf  $p_1$  liegen. Haben die zugehörigen Urbilder  $R$  bzw.  $\bar{R}$  die Höhe  $(d_1 - d_2)t$ , so gehören sie

## 2.4 Abbildung der Schraubschiebflächen

ebenfalls der Fläche  $\Phi$  an. Andererseits aber liegen diese Urbilder auf Schraublinien  $m$  bzw.  $\bar{m}$  mit einer zu  $s$  linksparallelen Achse  $b$  durch den Punkt  $b_1$  und den in Satz 12a genannten Schraubparametern.

### 2.4 Abbildung der Schraubschiebflächen

Die im Satz 12 beschriebene Schraubschiebfläche  $\Phi$  ist durch Rechtsschiebungen (11) der Schraublinie  $k$  erzeugbar. Das Bild dieser Rechtsschiebungen in der  $E^*$ -Abbildung setzt sich nach 2.2, (8) zusammen

1. aus einer Drehung um  $S^r$  durch  $2c_1 t$  (dabei dreht sich der rechte kinematische Bildpunkt  $A^r$  der Achse  $a$  von  $k$  in das Bild  $A_s^r$  der verschraubten Achse  $a_s$ ),
2. aus einer Drehung um  $A_s^r$  durch  $-2 \frac{c_2 d_1}{d_2} t$ .

Das Bild ist also eine Trochoidenbewegung  $B_1$  mit der Mitte  $S^r$  und dem Radienverhältnis  $c_2 d_1 : c_1 d_2$ .  $A^r$  ist die Mitte des bewegten Systems in der Anfangslage. Das Bild von  $k$  ist nach Satz 11 eine Trochoide  $k^*$  mit der Mitte  $A^r$  und dem Radienverhältnis  $d_2 : (d_2 - d_1)$ . Der scheinbare Umriß  $f^*$  von  $\Phi$  in der  $E^*$ -Abbildung ist somit Hüllbahn von  $k^*$  bei der Bewegung  $B_1$ .

Dazu ist folgende Bemerkung nötig: Der wahre Netzumriß einer Fläche (vgl. [36]) ist Ort aller jener Punkte, in welchen es eine dem Abbildungsnetz angehörende Flächentangente gibt. Die Netzprojektionen und damit auch die Bilder in der  $E^*$ -Abbildung aller durch einen Umrißpunkt verlaufenden Flächenkurven berühren einander im Bild des Umrißpunktes. Wenn nun umgekehrt im Bild die Tangenten in einem Punkt  $P^*$  von  $k^*$  mit der Bahntangente in  $B_1$  zusammenfällt,  $P^*$  also ein Hüllpunkt ist, so ist das Urbild  $P$  entweder ein regulärer Umrißpunkt von  $\Phi$  oder die Tangente in  $P$  an  $k$  ist zugleich Schiebtangente; dann ist  $P$  ein Punkt einer Rückkehrkante auf  $\Phi$ , die ebenfalls zum wahren Umriß gezählt wird.

$\Phi$  ist auch durch Verschraubung der Spurkurve  $l$  erzeugbar. Das Bild dieser Schraubung um die Achse  $s$  mit dem Para-

## 2.4 Abbildung der Schraubschiebflächen

parameter  $(c_1+c_2):(c_1-c_2)$  ist nach Satz 11 eine Trochoidenbewegung  $B_2$  mit der Mitte  $S^r$  und dem Radienverhältnis  $c_2 : (c_2 - c_1)$ .  $S^*$  ist die Mitte des bewegten Systems in der Anfangslage. Das Bild der Spurkurve in der  $E^*$ -Abbildung besteht nach Satz 12,2. aus Trochoiden  $l^*$  mit dem Radienverhältnis  $d_1(c_1 - c_2) : c_1(d_1 - d_2)$  und mit der Mitte  $S^*$ . Der scheinbare Umriß  $f^*$  von  $\Phi$  ist somit auch Hüllbahn von  $l^*$  bei der Bewegung  $B_2$ .

Schließlich ist  $\Phi$  auch durch Rechtsschiebungen der Schraublinie  $m$  erzeugbar. Daher ist  $f^*$  auf eine dritte Weise Hüllbahn der Trochoide  $m^*$ . Die zugehörigen Radienverhältnisse erhält man, indem man in jenen für  $k^*$  und  $B_1$   $d_1$  durch  $\bar{d}_1$  und  $d_2$  durch  $\bar{d}_2$  nach 2.3,(12) ersetzt.

Satz 13: Der scheinbare Umriß der Schraubschiebflächen aus Satz 12 in der  $E^*$ -Abbildung und damit auch in einer Linksnetzprojektion in eine Normalschnittebene ist i.allg. auf dreifache Weise Hüllbahn von Trochoiden bei Trochoidenbewegungen. Die bewegten Trochoiden sind jeweils mit den Rollkreisen der zugehörigen Bewegungen konzentrisch.

Unter den in Satz 12 genannten Voraussetzungen gelten für die drei Trochoiden und die zugehörigen Bewegungen folgende Radienverhältnisse:

1.  $k^* \quad [d_2 : (d_2 - d_1)] = [d_2 : d_1]$   
 $B_1 \quad [c_2 d_1 : c_1 d_2]$
2.  $l^* \quad [d_1(c_1 - c_2) : c_1(d_1 - d_2)] = [d_1(c_1 - c_2) : (c_1 d_2 - c_2 d_1)]$   
 $B_2 \quad [c_2 : (c_2 - c_1)]$
3.  $m^* \quad [(c_1 d_1 - c_1 d_2 + c_2 d_1) : (-c_1 d_2 + c_2 d_1)] =$   
 $= [(c_1 d_1 - c_1 d_2 + c_2 d_1) : c_1 d_1]$   
 $B_3 \quad [c_2 d_1 : (c_1 d_1 - c_1 d_2 + c_2 d_1)].$

Da diese drei Erzeugungen gleichwertig sind, haben je drei Schraubschiebflächen denselben scheinbaren Umriß.

Die drei bewegten Trochoiden und ihre Anfangslagen können jeweils festgelegt werden durch das Radienverhältnis und durch

## 2.4 Abbildung der Schraubschiebflächen

das geordnete Punktequadrupel, bestehend aus dem Mittelpunkt des festen Polkreises der Trochoidenbewegung, dem Mittelpunkt des Rollkreises und zugleich der bewegten Trochoide, dem Mittelpunkt des bewegten Polkreises der Erzeugung der Trochoide sowie dem erzeugenden Bahnpunkt. Dann gilt (siehe Abb.13) nach den Sätzen 11 und 12

$$(13) \quad \begin{aligned} k^* &: S^r, A^r, A^*, P^* \\ l^* &: S^r, S^*, A^*, P^* \\ m^* &: S^r, B^r, B^*, P^* \end{aligned}$$

$P^*$  ist das Bild eines Spurpunktes von  $k$ ;  $B^*$  als Bild des Spurpunktes der zu  $s$  linksparallelen Achse  $b$  von  $m$  ist Mittelpunkt des Rollkreises bei der zweiten Erzeugung von  $l^*$ .

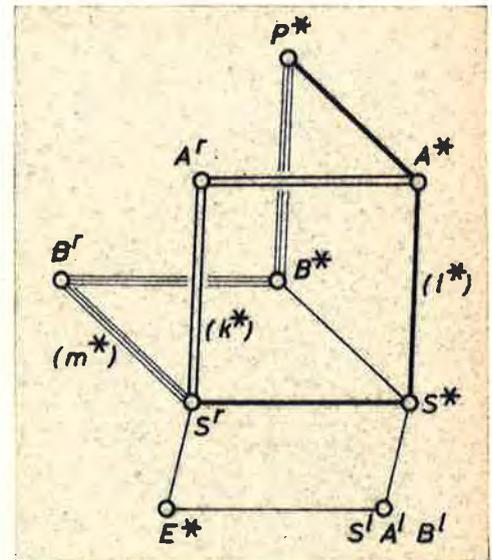


Abb. 13

Ein Vergleich von Abb.13 mit Abb.4 auf Seite 10 zeigt unmittelbar, daß der die ebene Kinematik betreffende Inhalt des Satzes 13, wonach also eine Trochoidenhüllbahn immer in drei Fällen zugleich auftritt, sich vollständig mit dem Inhalt des Satzes 3 deckt. Man braucht nur statt  $k^*$   $k_1$ , statt  $l^*$   $k_2$  und statt  $m^*$   $k_3$  zu setzen. Satz 3 ist also auch durch Netzprojektion quasielliptischer Schraubschiebflächen abzuleiten.

Der tiefere Grund für diese Beziehung zwischen Trochoidenhüllbahnen und Schraubschiebflächen ist in der kinematischen Abbildung zu suchen: Eine Fläche  $\Phi$  bildet sich in der kinematischen Abbildung auf einen zweigliedrigen Bewegungsvorgang ab; das Bild von  $\Phi$  in der  $E^*$ -Abbildung ist die Bahn des Punktes  $E^*$  bei diesem Bewegungsvorgang. Der scheinbare Umriss von  $\Phi$  ist auf Grund der in Satz 10 ausgedrückten Beziehung zur Netzprojektion der Ort der kurvenläufigen Lagen von  $E^*$ , also die Grenzlinie.

Nun sei  $\Phi$  eine Schraubschiebfläche aus Satz 12;  $\Phi$  entstehe also durch die in (11) angeführten Rechtsschiebungen der Schraublinie  $k$ . Den Punkten von  $k$  entsprechen in der kinemati-

## 2.4 Abbildung der Schraubschiebflächen

schen Abbildung die Lagen des bewegten Systems bei der Erzeugung der Trochoide  $k^*$  (Radienverhältnis  $d_2 : d_1$ ). Entsprechend den Rechtsschiebungen (11) werden nach Satz 9 alle diese Bewegungslagen noch der Trochoidenbewegung  $B_1$  [ $c_2 d_1 : c_1 d_2$ ] unterworfen, was schließlich zu  $\infty^2$  Lagen führt. Das kinematische Bild der Schraubschiebfläche  $\Phi$  ist damit aber genau mit dem zweigliedrigen Bewegungsvorgang  $B_{II}$  aus 1.1,(2) identisch, der dort der Bewegung  $B_1$  von  $k_1$  zugeordnet worden ist. Mit Hilfe der Sätze 2 und 10 wird nun klar, weshalb die scheinbaren Netzumrisse der Schraubschiebflächen die Hüllbahnen von Trochoiden bei Trochoidenbewegungen sind.

Bemerkung: Da derselbe zweigliedrige Bewegungsvorgang  $B_{II}$  auch bei der Bewegung  $B_2$  der Trochoide  $k_2$  aus Satz 3 auftritt (in der zweiten Anordnung aus 1.2,(5) ist ja  $\Sigma_3$  abermals das bewegte System), könnte auf Grund der obigen Beziehung auch rückwirkend auf das zweite Paar von Schiebkurvenscharen auf den Schraubschiebflächen geschlossen werden.<sup>17)</sup>

In 1.1 wurde gezeigt, daß sich von der Hüllbahn CAMUS-Bahnen abspalten, wenn der Rollkreis der Bewegung  $B_1$  mit dem Rastkreis einer Erzeugung von  $k_1$  identisch ist. Unter den drei verschiedenen Fällen aus Satz 3 mit gleicher Hüllbahn existiert dann immer einer, wo die bewegte Trochoide gespitzt ist und die CAMUS-Bahn nun als Bahn der Spitzen auftritt. Was entspricht diesen Trochoiden auf der Schraubschiebfläche?

Ist  $k^*$  gespitzt, so gehören einzelne Tangenten an  $k$  dem Abbildungsnetz bzw. Grundnetz der  $E^*$ -Abbildung an. Unterwirft man diese Tangenten den  $\Phi$  erzeugenden Rechtsschiebungen (11), so bleiben sie zur Ausgangslage linksparallel, also im Abbildungsnetz. Sie berühren  $\Phi$  längs Bahnkurven der krummen Rechtsschiebung, also längs einzelnen Linksschiebkurven; deren Bilder sind die Bahnen der Spitzen von  $k^*$ .

<sup>17)</sup> Der Satz 13 stellt übrigens einen kleinen Beitrag dar zu einer von W. BLASCHKE [4] aufgeworfenen Fragestellung: Dort wird angeregt, auch in der quasielliptischen Geometrie die Theorie jener Flächen zu entwickeln, die sich auf mehrere wesentlich verschiedene Weisen als Schiebflächen auffassen lassen und die Ergebnisse kinematisch zu deuten.

## 2.5 Regelschraubflächen und andere Sonderfälle

Besteht der Normalschnitt von  $\Phi$  aus gespitzten Trochoiden 1, so spalten sich von der wahren Umrißkurve die Bahnschraublinien der Spitzen, also Rückkehrkanten auf  $\Phi$  ab.

(14) Enthält somit  $f^*$  CAMUS-Bahnen, so sind diese das Bild von Rückkehrkanten auf  $\Phi$  oder von einzelnen Linksschiebkurven, in deren Punkten die Rechtsschiebtangenten dem Abbildungsnetz angehören.

In dem am Schluß von 1.4 genannten Sonderfall besteht die gesamte Hüllbahn aus CAMUS-Bahnen und Spitzenbahnen; auf der nach Satz 13 zugehörigen Schraubfläche  $\Phi$  wird die gesamte wahre Umrißkurve aus Schraublinien gebildet, nämlich aus Linksschiebkurven und Rückkehrkanten.

## 2.5 Regelschraubflächen und andere Sonderfälle

2.5.1 Regelschraubflächen: Die Fläche  $\Phi$  werde durch Verschraubung der nicht waagrecchten Geraden  $g$  um die Achse  $s$  mit dem Schraubparameter  $(c_1+c_2):(c_1-c_2)$  erzeugt. Die kinematischen Bildpunkte  $G_i^R$  bzw.  $G_i^L$  der einzelnen Erzeugenden  $g_i$  erhält man nach Satz 9, wenn man die kinematischen Bildpunkte  $G^R$  bzw.  $G^L$  von  $g$  um die Bildpunkte  $S^R$  bzw.  $S^L$  von  $s$  durch die Winkel  $2c_1t$  bzw.  $2c_2t$  dreht. In der  $E^*$ -Abbildung entspricht  $g_i$  nach 2.2,(9) ein Kreis  $g_i^*$  mit der Mitte  $G_i^R$  und einem Radius gleich dem Abstand  $E^*G^L$  (siehe Abb.14). Der scheinbare Umriß  $f^*$  von  $\Phi$  ist die Einhüllende dieser Erzeugendenbilder.

Für Regelschraubflächen gelten jedoch auch die Sätze 12, 2. und 3. sowie 13,2. und 3., wenn man  $d_1 = 1$  und  $d_2 = 0$  setzt. Daher ist  $f^*$  zugleich Einhüllende der Trochoiden  $1^* [(c_1 - c_2):c_1]$  (oder die zweite Erzeugung  $[(c_2 - c_1):c_2]$ ) bei der Bewegung  $B_2 [c_2:(c_2 - c_1)]$  und  $m^* [(c_2 + c_1):c_2]$  bei der Bewegung  $B_3 [c_2:(c_2 + c_1)]$ . In beiden Fällen ist das Radienverhältnis einer Erzeugung der bewegten Trochoide zum Radienverhältnis der zugehörigen Bewegung reziprok. Die An-

2.5 Regelschraubflächen und andere Sonderfälle

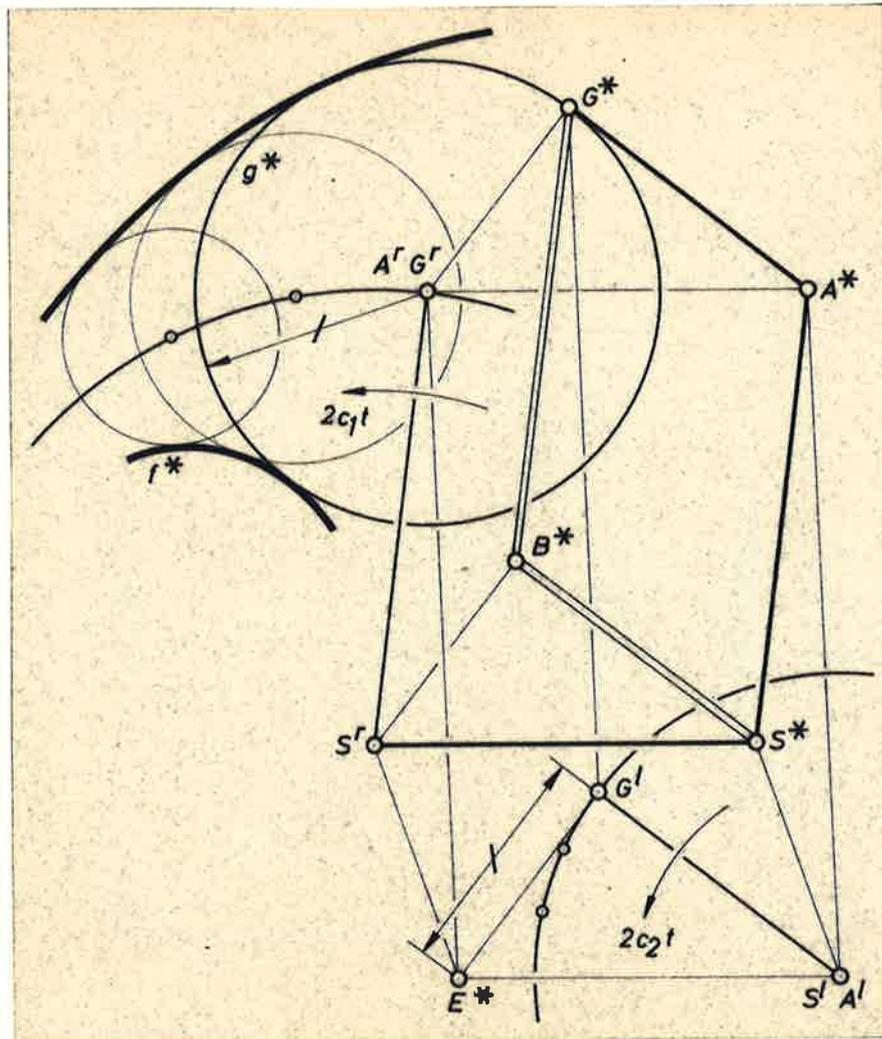


Abb. 14

fangslage von  $l^*$  in der zweiten Erzeugung ist im Sinne von 2.4,(13) durch das Punktequadrupel  $S^r S^* B^* G^*$  bestimmt, wobei  $G^*$  das Bild des Spurpunktes von  $g$  ist. Zu  $m^*$  gehört das Quadrupel  $S^r B^r B^* G^*$ .

Die hier auftretenden Fälle mit reziproken Radienverhältnissen sind bereits in 1.3 behandelt worden. Die im Satz 4 (Abb.5) beschriebene Konstruktion der Hüllbahn als Einhüllende von Kreisen deckt sich mit der hier aus der Abbildung der Erzeugenden abgeleiteten Konstruktion (Abb.14); man braucht nur  $E^*$  mit  $S^r$  zusammenfallen zu lassen. Die hier gefundenen Trochoiden  $l^*$  und  $m^*$  sind mit den in Satz 5 genannten Trochoiden  $k_1$  und  $k_2$  identisch. In Satz 5 wurden noch zwei weitere Trochoiden  $k_3$  und  $k_4$  mit derselben Hüllbahn genannt. Auch dazu gibt es eine räumliche Erklärung in Zusammenhang mit der Re-

## 2.5 Regelschraubflächen und andere Sonderfälle

gelschraubfläche  $\bar{\Phi}$ :

Der Netzumriß einer Fläche bleibt gleich, wenn diese als Gesamtheit der Tangentialebenen abgebildet wird; eine Tangentialebene ist nämlich genau dann eine Umrißebene, wenn der in ihr liegende Netzstrahl durch den Berührungspunkt geht. Dann aber ist der Berührungspunkt ein Umrißpunkt der Fläche, wenn diese als Punktmannigfaltigkeit aufgefaßt wird, und die Netzbilder der Tangentialebene und des Berührungspunktes sind identisch. In einer linearen Korrelation, die die Geraden des Abbildungsnetzes einzeln festläßt, werden Punkte und Ebenen mit gleichem Netzbild vertauscht. Auf diese Weise läßt sich einer Fläche  $\bar{\Phi}$  eine Fläche  $\bar{\bar{\Phi}}$  so zuordnen, daß die Punkte von  $\bar{\bar{\Phi}}$  dasselbe Bild haben wie die Tangentialebenen von  $\bar{\Phi}$ .

Es gibt ein lineares Nullsystem, das die Schraubachse  $s$  der Regelschraubfläche  $\bar{\Phi}$  und die Geraden des Abbildungsnetzes einzeln festläßt. In diesem Nullsystem vertauschen sich die rechtsseitigen,  $s$  schneidenden absoluten Geraden, während die linksseitigen einzeln festbleiben, die sie dem Abbildungsnetz angehören. Das gleiche Netzbild wie die Tangentialebenen von  $\bar{\Phi}$  haben nun die Punkte einer Regelschraubfläche  $\bar{\bar{\Phi}}$  mit der Achse  $s$  und dem Schraubparameter  $(c_1 - c_2) : (c_1 + c_2)$ .<sup>17)</sup> Die Punkte eines waagrechten Schnittes von  $\bar{\bar{\Phi}}$  sind durch das Nullsystem den Tangentialebenen von  $\bar{\Phi}$  aus einem Punkt der Ferngeraden von  $\bar{\Pi}$  zugeordnet; das Bild jedes solchen Tangentialzylinders ist somit eine Lage einer Trochoide  $\bar{I}^*$  (in Satz 5 mit  $k_3$  bezeichnet) mit dem Radienverhältnis  $[(c_1 + c_2) : c_2]$ . Den Rechtsschiebkurven von  $\bar{\bar{\Phi}}$  entsprechen im Nullsystem Schraubtorsen, die durch Rechtsschiebungen die Gesamtheit der Tangentialebenen von  $\bar{\Phi}$  erzeugen; Bild dieser Schraubtorsen sind die Bewegungslagen einer Trochoide  $\bar{m}^*$  (in Satz 5 mit  $k_4$  bezeichnet) mit dem Radienverhältnis  $[(c_2 - c_1) : c_2]$ .

Satz 14:  $\bar{\Phi}$  sei eine quasielliptische Regelschraubfläche mit nicht waagrechten Erzeugenden. Ihr scheinbarer Umriß

<sup>17)</sup> Diese Schraubung heißt nach K. STRUBECKER [33] zur ursprünglichen "konjugiert".

## 2.5 Regelschraubflächen und andere Sonderfälle

in der  $E^*$ -Abbildung und damit auch in einer Linksnetzprojektion in eine Normalschnittebene ist i.allg. auf vierfache Weise Hüllbahn von Trochoiden bei Trochoidenbewegungen; dabei ist das Radienverhältnis einer Erzeugung der bewegten Trochoide zu dem Radienverhältnis der Trochoidenbewegung jeweils reziprok.

Die vier verschiedenen Trochoiden sind:

1.  $l^*$   $[(c_2 - c_1) : c_2]$  als Bild der waagrechten Schnitte von  $\Phi$  gemäß Satz 12,2.
2.  $m^*$   $[(c_2 + c_1) : c_2]$  als Bild der Rechtsschiebkurven auf  $\Phi$  nach Satz 12,3. (bei  $c_1 + c_2 \neq 0$ ),
3.  $\bar{l}^*$   $[(c_2 + c_1) : c_2]$  als Bild der als Ebenenmannigfaltigkeit aufgefaßten Tangentialzylinder mit waagrechten Erzeugenden ( $c_1 + c_2 \neq 0$ ),
4.  $\bar{m}^*$   $[(c_2 - c_1) : c_2]$  als Bild jener als Ebenenmannigfaltigkeit aufgefaßten Schraubtorsen, die bei krummer Rechtsschiebung die Fläche  $\Phi$  einhüllen.

Die in Satz 4 genannte Konstruktion der Hüllbahn als Einhüllende von Kreisen ergibt sich nun aus der Abbildung der Erzeugenden von  $\Phi$ .

Beispiel 8: Die in Tafel II gezeigte Hüllbahn  $e$  läßt sich auch interpretieren als Netzumriß einer Regelschraubfläche  $\Phi$  bei  $c_1 = 1$ ,  $c_2 = 2$ .  $\Phi$  ist von viertem Grad mit einer kubischen Bahnkurve als Doppelkurve (also von III. STURMscher Art, falls die Erzeugenden die Schraubachse  $s$  nicht schneiden). Ihr scheinbarer Netzumriß ist Hüllkurve von PASCALSchen Schnecken  $l^*$  und  $\bar{m}^*$  bei elliptischen Bewegungen sowie von dreibogigen Hypotrochoiden  $m^*$  und  $\bar{l}^*$ . Da die vier Trochoiden gleichwertig sind, tritt derselbe scheinbare Netzumriß bei drei weiteren Regelflächen 4. Grades, III. Art auf, deren Normalschnitte zu  $m^*$ ,  $\bar{l}^*$  bzw.  $\bar{m}^*$  ähnlich sind.

Die Bildkreise  $g_i^*$  der Erzeugenden von  $\Phi$  haben eine geometrisch bemerkenswerte Eigenschaft: Das Bild  $G^*$  des Spurpunktes einer Erzeugenden  $g$  von  $\Phi$  liegt auf  $l^*$ , dem Bild der Spurkurve, und auch auf dem Bildkreis  $g^*$ . Das Bild  $G_\xi^*$  des Schnittpunktes der Erzeugenden  $g$  mit einer waagrechten Ebene in der quasielliptischen Höhe  $\xi$  geht nach 2.2,(9) (vgl. Abb.9)

2.5 Regelschraubflächen und andere Sonderfälle

aus  $G^*$  durch Drehung um  $G^r$  durch den Winkel  $2\xi$  hervor.  $G_\xi^*$  liegt zugleich auf einer Bewegungslage von  $l^*$ .

(15) Dreht man also die Bilder der Spurpunkte von  $\Phi$  auf den Bildkreisen der jeweils inzidenten Erzeugenden mit gleicher Winkelgeschwindigkeit, so liegen diese zu jedem Zeitpunkt auf einer Lage der bewegten Trochoide  $l^*$ .

Beispiel 9: Tafel VIII zeigt den Fall  $c_1 = 1$ ,  $c_2 = -1$ ; dieser ist in Satz 14 und Satz 5 teilweise ausgeschlossen worden: Die zugehörige Schraubung ist eine Quasidrehung um die Ferngerade von  $\Pi$ ; die Bahnkurven sind Quasikreise mit der Achse  $s$ , nämlich (euklidisch gesprochen) Hyperbeln, die die absoluten Ebenen  $z = \pm i$  in Punkten von  $s$  berühren. Unterwirft man eine Gerade dieser Schraubung, so erhält man eine Fläche  $\Phi$  2. Grades, die die Ebenen  $z = \pm i$  auf  $s$  berührt. Die Spurkurve  $l$  von  $\Phi$  ist nach Satz 12,2. eine Ellipse.

Der durch das Grundnetz der  $E^*$ -Abbildung vermittelte scheinbare Umriß von  $\Phi$  ist eine Kurve f 4. Ordnung; es bilden nämlich jene Geraden, die die beiden rechtsseitigen Netzachsen  $a_1$  und  $a_2$  schneiden und  $\Phi$  berühren, eine Regelfläche  $\Psi$  von viertem Grad. Diese Regelfläche enthält  $a_1$  und  $a_2$  als Doppelgeraden; daher ist die Spurkurve  $f$  von  $\Psi$  bizirkular. Die Erzeugenden durch einen Punkt  $X$  von  $a_1$  sind die Schnittgeraden  $x_1, x_2$  des Tangentialkegels aus  $X$  an  $\Phi$  mit der Ebene  $[X, a_2]$ . Ist  $X$  der Fernpunkt von  $a_1$  (siehe Abb.15), so fallen  $x_1$  und  $x_2$  in eine Gerade  $x$  zusammen, da  $\Phi$  die absolute Ebene  $[X, a_2]$  berührt;  $x$  verbindet  $X$  mit dem Durchstoßpunkt von  $s$  mit der absoluten Ebene durch  $a_2$ .  $x$  ist zugleich eine linksseitige Gerade des absoluten Gebildes.

Analog geht durch den Fernpunkt  $Y$  von  $a_2$  die linksseitige,  $s$  schneidende Erzeugende  $y$  von  $\Psi$ . Die Spuren der

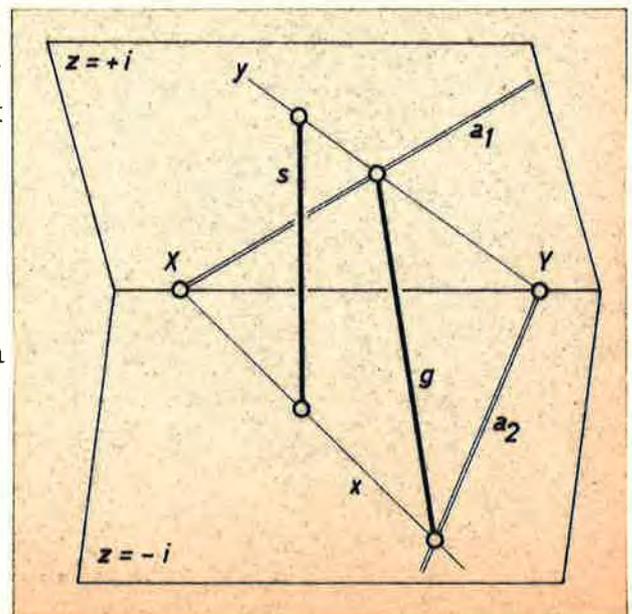


Abb. 15

## 2.5 Regelschraubflächen und andere Sonderfälle

Ebenen  $[x, a_1]$  und  $[y, a_2]$  in  $\Pi$  sind die jeweils einzigen Tangenten in den absoluten Kreispunkten X bzw. Y an die Spurkurve  $f$  von  $\Psi$ . Somit hat  $f$  Spitzen in den absoluten Kreispunkten;  $f$  ist also ein Cartesisches Oval <sup>19)</sup>.

Die Ebenen  $[x, a_1]$  und  $[y, a_2]$  schneiden sich in einer Geraden  $g$ .  $g$  ist zu  $s$  rechtsparell, da  $g$  und  $s$  die linksseitigen Geraden  $x$  und  $y$  schneiden; ferner gehört  $g$  dem Abbildungsnetz an, da  $g$   $a_1$  und  $a_2$  schneidet. Also ist  $E^*$  der linke und  $S^F$  der rechte kinematische Bildpunkt von  $g$ . Der Spurpunkt von  $g$ , zugleich Schnittpunkt der Spitzentangenten von  $f$ , liegt in der Mitte zwischen  $E^*$  und  $S^F$ . Im zentrisch ähnlichen Bild  $f^*$  von  $\Phi$  in der  $E^*$ -Abbildung muß  $S^F$  der Schnittpunkt der Spitzentangenten, also singulärer Brennpunkt sein.

Mit Satz 5 findet man (für  $l^*$  werden die Polkreisradien von  $k_1$  eingesetzt): Unterwirft man eine Ellipse  $l^* = [2r, r; h]$  (Halbachsen  $|h + r|, |h - r|$ ) der OLDHAM-Bewegung  $[R', 2R']$ , so hüllt  $l^*$  ein Cartesisches Oval  $f^*$  ein. Da auch die zweite Erzeugungsweise von  $l^* = [2h, h; r]$  das Radienverhältnis 2 : 1 hat, ist nach Abb.14 oder Satz 4 (Abb.5)  $f^*$  auf zwei Arten Einhüllende von Kreisen  $q$  bzw.  $g_1^*$ . Ort der Kreismitten ("Deferent"<sup>20)</sup>) sind Kreise mit dem singulären Brennpunkt  $S^F$  als Mitte und den Radien  $h$  bzw.  $r$ .

Die Ellipse  $\bar{m}^* = [2R', R'; h]$  (Halbachsen  $|h + R'|, |h - R'|$ ) hüllt bei der Bewegung  $[r, 2r]$  nach den Sätzen 5 oder 14 dieselbe Kurve  $f^*$  ein. Die zweite Erzeugung von  $\bar{m}^*$  ergibt eine dritte Schar doppelt berührender Kreise mit dem Deferentenradius  $R'$ . Schließlich zeigen die Deferentenradien  $r$  und  $R'$ , daß auch die Ellipse  $n^* = [2R', R'; r]$  (Halbachsen  $|r + R'|, |r - R'|$ ) bei der Bewegung  $[h, 2h]$  dasselbe Cartesische Oval einhüllen muß. Dieses Ergebnis wurde auf analy-

<sup>19)</sup> Siehe Enz.d.Math.Wiss.III, C 5, Nr.90 oder H. WIELEITNER, Spezielle ebene Kurven. Sammlung Schubert, Leipzig 1908, S 91.

<sup>20)</sup> Bei der Konstruktion der Kreise  $q$  - siehe Abb.5 - haben in diesem Fall nun L auf  $l$  und M auf  $m$  gleiche Winkelgeschwindigkeit. Aus der Konstruktion der Hüllpunkte der Kreise nach Satz 6 folgt, daß nun alle Berührsehnen durch einen festen Punkt F (übrigens ein Brennpunkt von  $f^*$ ) gehen, der von O (hier  $S^F$ ) denselben Abstand hat wie Z von  $M'$ . Damit gehört die Kreisschar ( $q$ ) einem Kreisbündel an; alle Kreise  $q$  schneiden einen Kreis ("Direktorkreis") mit der Mitte F orthogonal.  $f^*$  ist bzgl. des Direktorkreises anallagmatisch.

## 2.5 Regelschraubflächen und andere Sonderfälle

tischem Weg von O. RICHTER [27] gefunden in Zusammenhang mit der Behandlung der Systeme jener Kegelschnitte, die  $f^*$  in vier Punkten berühren.

Bei  $R' = r$  ist die OLDHAMbewegung genau die Umkehrbewegung zu einer Erzeugung von  $l^*$ . Die Hüllbahn hat den nun auftretenden Stützpunkt als weiteren Doppelpunkt, ist also eine PASCALSche Schnecke.  $n^*$  artet zur Strecke aus,  $l^*$  und  $\bar{m}^*$  sind identisch (vgl. [26]). Dieses Ergebnis ist bereits in 1.5 aus Satz 7 abgeleitet worden (siehe Tafel V).

2.5.2 Schraubtorsen: Ist die Regelfläche  $\Phi$  eine quasielliptische Schraubtorse, so ist der Normalschnitt eine gespitzte Trochoide  $l [(c_2 - c_1):c_2]$ . Vom scheinbaren Umriß  $f^*$  spaltet sich als Bild der Gratlinie eine Trochoide  $f_2^* [c_2:c_1]$  ab;  $f_2^*$  ist Bahn der Spitzen von  $l^*$ . Das Bild der Tangentialebenen von  $\Phi$ , auf Grund einer früheren Überlegung zugleich das Bild einer Schraublinie der konjugierten Schraubung, ergibt die Trochoide  $f_1^* [c_2:(-c_1)]$  als eigentliche Hüllbahn von  $l^*$  bei einer Trochoidenbewegung mit dem Radienverhältnis  $[c_2:(c_2 - c_1)]$ . Das Paar  $f_1^*, f_2^*$  ist zugleich Hüllbahn der Trochoide  $m^* [(c_2 + c_1):c_2]$ , das Bild einer Rechtsschiebkurve  $m$  auf  $\Phi$ .

Satz 14a: Der scheinbare Umriß  $f^*$  einer quasielliptischen Schraubtorse besteht aus dem Trochoidenpaar  $f_1^* [c_2 : c_1]$  und  $f_2^* [c_2 : (-c_1)]$ , den Bildern der Gratlinie und deren Schmiegeebenen. Auf diese Weise erhält man nochmals die Ergebnisse des Satzes 7 (Seite 19).

2.5.3 Wendelflächen: Eine quasielliptische Wendelfläche tritt unter den Schraub-schiebflächen des Satzes 12 dann auf, wenn der Normalschnitt aus gespitzten Trochoiden  $l$  mit dem Radienverhältnis  $2 : 1$ , also aus Strecken besteht. Wegen der freien Wahl der Streckenlänge ist jede Wendelfläche auf  $\infty^1$  Arten Schiebfläche von Schraublinien  $k$ , die die Schraubachse  $s$  schneiden, wobei in Satz 12  $d_1(c_1 - c_2):c_1(d_1 - d_2) = 2 : 1$  zu setzen ist. Satz 12,3. ergibt keine weiteren Schiebkurven.

Der scheinbare Umriß der durch Rechtsschiebungen von  $k$  erzeugten Wendelfläche ist nach Satz 13 Hüllbahn der Strecke  $l^*$

## 2.5 Regelschraubflächen und andere Sonderfälle

bei der Bewegung  $B_2 [c_2 : (c_2 - c_1)]$ . Er besteht aus der Hüllbahn der Trägergeraden von  $l^*$ , also aus einer gespitzten Trochoide  $f^*$  mit dem Radienverhältnis  $[2c_2 : (c_1 + c_2)]$  (siehe etwa [24]) sowie aus den von der Streckenlänge abhängigen Bahnen der Streckenendpunkte.  $f^*$  ist nach Satz 13 zugleich Hüllkurve von  $\infty^1$  Trochoiden  $k^* [(c_1 + c_2) : 2c_1]$  bei den Bewegungen  $B_1 [2c_2 : (c_1 + c_2)]$ . Das ergibt wiederum den von WUNDERLICH [37] gefundenen Fall aus Satz 7a, wo Trochoiden gespitzte Trochoiden einhüllen. Wählt man die Strecke  $l$  so groß, daß der feste Polkreis der Erzeugung von  $l^*$  mit dem Rollkreis von  $B_2$  identisch ist, so ist  $f^*$  als CAMUS-Bahn erklärbar. Nach 2.4,(14) ist daher die wahre Umrißkurve der Wendelfläche eine der zu  $l^*$  gehörigen Linksschiebkurven, wie schon WUNDERLICH in [36] angegeben hat.

Satz 14b: Der scheinbare Umriß  $f^*$  einer quasielliptischen Wendelfläche  $\Phi$  ist eine gespitzte Trochoide mit dem Radienverhältnis  $2c_2 : (c_1 + c_2)$  als Bild einer Linksschiebkurve auf der Fläche. Entsprechend den  $\infty^1$  Möglichkeiten,  $\Phi$  durch Rechtsschiebungen von Schraublinien  $k$  zu erzeugen, ist  $f^*$  zugleich Resthüllbahn von  $\infty^1$  Trochoiden  $k^* [(c_1 + c_2) : 2c_1]$  bei Trochoidenbewegungen  $[2c_2 : (c_1 + c_2)]$ . Damit sind nochmals die Ergebnisse des Satzes 7a abgeleitet.

2.5.4 Drehflächen: Jene Flächen  $\Phi$ , die durch Drehung quasielliptischer Schraublinien mit zur Drehachse linksparalleler Achse erzeugbar sind, sind nach Satz 12a auf vierfache Weise Rechtsschiebflächen. Die Schiebkurven  $k$  und  $\bar{m}$  haben den Schraubparameter  $[(d_1 + d_2) : (d_1 - d_2)]$ , die Schraublinien  $\bar{k}$  und  $m$  den Parameter  $[(3d_1 - d_2) : (d_2 - d_1)]$ . Der scheinbare Netzumriß von  $\Phi$  ist nach Satz 13 ( $c_1 = c_2 = 1$ ) Hüllbahn von Trochoiden  $k^*$  und  $\bar{m}^* [d_2 : d_1]$  bei Bewegungen mit dem Radienverhältnis  $[d_1 : d_2]$ , sowie  $\bar{k}^*$  und  $m^* [(2d_1 - d_2) : d_1]$  bei Bewegungen  $[d_1 : (2d_1 - d_2)]$ . Es treten also wie beim Bild von Regelschraubflächen reziproke Radienverhältnisse auf.

Satz 15: Der scheinbare Netzumriß der Drehflächen unter den quasielliptischen Schraubflächen ( $c_1 = c_2 = 1$ ) ist

## 2.5 Regelschraubflächen und andere Sonderfälle

Hüllbahn der Trochoiden  $k^*$  und  $\bar{m}^*$   $[d_2 : d_1]$  bzw.  $\bar{k}^*$  und  $m^*$   $[(2d_1 - d_2) : d_1]$  bei Bewegungen mit den Radienverhältnissen  $[d_1 : d_2]$  bzw.  $[d_1 : (2d_1 - d_2)]$ . Damit sind nochmals die Ergebnisse des Satzes 5 abgeleitet.

Die in diesen Fällen nach Satz 4 gültige Konstruktion der Hüllbahn als Einhüllende von Kreisen ist nun aus der Abbildung der Parallelkreise der quasielliptischen Drehfläche herzuleiten (vgl. Abb.12). Der Ort der Kreismittelpunkte ist das Bild der Drehachse  $s$ .

Beispiel 10: Wählt man  $d_1 = 1$ ,  $d_2 = 0$ , so sind  $k$  und  $\bar{m}$  Geraden.  $\Phi$  ist - euklidisch gesprochen - eine Fläche 2. Grades mit waagrecht Kreisschnitten. Auf  $\Phi$  liegen die Schraublinien  $\bar{k}$  und  $m$  mit dem Schieblängenverhältnis  $1 : 2$ , also kubische Kreise. Das Bild in der  $E^*$ -Abbildung führt auf dasselbe Ergebnis wie in Beispiel 9 (Tafel VIII); wie dort läßt sich nämlich mit Hilfe der Netzprojektion zeigen, daß der scheinbare Umriß  $f^*$  von  $\Phi$  eine Kurve 4. Ordnung mit Spitzen in den absoluten Kreispunkten, also ein Cartesisches Oval ist. Die oben genannten drei Kreisscharen, deren Kreise die Kurve  $f^*$  je doppelt berühren, gewinnt man nun als Bild der zwei Erzeugendenscharen von  $\Phi$ , sowie der Parallelkreise. Die zwei Rechtschiebkurven  $\bar{k}$  und  $m$  von  $\Phi$  bilden sich nach Satz 13 auf Ellipsen  $\bar{k}^*$  und  $m^*$  ab, die bei OLDHAMbewegungen die Kurve  $f^*$  einhüllen.

Der Netzriß von  $\Phi$  bleibt gleich, wenn  $\Phi$  als Gesamtheit der Tangentialebenen abgebildet wird. Diese Tangentialebenen haben, wie mit Hilfe des Nullsystems aus 2.5.1 abzuleiten ist, dasselbe Bild wie die Punkte einer Regelfläche  $\bar{\Phi}$ , die durch Quasidrehung um die Ferngerade von  $\Pi$  entsteht. Diese Fläche ist in Beispiel 9 behandelt worden und nun ist klar, weshalb in den Beispielen 9 und 10 dasselbe Ergebnis auftritt. Die waagrecht Schnitte von  $\Phi$ , die Ellipsen 1, haben dasselbe Bild wie die Tangentialzylinder an  $\Phi$  mit waagrecht Erzeugenden, wenn sie ebenenweise abgebildet werden. Damit ist auch für die dritte Ellipse, die sich in einem Cartesischen Oval unter ständiger Berührung (in 4 Punkten, von welchen zwei auch konjugiert komplex sein können) umwenden läßt, eine räumliche

## 2.5 Regelschraubflächen und andere Sonderfälle

Deutung gefunden.

Satz 15a: Der scheinbare Umriß  $f^*$  einer Fläche  $\Phi$  2. Grades mit waagrechten Kreisschnitten in der  $E^*$ -Abbildung oder einer Linksnetzprojektion ist ein Cartesisches Oval. Als Bild der zwei Erzeugendenscharen und der waagrechten Kreise von  $\Phi$  erhält man die drei Scharen der  $f^*$  doppelt berührenden Kreise. Die zwei Scharen der auf  $\Phi$  liegenden kubischen Kreise, die durch Rechtsschiebungen jeweils ineinander übergehen, sowie die Tangentialzylinder mit waagrechten Erzeugenden (ebenenweise abgebildet) ergeben im Bild jene drei Ellipsen (vgl. [27]), die bei OLDHAMBewegungen das Cartesische Oval  $f^*$  einhüllen (siehe Tafel VIII).

Abschließend sei auf die Analogie im euklidischen Raum hingewiesen: Unterwirft man eine euklidische Schraublinie mit der Achse  $a$  einer euklidischen Schraubung mit zu  $a$  paralleler Achse, so entsteht nach E. MÜLLER [21] eine Schiebfläche. Deren Normalschnitte sind nach L. BURMESTER [7] Trochoiden. Ein euklidischer Parallelriß in eine Normalschnittebene ergibt nach [6] als scheinbare Umrißkurve die Hüllbahn einer Trochoide bei einer Zykloidenbewegung (vgl. P. MEYER [17]). Zugleich ist die Umrißkurve Hüllbahn einer Zykloide bei einer krummen Schiebung, deren Bahnkurven ebenfalls Zykloiden sind.

### 3. ALLGEMEINE EIGENSCHAFTEN DER HÜLLBAHN

#### 3.1 Anzahl der bewegten Trochoiden

Die Trochoide  $k = [r', r ; h]$  werde der Bewegung  $B = [R', R]$  unterworfen; die Radien der Polkreise sollen sich dabei wie ganze Zahlen verhalten:

$$(1) \quad \underline{r' : r = n_0 : n_1}, \quad \underline{R' : R = N_0 : N_1} ;$$

$$\underline{(n_0, n_1) = (N_0, N_1) = 1}$$

Die Trochoide  $k$  geht bei Drehungen durch ganzzahlige Vielfache des Winkels  $\frac{2\pi}{n_0}$  um ihren Mittelpunkt  $M'$  in sich über und hat  $|n_0|$  Symmetrieachsen. Unterwirft man  $k$  der Bewegung  $B$ , wobei  $M'$  einmal den Mittelpunkt  $O$  des Rastkreises der Bewegung  $B$  umlaufen soll, so kommt  $k$  in eine Lage, die gegenüber der Ausgangslage durch  $\frac{2\pi N_0}{N_1}$  verdreht ist (vgl. 1.1,

(2)). Soll  $k$  nach  $u$  Umläufen mit der Ausgangslage zur Deckung kommen, so muß  $\frac{N_0}{N_1} u$  ein ganzzahliges Vielfaches von  $1/n_0$  sein. Die kleinste Zahl, die dies erfüllt, ist  $u = \left| \frac{N_1}{(n_0, N_1)} \right|$ .

Satz 16: Nach  $\left| \frac{N_1}{(n_0, N_1)} \right|$  Umläufen kommt  $k$  mit der Ausgangslage zur Deckung. Daher wird die Hüllbahn  $e$  zugleich von  $\left| \frac{N_1}{(n_0, N_1)} \right|$  konzentrischen und gegeneinander durch ganzzahlige Vielfache des Winkels  $\frac{2\pi (n_0, N_1)}{n_0 N_1}$  verdrehten Trochoiden eingehüllt.

Als Beispiel siehe  $k_4$  in Tafel VII. Das Ergebnis des Satzes 16 stimmt auch mit der Anzahl der Spurtrochoiden  $l$  der Schraubschiebfläche  $\Phi$  aus Satz 12,2. überein, deren Bilder  $l^*$  bei der Bewegung  $B_2$   $f^*$  einhüllen (Satz 13).

### 3.2 Anzahl der Symmetrieachsen

Fällt in der Ausgangslage der Arm  $\Sigma_1 = OM'$  (vgl. Abb.1 oder Abb.3) in eine Symmetrieachse von  $k$ , so ist diese zugleich Symmetrieachse der Hüllbahn  $e$ . Dreht sich  $\Sigma_1$  durch den Winkel  $T$  nach  $\Sigma_1^1$ , so dreht sich  $k$  gegenüber  $\Sigma_1$  durch  $-\frac{N_0}{N_1} T$  nach  $k^1$ . Gilt nun  $\frac{N_0}{N_1} T = \frac{2\pi}{n_0}$ , also  $T = 2\pi \frac{N_1}{n_0 N_0}$ , so ist die Lage von  $\Sigma_1^1$  bzgl.  $k^1$  kongruent zu jener von  $\Sigma_1$  bzgl.  $k$  in der Ausgangslage. Somit müssen Drehungen durch ganzzahlige Vielfache des Winkels  $T$  die Hüllbahn  $e$  in sich überführen. Dies sind andererseits die einzigen Deckbewegungen, wie man aus der Anzahl jener Punkte der Hüllbahn, die vom Mittelpunkt maximalen Abstand haben, ablesen kann.

Das betragsmäßig kleinste Vielfache von  $T \pmod{2\pi}$  ist

$$T = \frac{2\pi(n_0, N_1)}{n_0 N_0}.$$

Wird  $\Sigma_1$  durch den Winkel  $\frac{T}{2} = \pi \frac{N_1}{n_0 N_0}$  gedreht, so ist  $k^1$  um  $\frac{\pi}{n_0}$  gegenüber  $\Sigma_1^1$  verdreht; es fällt  $\Sigma_1^1$  also wieder in eine Symmetrieachse von  $k^1$  und damit von  $e$ .

Satz 17: Drehungen der Hüllbahn  $e$  um den Mittelpunkt  $O$  durch

ganzzahlige Vielfache des Winkels  $\alpha = \frac{2\pi(n_0, N_1)}{n_0 N_0}$  führen diese in sich über.  $e$  hat  $\left| \frac{n_0 N_0}{(n_0, N_1)} \right|$  Symmetrieachsen.<sup>21)</sup>

### 3.3 Anzahl der Teilkurven

Es zeigt sich, daß nicht nur im Fall  $|R| = |r'|$  die Hüllbahn aus zwei verschiedenartigen Teilen, nämlich aus CAMUS-Bahnen und der Resthüllkurve besteht. Auch bei  $|R| \neq |r'|$

<sup>21)</sup> Dasselbe Ergebnis gibt C. LÜBBERT in [38], (7.11) an.

### 3.3 Anzahl der Teilkurven

tritt eine solche Teilung im Reellen auf, nur zerfällt dabei i.allg. die Hüllbahn nicht. Es kann, wie sich zeigen wird, nur folgendes festgestellt werden:

- (16) Die reellen Hüllpunkte von  $k$  durchlaufen bei Ablauf der Bewegung  $B$  in der Rastebene  $E'$  i.allg. zwei Scharen von jeweils kongruenten geschlossenen "Teilkurven". Diese Teilkurven können Züge der nichtzerfallenden Gesamthüllbahn oder einer ihrer Zerfallskurven (z.B. Resthüllbahn) sein, aber auch aus einem Zug bestehende Zerfallskurven (z.B. CAMUS-Bahnen) oder doppelt überdeckte Stücke von Trochoiden (vgl. Satz 7a).

Die Anzahl der Teilkurven jeder Schar soll abgeleitet werden. Für den Fall  $|R| = |r|$  sind diese Anzahlen bereits von J. HOSCHEK und C. LÜBBERT in [14] angegeben worden.

Zunächst sei  $k$  nicht gespitzt und als zugehörige Erzeugung sei jene mit kleinerem festen Polkreis  $p'$  vorausgesetzt, also (vgl. [24], Kap.22)

- (17)  $h > |r|$  .

Ein Punkt  $A$  von  $k$  ist nach 1.1 dann und nur dann ein Hüllpunkt, wenn die Normale  $g$  in  $A$  an  $k$  den Momentanpol  $V$  der augenblicklichen Bewegungslage der Gangebene  $E$  gegenüber der Rastebene  $E'$  enthält (vgl. Abb.1). In  $E$  erfüllen die Momentanpole den Polkreis  $P$ . Wenn somit  $A$  in  $E$  stetig die Kurve  $k$  durchläuft und sich  $E$  zugleich gegenüber  $E'$  stetig so bewegt, daß ein Schnittpunkt  $V$  von  $P$  mit der Normalen  $g$  jeweils der Momentanpol ist, so beschreibt der mit  $A$  sich deckende Punkt  $A'$  aus  $E'$  eine Teilkurve  $t$  der Hüllbahn.

In der Ausgangslage falle  $A$  in einen Hauptscheitel <sup>22)</sup>  $A_0$  von  $k$ ;  $V_0$  sei ein Schnittpunkt von  $P$  mit der Normalen in  $A_0$ ;  $A'_0$  sei der mit  $A_0$  augenblicklich zusammenfallende Punkt aus  $E'$ . Davon ausgehend sei nach stetiger Durchlaufung das Punktepaar  $A_1, V_1$  in  $E$  das erste, das bzgl.  $k$  die gleiche Lage wie  $A_0, V_0$  einnimmt;  $A_1$  sei also wieder ein Hauptscheitel und gemeinsam mit  $V_1$  durch eine Drehung in  $A_0$  bzw.  $V_0$  überzuführen,

<sup>22)</sup> Die auf Symmetrieachsen gelegenen Scheitel von  $k$  sollen Haupt- bzw. Nebenscheitel heißen, je nachdem, ob der Abstand vom Mittelpunkt ein Maximum bzw. Minimum ist.

### 3.3 Anzahl der Teilkurven

wobei  $k$  in sich übergeht. Dann wiederholt sich in  $E'$  die von  $A'_0$  ausgehende Teilkurve  $t$  ab dem mit  $A_1$  sich deckenden Punkt  $A'_1$  kongruent und bis auf eine noch zu bestimmende Ausnahme ist  $A'_1$  der erste Punkt mit dieser Eigenschaft. Eine Drehung von  $E'$  um  $O$ , die  $A'_0$  mit  $A'_1$  und damit auch die zugehörigen Momentanpole auf  $P'$  zur Deckung bringt, führt  $t$  in sich über. Dasselbe gilt für Vielfache dieser Drehung. Der betragsmäßig kleinste Drehwinkel dieser Drehungen sei mit  $\alpha_t$  bezeichnet.

Andererseits geht nach Satz 17 die Gesamthüllbahn  $e$  bei Drehungen durch den Winkel  $\alpha$  in sich über und  $\alpha$  ist der kleinste derartige Winkel. Somit gibt i.allg. der Quotient  $|\alpha_t/\alpha|$  die Anzahl der in der Gesamthüllbahn enthaltenen und zu  $t$  kongruenten Teilkurven an. Eine geänderte Anfangslage führt immer noch auf eine zweite Teilkurvenschar.

Um  $\alpha_t$  zu bestimmen, sind Fallunterscheidungen nötig:

a)  $|R| < |r'|$ : Jede reelle Normale an die Trochoide  $k$  schneidet  $p'$ , den festen Polkreis ihrer Erzeugung, reell; wegen (17) gibt es darunter solche, die  $p'$  berühren. Also können nicht alle den nun im Inneren von  $p'$  liegenden Rollkreis  $P$  reell schneiden. Der Punkt  $A$  durchläuft nun, von  $A_0$  ausgehend, bei der obigen Konstruktion der Teilkurve  $t$  nicht die ganze Trochoide  $k$ . Nachdem  $V$  einmal den Kreis  $P$  durchlaufen hat, kommt  $A$  wieder in die Ausgangslage  $A_0$ ; also fällt nun das Paar  $A_1, V_1$  mit  $A_0, V_0$  zusammen. Während der Momentanpol  $V$  einmal  $P$  durchläuft, dreht er sich gegenüber  $E'$  um  $O$  durch  $\frac{2\pi N_1}{N_0}$ .

Das betragsmäßig kleinste ganzzahlige Vielfache dieses Dreh-

winkels mod  $2\pi$  ist  $\alpha_t = \frac{2\pi}{N_0}$ .

Wählt man einen Nebenscheitel als Ausgangslage, so erhält man eine zweite Teilkurvenschar und denselben Winkel  $\alpha_t$ .

b)  $|R| > |r'|$ : Nun schneidet jede reelle Normale  $g$  an  $k$  den außerhalb  $p'$  liegenden Rollkreis  $P$  in zwei reellen getrennten Punkten. Der Punkt  $A$  kann vom Hauptscheitel  $A_0$  aus in  $E$  stetig die ganze Kurve  $k$  durchlaufen, während ein Punkt  $V$  der Kurvennormalen  $g$  auf  $P$  wandert. Mit dem ersten Hauptscheitel, den  $A$

### 3.3 Anzahl der Teilkurven

dabei erreicht, ist aus Symmetriegründen bereits die zur Ausgangsstellung bzgl.  $k$  kongruente Lage  $A_1, V_1$  gefunden. Bis dahin hat sich, wie aus der Erzeugung von  $k$  ableitbar ist, die

Normale  $g$  durch den Winkel  $\frac{2\pi(n_1 - n_0)}{n_0}$  gedreht; somit hat  $V$  den Bogen  $\frac{2\pi(n_1 - n_0)R}{n_0}$  auf dem Rollkreis  $P$  zurückgelegt.

Diesem entspricht auf  $P'$  ein Bogen über dem Zentriwinkel

$\frac{2\pi(n_1 - n_0)N_1}{n_0 N_0}$ . Da dieser Bruch noch durch das Produkt der

größten gemeinsamen Teiler  $(n_0, N_1)(n_1 - n_0, N_0)$  kürzbar ist, ist in diesem Fall  $\alpha_t = \frac{2\pi(n_0, N_1)(n_1 - n_0, N_0)}{n_0 N_0}$ .

Wählt man zu  $A_0$  den zweiten Schnittpunkt der Normalen mit  $P$  als Momentanpol der Ausgangslage, so erhält man bei gleichem Winkel  $\alpha_t$  eine zweite Teilkurvenschar.

In diesem Fall b) kann übrigens eine Schar aus CAMUS-Bahnen bestehen, da  $P$  mit dem festen Polkreis der zweiten Erzeugung von  $k$  identisch sein kann.

c)  $|R| = |r'|$ : Nun schneidet jede reelle Normale  $g$  an  $k$  den Kreis  $P$  in zwei getrennten oder zusammenfallenden reellen Punkten. Ein Schnittpunkt von  $g$  mit  $P$  ist immer der zur Lage  $A$  auf  $k$  gehörige Momentanpol  $U$  der Erzeugung von  $k$ . Für diesen ergibt die obige Konstruktion eine CAMUS-Bahn als Teilkurve in  $E'$ . Während  $A$  von  $A_0$  bis zum nächsten Hauptscheitel  $A_1$  wandert,

legt  $U$  auf  $p' = P$  den Weg  $\frac{2\pi n_1 R}{n_0}$  zurück, was

$\alpha_t = \frac{2\pi(n_0, N_1)(n_1, N_0)}{n_0 N_0}$  ergibt. Da sich dabei die Normale  $g$

jedoch durch den Winkel  $\frac{2\pi(n_1 - n_0)}{n_0}$  dreht, muß der zweite

Schnittpunkt  $V$  von  $g$  mit  $P$  den Bogen  $\frac{2\pi(n_1 - 2n_0)R}{n_0}$  zurück-

legen <sup>23)</sup>, was für die Resthüllkurve bei  $n_1 \neq 2n_0$  zu

<sup>23)</sup> Die Summe der Zentriwinkel, die zu den von  $U$  und  $V$  auf  $P$  zurückgelegten Bögen gehören, ist nach dem Peripheriewinkelsatz immer gleich dem doppelten Drehwinkel von  $g$ .

### 3.3 Anzahl der Teilkurven

$$\alpha_t = \frac{2\pi(n_0, N_1)(n_1 - 2n_0, N_0)}{n_0 N_0} \text{ führt. Bei } n_0 = 1, n_1 = 2$$

(k ist eine gestreckte PASCALSche Schnecke) gilt  $\alpha_t = 2\pi$ .

Der Wert  $|\alpha_t/\alpha|$  gibt nun in den einzelnen Fällen die Anzahl der zu t kongruenten Teilkurven an, falls nicht bereits ab einem Punkt  $A'_2$  zwischen  $A'_0$  und  $A'_1$  sich t kongruent wiederholt.  $A'_2$  müßte wie  $A'_0$  von einem Haupt- oder Nebenscheitel  $A_2$  von k stammen, wobei  $A_2$  und der zugehörige Momentanpol  $V_2$  nun nicht bzgl. k die gleiche Lage wie  $A_0, V_0$  haben. Ein solcher Scheitelhüllpunkt kann nur dann von O den gleichen Abstand wie  $A'_0$  haben, wenn  $|R' - R| = |r' - r|$  oder  $|R' - R| = h$  oder  $|r' - r| = h$ . Zusätzlich stimmt in einem solchen Scheitelhüllpunkt nur dann die Krümmung der Hüllbahn mit jener in  $A'_0$  überein, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

1.  $R = r', R' = r$
2.  $R = r', R' = 2r' - r$
3.  $R = \frac{r'h}{r} = \bar{r}', R' = \frac{(r'-r)h}{r} = \bar{r}$  <sup>24)</sup>
4.  $R = \bar{r}', R' = 2\bar{r}' - \bar{r}$ .

Diese durch einfache Rechnung bestimmbaren Fälle sind die einzigen, in welchen Zwischenlagen  $A'_2$  mit obiger Eigenschaft überhaupt möglich sind und sich somit die Anzahl der Teilkurven einer Schar vermindern könnte. Alle vier Fälle sind bereits behandelt worden:

In 1. und 3. ist die Bewegung B die Umkehrbewegung zu einer Erzeugung von k. Nach 1.5 arten die CAMUS-Bahnen in Punkte aus und zwar treten in 1.  $|n_1|$ , in 3.  $|n_0 - n_1|$  Stützpunkte auf. In 2. setzt sich nach 1.4, Satz 7a die Resthüllbahn wegen  $h > |r|$  aus  $|2n_0 - n_1|$  je doppelt überdeckten kongruenten Kurvenstücken einer gespitzten Trochoide zusammen. Im Fall 4. tritt immer nur eine gespitzte Trochoide als Resthüllbahn auf gegenüber fallweise zwei CAMUS-Bahnen; dies ist der einzige Fall, in welchem die Teilkurvenanzahl tatsächlich von  $|\alpha_t/\alpha|$  abweicht.

Zusammengefaßt erhält man

<sup>24)</sup> Mit  $\bar{r}', \bar{r}$  sind die Polkreisradien bei der zweiten Erzeugung von k bezeichnet. Für diese gilt wegen (17)  $h < |\bar{r}|$ .

### 3.3 Anzahl der Teilkurven

Satz 18: Die Hüllbahn der nicht gespitzten Trochoide  $k = [r', r; h]$  mit  $h > |r|$  bei der Bewegung  $B = [R', R]$  setzt sich aus zwei Scharen von je  $z_i$  ( $i = 1, 2$ ) kongruenten Teilkurven (im Sinne von (16)) zusammen, und zwar

$$a) |R| < |r'| : z_1 = z_2 = \left| \frac{n_0}{(n_0, N_1)} \right|$$

$$b) |R| > |r'| : z_1 = z_2 = (n_1 - n_0, N_0) \quad 25)$$

Ausnahme: bei  $R = \bar{r}', R' = 2\bar{r}' - \bar{r}$  gilt:

$$z_1 = (n_1 - n_0, 2) \quad 26), z_2 = 1$$

$$c) |R| = |r'| : z_1 = (n_1, N_0) \quad 26)$$

$$\text{bei } n_0 = 1, n_1 = 2 : z_2 = |N_0|$$

$$\text{bei } n_1 \neq 2n_0 : z_2 = (n_1 - 2n_0, N_0)$$

Die Anzahl der Symmetrieachsen einer Teilkurve ist aus dem zugehörigen  $z_i$  nach Satz 17 als Wert des Quotienten

$$\frac{2\pi}{\alpha_t} = \frac{2\pi}{\alpha z_i} = \left| \frac{n_0 N_0}{(n_0, N_1) \cdot z_i} \right| \quad \text{zu ermitteln.}$$

In gleicher Weise könnte man bei der Bewegung einer gespitzten Trochoide  $k$  vorgehen. Einfacher ist es, Satz 3 zu verwenden. Danach gibt es bei  $|R| \neq |r'|$  immer Bewegungen nicht gespitzter Trochoiden mit gleicher Hüllbahn und diese sind in Satz 18 schon behandelt. Gilt hingegen  $|R| = |r'|$ , so sind alle Teilkurven als CAMUS-Bahnen erklärbar; deren Anzahlen sind ebenfalls schon in Satz 18 zu finden. Damit erhält man

Satz 18a: Die Hüllbahn der gespitzten Trochoide  $k = [r', r; r]$  bei der Bewegung  $B = [R', R]$  setzt

sich aus  $\left| \frac{n_0}{(n_0, N_1)} \right|$  Bahnen der Spitzen sowie aus ein bis zwei

Scharen von je  $z_i$  kongruenten Teilkurven zusammen und zwar:

25) LÜBBERT leitet in [38], Seite 92 analytisch ebenfalls dieses Teilergebnis ab, allerdings unter der strengeren Voraussetzung, daß die bewegte Trochoide  $k$  ganz im Inneren des Rollkreises  $P$  der Bewegung  $B$  liegt.

26) Diese erste Schar besteht aus CAMUS-Bahnen.

3.4 Anzahl der Hüllpunkte

bei  $n_0 \neq 2n_1$ :

a)  $|R| < |r'|$  :  $z_1 = \left| \frac{n_0}{(n_0, N_1)} \right|$

b)  $|R| > |r'|$  :  $z_1 = \frac{(n_0 N_0, (2n_1 - n_0) N_1)}{(n_0, N_1)}$

c)  $|R| = |r'|$  :  $z_1 = (n_1, N_0)$  ,  $z_2 = (n_0 - n_1, N_0)$  ;  
dies ist der einzige Fall mit zwei Scharen von Teilkurven.

bei  $n_0 : n_1 = 2 : 1$  :

a)  $|R| < |r'|$  :  $z_1 = 1$

b)  $|R| > |r'|$  :  $z_1 = \left| \frac{2N_0}{(2, N_1)} \right|$

c)  $|R| = |r'|$  :  $z_1 = 1$  .

Ausnahme: In den Fällen c) fällt nach F. MORLEY [20] bei  $N_0 : N_1 = (n_0 + n_1) : n_0$  oder  $N_0 : N_1 = (2n_0 - n_1) : n_0$  eine Schar mit der Bahn der Spitzen zusammen.

3.4 Anzahl der Hüllpunkte

Die Hüllpunkte der Trochoide  $k$  sind die Fußpunkte der aus dem Momentanpol  $V$  der Bewegung  $B$  an  $k$  legbaren Normalen. Diese Anzahl ist analog zu bestimmen wie die Klasse einer algebraischen Trochoide in [5], Kap.33. Man erhält

$\nu = 2 \max(|n_0|, |n_1|, |n_0 - n_1|) = |n_0| + |n_1| + |n_0 - n_1|$  ;  
bei gespitzten Trochoiden vermindert sich diese Zahl um  $|n_0|$ .

Satz 19: Die Anzahl  $\nu$  der reellen und komplexen Hüllpunkte einer nicht gespitzten Trochoide  $k$  lautet

$\nu = |n_0| + |n_1| + |n_0 - n_1|$ . Bei  $|r'| = |R|$  liegen davon  $|n_1|$  reelle Hüllpunkte auf den CAMUS-Bahnen. Bei gespitzten Trochoiden spalten sich  $|n_0|$  Spitzen ab.

Im Laufe der Bewegung  $B$  kann sich die Anzahl  $\nu_r$  der reellen Hüllpunkte von  $k$  ändern. Dies setzt Lagen voraus, in

### 3.4 Anzahl der Hüllpunkte

welchen mindestens zwei Hüllpunkte zusammenfallen, der Momentanpol  $V$  also ein Krümmungsmittelpunkt der zugehörigen Lage von  $k$  ist. Im System von  $k$ , also in der Gangebene  $E$ , erfüllen die Momentanpole den bewegten Polkreis  $P$ . Schneidet nun  $P$  die Evolute  $k^*$  von  $k$  nicht reell, so bleibt  $\nu_r$  im Laufe der Bewegung  $B$  konstant. Es lassen sich somit aus der Gestalt von  $k^*$  hinreichende Bedingungen für die Konstanz von  $\nu_r$  gewinnen:

Der Krümmungsmittelpunkt  $X^*$  zu einem reellen Punkt  $X$  der nicht gespitzten Trochoide  $k = [r', r; h]$  hat vom Mittelpunkt  $M'$  dann und nur dann einen extremen Abstand, wenn

1. die Gerade  $M'X^*$  auf der Tangente  $X^*X$  an  $k^*$  normal steht,
2.  $X$  ein Wende- oder Flachpunkt von  $k$  ist,
3.  $X$  ein Scheitel ist.

Aus den Eigenschaften der quadratischen Punktverwandtschaft zwischen  $X$  und  $X^*$  (siehe [5] oder [24]) folgt

Ad 1. Bei  $h < |r|$  haben reelle Punkte  $X^*$  mit der verlangten Eigenschaft von  $M'$  den Abstand  $\left| \frac{hr'}{r} \right|$ . Bei  $h > |r|$  - und dies kann wegen der zwei Erzeugungsmöglichkeiten von  $k$  immer vorausgesetzt werden - gilt  $\overline{M'X^*} = |r'|$ .

Ad 2. Bei  $h > |r|$  treten reelle Wende- oder Flachpunkte nur bei  $0 < \frac{r'}{r} < 2$  und  $h \leq \left| \frac{r^2}{r' - r} \right|$  auf.

Ad 3. Bei der Erzeugung von  $k$  besteht in jeder Lage der Ort jener Punkte, welche augenblicklich einen Scheitel ihrer Bahn durchlaufen, a) aus der Polnormalen, b) aus einem Kreis

mit dem Durchmesser  $\frac{3rr'}{2r' - r}$ ; dieser Kreis berührt die Pol-

kreise im Momentanpol (siehe [5], I, Kap.21). Ist der Punkt  $X$  von  $k$  ein Scheitel des Typs a), also auf einer Symmetrieachse von  $k$  gelegen, so hat der zugehörige Scheitelkrümmungsmittel-

punkt  $X^*$  vom Mittelpunkt  $M'$  den Abstand  $\left| \frac{hr'^2}{r^2 \pm h(r - r')} \right|$ . Für Scheitel des Typs b) läßt sich nachweisen, daß die zugehörigen

### 3.4 Anzahl der Hüllpunkte

Krümmungsmittelpunkte keinen absolut extremen Abstand von  $M'$  haben.

Es liegen somit bei  $h > |r|$  keine Punkte der Evolute  $k^*$  innerhalb eines Kreises  $b$  mit der Mitte  $M'$  und dem Radius

$$\min (|r'|, \left| \frac{hr'^2}{r^2 + h(r - r')} \right|, \left| \frac{hr'^2}{r^2 - h(r - r')} \right|)$$

und, falls  $k$  keine Wende- oder Flachpunkte enthält, außerhalb eines Kreises  $B$  mit dem Radius

$$\max (|r'|, \left| \frac{hr'^2}{r^2 + h(r - r')} \right|, \left| \frac{hr'^2}{r^2 - h(r - r')} \right|) .$$

Liegt der bewegte Polkreis  $P$  innerhalb von  $b$  oder außerhalb des Kreises  $B$ , so bleibt die Anzahl  $\nu_r$  der reellen Hüllpunkte von  $k$  konstant.

Die Anzahl  $\nu_r$  ist nun aber für alle Kreise  $P$  innerhalb  $b$  dieselbe, denn eine Änderung würde nach demselben Schluß wie oben reelle Punkte der Evolute  $k^*$  innerhalb  $b$  bedingen.  $\nu_r$  ist daher als Anzahl der reellen Fußpunkte der aus  $M'$  an  $k$  legbaren Normalen bestimmbar; es gilt somit  $\nu_r = 2|n_0|$ .

Ebenso ist für alle Kreise  $P$  außerhalb  $B$  die Anzahl  $\nu_r$  gleich. Man bestimmt in diesem Fall das  $\nu_r$  am einfachsten als Anzahl der reellen Fußpunkte der aus einem Fernpunkt an  $k$  legbaren Normalen. Aus einer Parameterdarstellung

$$x = (r' - r) \cdot \cos n_1 \varphi + h \cdot \cos (n_1 - n_0) \varphi ,$$

$$y = (r' - r) \cdot \sin n_1 \varphi + h \cdot \sin (n_1 - n_0) \varphi$$

von  $k$  findet man beispielsweise für den Fernpunkt der  $y$ -Achse:  $\nu_r$  ist gleich der Anzahl der reellen Nullstellen der Gleichung

$$r \cdot \cos n_1 \varphi + h \cdot \cos (n_1 - n_0) \varphi = 0 \quad \text{für } \varphi \in [0, 2\pi) .$$

Die linke Seite dieser Gleichung stellt die Überlagerung zweier Kosinusschwingungen dar. Bei  $h > |r|$  hat die zweite die größere Amplitude und bei  $|n_1 - n_0| > |n_1|$ , was gleichbedeutend

ist mit  $\frac{n_0}{n_1} < 0$  oder  $\frac{n_0}{n_1} \geq 2$  ist, auch die größere Frequenz.

### 3.4 Anzahl der Hüllpunkte

Bei  $0 < \frac{n_0}{n_1} < 2$  muß  $|h(n_0 - n_1)| > |rn_1|$  sein, da  $k$  keine Wende- oder Flachpunkte aufweisen darf; es verläuft also auch in diesem zweiten Fall die zweite Kosinusfunktion in ihren Nullstellen steiler als die erste. In jedem abgeschlossenen Intervall, in dem die zweite Funktion die Werte zwischen  $+r$  und  $-r$  durchläuft, muß daher genau eine Lösung der obigen Gleichung liegen. Insgesamt gibt es für  $\varphi \in [0, 2\pi)$   $2|n_0 - n_1|$  derartige Intervalle.

Zusammenfassend gilt

Satz 20: Für die Anzahl  $\nu_r$  der reellen Hüllpunkte der Trochoide  $k = [r', r; h]$  mit  $h > |r|$  bei der Bewegung  $B = [R', R]$  gilt

$$1. \text{ bei } |R| < \min(|r'|, \left| \frac{hr'^2}{r^2 + h(r - r')} \right|, \left| \frac{hr'^2}{r^2 - h(r - r')} \right|) \\ \nu_r = 2|n_0|$$

$$2. \text{ bei } |R| > \max(|r'|, \left| \frac{hr'^2}{r^2 + h(r - r')} \right|, \left| \frac{hr'^2}{r^2 - h(r - r')} \right|)$$

und falls nicht zugleich  $0 < \frac{r'}{r} < 2$  und  $h \leq \left| \frac{r^2}{r' - r} \right|$

$$\nu_r = 2|n_0 - n_1|.$$

In allen hier nicht genannten Fällen mit Ausnahme der Grenzfälle ändert sich  $\nu_r$  im Laufe der Bewegung  $B$ .

Analog findet man für gespitzte Trochoiden

Satz 20a: Für die Anzahl  $\nu_r$  der reellen Hüllpunkte der gespitzten Trochoide  $k = [r', r; r]$  bei der Bewegung  $B = [R', R]$  gilt:

$$1. \text{ bei } |R| < \min(|r'|, \left| \frac{r'^2}{2r - r'} \right|) \quad \nu_r = |n_0|$$

$$2. \text{ bei } |R| > \max(|r'|, \left| \frac{r'^2}{2r - r'} \right|) \quad \nu_r = |2n_1 - n_0|.$$

### 3.4 Anzahl der Hüllpunkte

Grenzfälle: Geht der Rollkreis P der Bewegung B durch Scheitelkrümmungsmitteln von k, so gibt es einzelne Bewegungslagen mit drei zusammenfallenden Hüllpunkten, also mit sechspunktiger Berührung zwischen Trochoide und Hüllbahn.

Ist der Rollkreis P mit dem festen Polkreis der Erzeugung von k identisch, so liegen  $|n_1|$  reelle Hüllpunkte gleichmäßig aufgeteilt auf den  $(n_1, N_0)$  CAMUS-Bahnen. Die Realitätsverhältnisse der auf der Resthüllkurve liegenden Hüllpunkte, der "Resthüllpunkte", sind in [28] ausführlich behandelt. Es sei hier nur das Ergebnis wiederholt!

Satz 20b: Für die Anzahl  $\lambda_r$  jener reellen Hüllpunkte von  $k = [r', r ; h]$ , die bei  $|R| = |r'|$  auf der Resthüllkurve liegen, gilt:

- |  |  |                            |
|--|--|----------------------------|
| 1. bei $\frac{n_0}{n_1} > 1$               | und $h >  r $ :                                    | $\lambda_r =  2n_0 - n_1 $ |
|  | $h \leq \left  r \frac{n_1}{2n_0 - n_1} \right $ : | $\lambda_r =  n_1 $        |
| 2. bei $\frac{1}{2} < \frac{n_0}{n_1} < 1$ | und $h <  r $ :                                    | $\lambda_r =  n_1 $        |
|  | $h \geq \left  r \frac{n_1}{2n_0 - n_1} \right $ : | $\lambda_r =  2n_0 - n_1 $ |
| 3. bei $\frac{n_0}{n_1} = \frac{1}{2}$     | und $h <  r $ :                                    | $\lambda_r =  n_1  = 2$    |
| 4. bei $0 < \frac{n_0}{n_1} < \frac{1}{2}$ | und $h <  r $ :                                    | $\lambda_r =  n_1 $        |
|  | $h \geq \left  r \frac{n_1}{2n_0 - n_1} \right $ : | $\lambda_r =  2n_0 - n_1 $ |
| 5. bei $\frac{n_0}{n_1} < 0$               | und $h >  r $ :                                    | $\lambda_r =  2n_0 - n_1 $ |
|  | $h \leq \left  r \frac{n_1}{2n_0 - n_1} \right $ : | $\lambda_r =  n_1 $        |

In jenen Fällen, wo für h das Gleichheitszeichen gilt, gibt es einzelne Lagen, wo sechspunktige Berührung zwischen k und der Resthüllkurve auftritt. In der Aufstellung wurde dies als ein

### 3.4 Anzahl der Hüllpunkte

reeller Hüllpunkt gezählt.

In allen hier nicht genannten Fällen ändert sich  $\lambda_r$  im Laufe der Bewegung.

Die Ergebnisse des Satzes 20b ließen sich auch aus dem Satz 20 ableiten: Bei  $h > |r|$  berührt die Evolute  $k^*$  von  $k$  den festen Polkreis  $p'$  der Erzeugung von  $k$ . Ist ein solcher Berührungspunkt Momentanpol der Bewegung  $B$ , so fallen zwar zwei Hüllpunkte von  $k$  zusammen, jedoch ein auf der CAMUS-Bahn gelegener mit einem Resthüllpunkt (in Tafel I, Bild c nimmt  $k_1$  eine solche Lage ein). Wenn keine weiteren reellen Schnittpunkte von  $k^*$  mit  $p'$  existieren, wenn also die Spitzen von  $k^*$  entweder alle innerhalb bzw. alle außerhalb des Kreises  $p'$  liegen, so bleibt  $\lambda_r$  konstant; man erhält  $\lambda_r$ , indem man von  $\nu_r$  aus Satz 20,2. bzw. 1. den Betrag  $|n_1|$  abzieht.

Bei  $h < |r|$  ist der größere der festen Polkreise der Erzeugungsmöglichkeiten von  $k$  der Rollkreis  $P$  der Bewegung  $B$ . Nun bleibt  $\lambda_r$  nur dann konstant, wenn alle Spitzen von  $k^*$  im Inneren von  $P$  liegen und  $k$  keine Wende- oder Flachpunkte hat. Nach Satz 20,2. ist  $\nu_r$  und nach Abzug von  $|n_1|$  wiederum  $\lambda_r$  zu ermitteln. Dabei ist zu beachten, daß Satz 20 nur für  $h > |r|$  gilt; in Satz 20 muß daher das Radienverhältnis der zweiten Erzeugung von  $k$ , also  $r' : r = n_0 : (n_0 - n_1)$  eingesetzt werden.

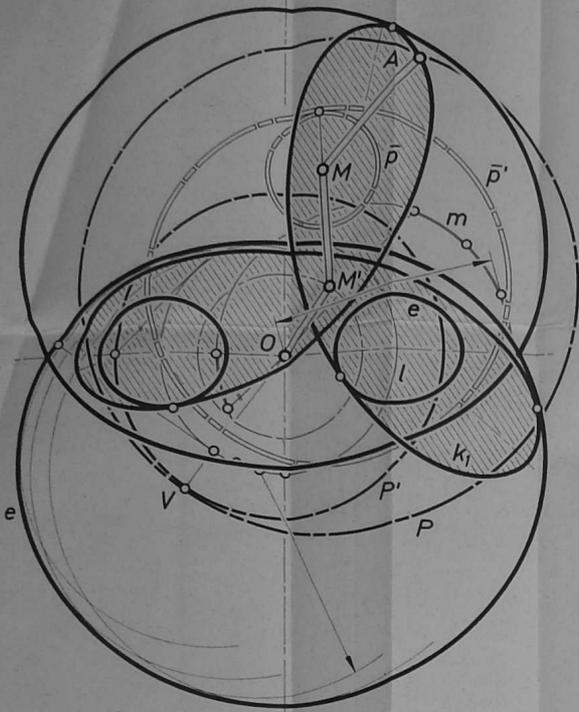
L i t e r a t u r

- 1 O. BAIER, Die Kinematik der Drehkolben- und Kreiskolbenmaschinen und ihre Fertigungsmöglichkeiten. VDI-Berichte Nr. 45, 31 - 37 (1960).
- 2 R. BEREIS, Über das Raumbild eines ebenen Zwanglaufes (kinematische Abbildung von Blaschke und Grünwald). Wiss. Z. techn. Univ. Dresden 13, 7 - 16 (1964).
- 3 W. BLASCHKE, Euklidische Kinematik und nichteuklidische Geometrie I, II. Z. Math. Phys. 60, 61 - 91, 203 - 204 (1911).
- 4 W. BLASCHKE, Ebene Kinematik. (Hamburg. math. Einzelschriften, H. 25). B. G. Teubner, Leipzig u. Berlin 1938.
- 5 W. BLASCHKE und H. R. MÜLLER, Ebene Kinematik. (Math. Einzelschriften, Bd. 5). R. Oldenbourg, München 1956.
- 6 L. BURMESTER, Kinematisch-geometrische Constructionen der Parallelprojection der Schraubenflächen und insbesondere des Schattens derselben. Z. Math. Phys. 18, 185 - 202 (1873).
- 7 L. BURMESTER, Kinematische Flächenerzeugung mittelst cylindrischer Rollung. Z. Math. Phys. 33, 337 - 348 (1888).
- 8 CH. E. L. CAMUS, Sur la figure des dents des roues etc. Mém. Acad. 1733, 117.
- 9 M. FRÉCHET, Sur quelques propriétés de l'hypocycloïde à trois rebroussements. Nouv. Ann. 61, 206 - 217 (1902).
- 10 J. GRÜNWARD, Ein Abbildungsprinzip, welches die ebene Geometrie und Kinematik mit der räumlichen Geometrie verknüpft. Österreich. Akad. Wiss., math.-naturw. Kl., S.-Ber., Abt. II, 120, 677 - 741 (1911).
- 11 F. HOHENBERG, Parallelprojektionen in nichteuklidischen Räumen. Monatsh. Math. Phys. 42, 425 - 437 (1935).
- 12 F. HOHENBERG, Konstruktive Geometrie in der Technik. 3. Aufl., Springer, Wien / New York 1966.
- 13 J. HOSCHEK, Über Gleitkurven von Radlinien 2. Stufe. Math. Nachr. 27, 1 - 8 (1963).
- 14 J. HOSCHEK und C. LÜBBERT, Gleitkurven von sphärischen Radlinien zweiter Stufe. Math. Nachr. 40, 191 - 200 (1969).
- 15 F. LINDEMANN, Über unendlich kleine Bewegungen und über Kraftsysteme bei allgemeiner projektivischer Maßbestimmung. Math. Ann. 7, 56 - 143 (1874).
- 16 P. MEYER, Über Hüllkurven von Radlinien. Diss. TH Braunschweig (1966).
- 17 P. MEYER, Über Hüllkurven von Radlinien. Arch. der Math. 18, 651 - 662 (1967).

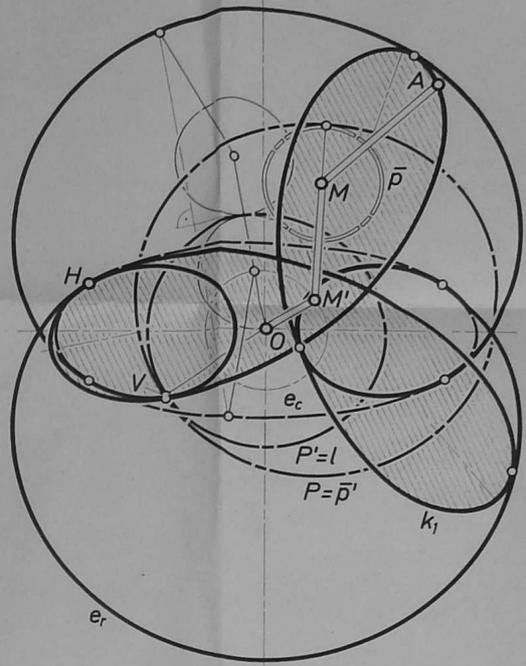
- 18 P. MEYER, On Sliding Curves of Trochoids. Journal of Mechanisms 2, 291 - 306 (1967).
- 19 P. MEYER, Elementare Gleitkurven bei Planetenbewegungen. Z. angew. Math. Mech. 48, 134 - 135 (1968).
- 20 F. MORLEY, On adjustable cycloidal and trochoidal curves. Amer. J. Math. 16, 188 - 204 (1894).
- 21 E. MÜLLER, Über Schiebflächen, deren eine Erzeugenden-schar aus gewöhnlichen Schraublinien besteht. Österreich. Akad. Wiss., math.-naturw. Kl., S.-Ber., Abt. II, 118, 3 - 13 (1909).
- 22 E. MÜLLER, Über Punkttransformationen, die die Ebenen des Raumes in kongruente gerade Konoide mit parallelen Achsen überführen. Österreich. Akad. Wiss., math.-naturw. Kl., S.-Ber., Abt. II, 126, 915 - 929 (1917).
- 23 E. MÜLLER, Vorlesungen über Darstellende Geometrie, Bd.1, Die linearen Abbildungen, bearbeitet von E. KRUPPA. Deuticke, Wien 1923.
- 24 H. R. MÜLLER, Kinematik. Sammlung Göschen, Bd. 584/584a, Berlin 1963.
- 25 F. REULEAUX, Lehrbuch der Kinematik, Bd. I., Braunschweig 1875.
- 26 O. RICHTER, Über Kreisfußpunktkurven. Z. Math. Phys. 34, 338 (1889).
- 27 O. RICHTER, Über die Systeme derjenigen Kegelschnitte, die eine bizirkuläre Kurve 4. Ordnung viermal berühren. Z. Math. Phys. 35, Supplement 1 (1890).
- 28 H. STACHEL, Radlinien als Hüllkurvenpaare. Math. Nachr. 45, 167 - 182 (1970).
- 29 H. STACHEL, Hüllbahnen von Trochoiden bei Trochoidenbewegungen. Math. Nachr. 46, 189 - 208 (1970).
- 30 H. STACHEL, Netzprojektion quasielliptischer Schraub-schiebflächen. Österr. Akad. Wiss., math.-naturw. Kl., S.-Ber., Abt. II, 178, 379 - 402 (1969).
- 31 H. STACHEL, Über Hüllbahnen von Trochoiden bei Trochoidenbewegungen. Z. angew. Math. Mech. (in Druck).
- 32 K. STRUBECKER, Über die Schraubungen des elliptischen Raumes. Österreich. Akad. Wiss., math.-naturw. Kl., S.-Ber., Abt. II, 139, 421 - 450 (1930).
- 33 K. STRUBECKER, Über nichteuklidische Schraubungen. Monatsh. Math. Phys. 38, 63 - 84 (1931).
- 34 K. STRUBECKER, Kinematik, Liesche Kreisgeometrie und Geraden-Kugel-Transformation. Elemente Math. 8, 4 - 13 (1953).
- 35 F. WANKEL, Einteilung der Rotations-Kolbenmaschinen. Deutsche Verlagsanstalt, Stuttgart 1963.

- 36 W. WUNDERLICH, Darstellende Geometrie nichteuklidischer Schraubflächen. Monatsh. Math. Phys. 44, 249 - 279 (1936).
- 37 W. WUNDERLICH, Über Gleitkurvenpaare aus Radlinien. Math. Nachr. 20, 373 - 380 (1959).
- 38 C. LÜBBERT, Symmetrieeigenschaften von Radlinien und Hüllkurven. Diss. TH Darmstadt (1969).

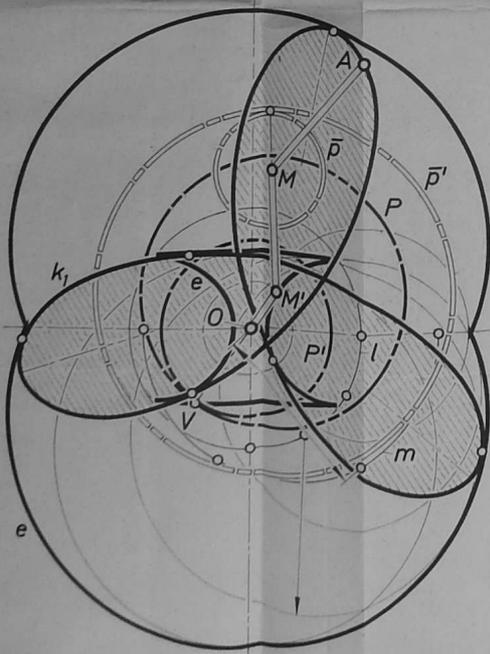
TAFEL I



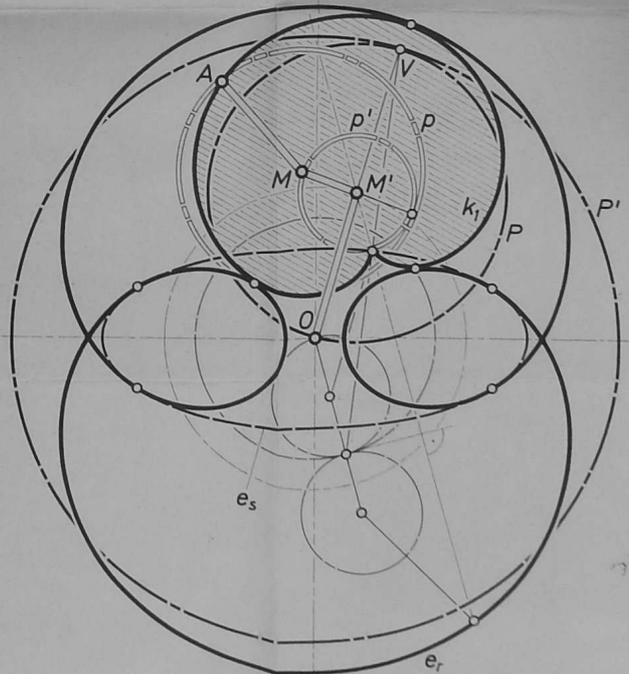
a)  $k_1 = [150, 100; 40] = [60, 20; 50]$ ,  $B_1 = [56, 84]$   
 $n_0 : n_1 = 3 : 2$ ,  $N_0 : N_1 = 2 : 3$



b)  $k_1 = [150, 100; 40] = [60, 20; 50]$ ,  $B_1 = [40, 60]$   
 $n_0 : n_1 = 3 : 2$ ,  $N_0 : N_1 = 2 : 3$

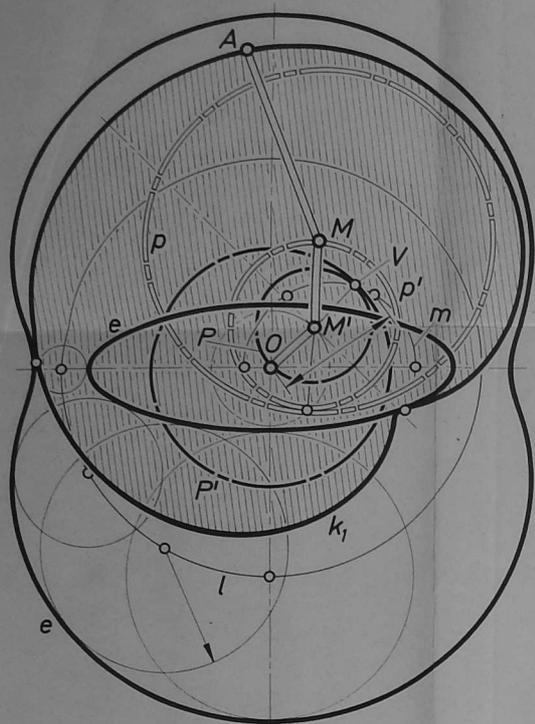


c)  $k_1 = [150, 100; 40] = [60, 20; 50]$ ,  $B_1 = [30, 45]$   
 $n_0 : n_1 = 3 : 2$ ,  $N_0 : N_1 = 2 : 3$



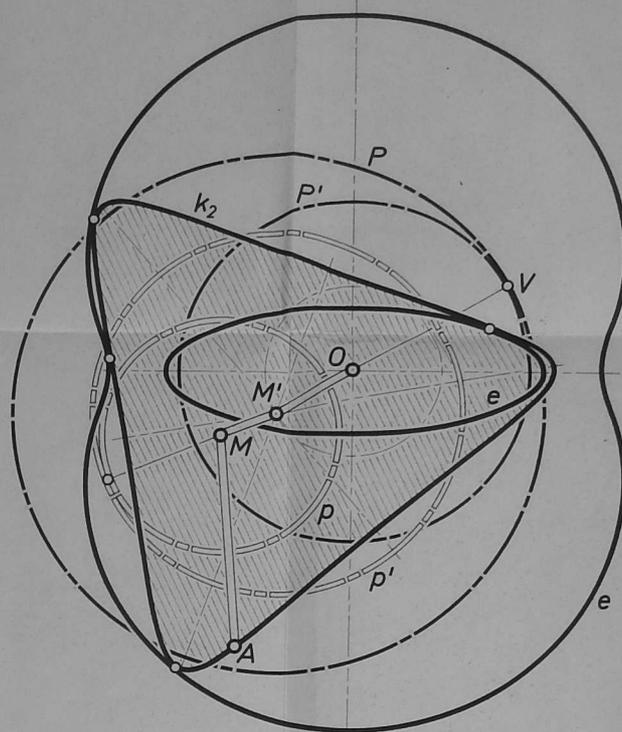
d)  $k_1 = [20, 40; 40] = [20, -20; 20]$ ,  $B_1 = [100, 50]$   
 $n_0 : n_1 = 1 : 2$ ,  $N_0 : N_1 = 2 : 1$

# TAFEL II



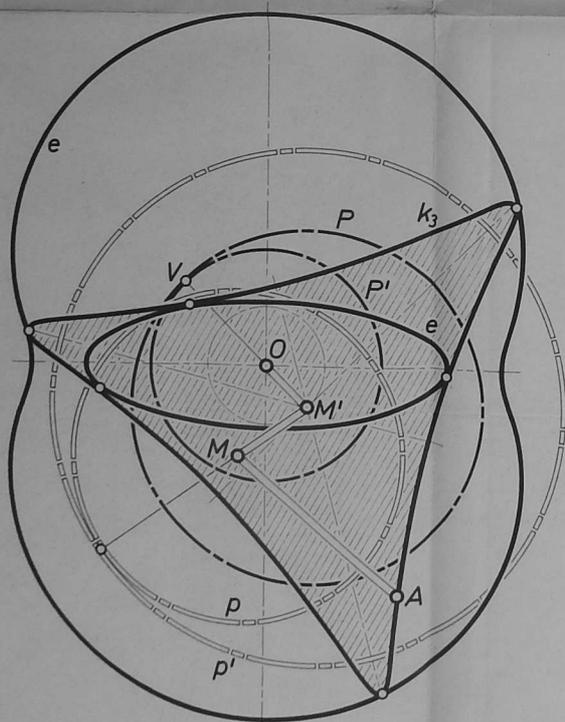
$$k_1 = [26, 52; 64] = [32, -32; 26], \quad B_1 = [36, 18]$$

$$n_0 : n_1 = 1 : 2, \quad N_0 : N_1 = 2 : 1$$



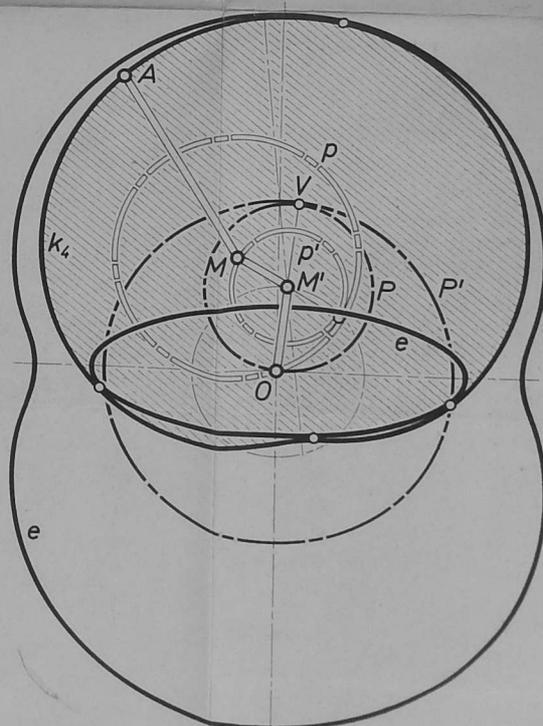
$$k_2 = [54, 36; 64] = [96, 32; 18], \quad B_2 = [52, 78]$$

$$n_0 : n_1 = 3 : 2, \quad N_0 : N_1 = 2 : 3$$



$$k_3 = [78, 52; 64] = [96, 32; 26], \quad B_3 = [36, 54]$$

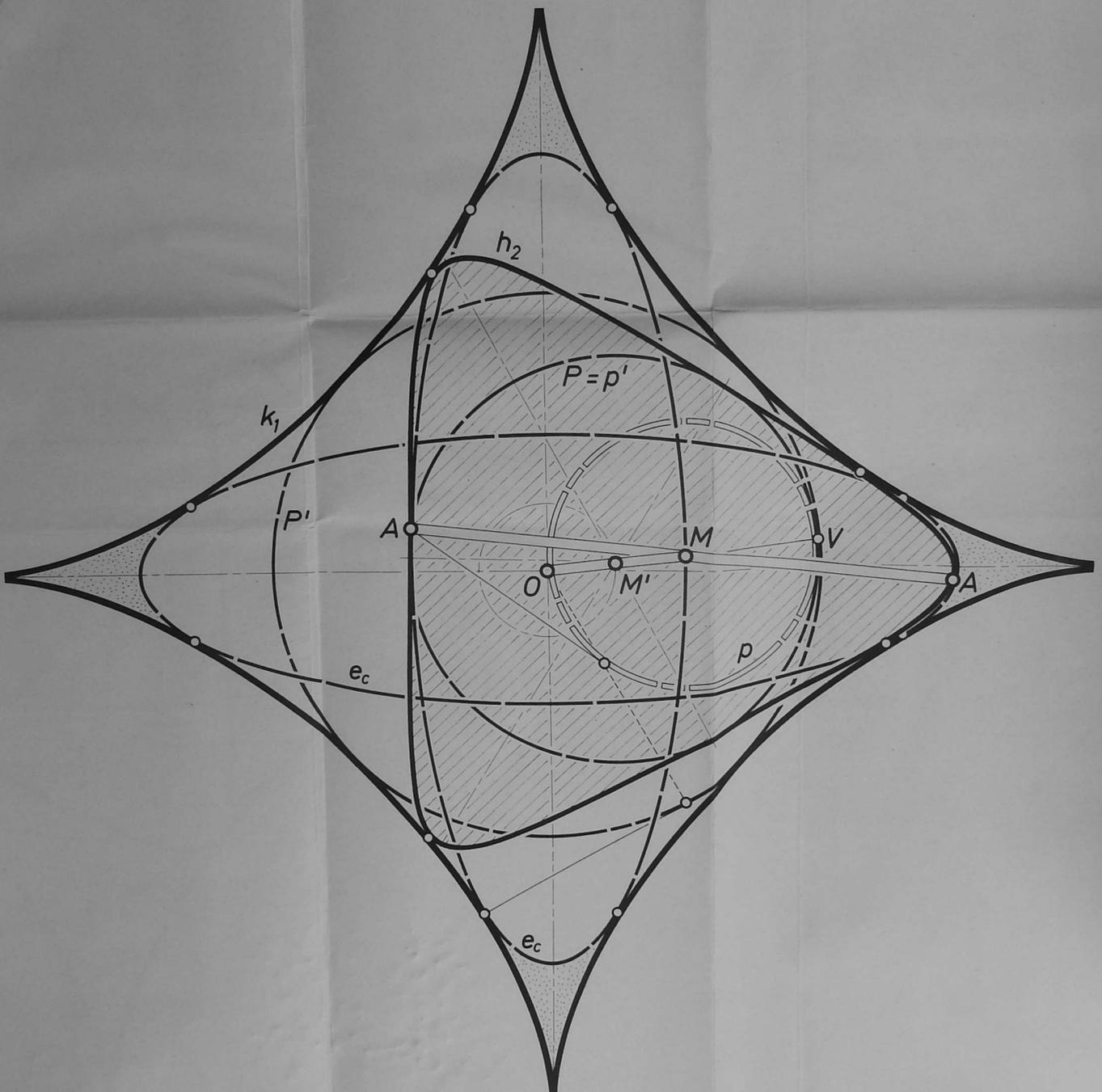
$$n_0 : n_1 = 3 : 2, \quad N_0 : N_1 = 2 : 3$$



$$k_4 = [18, 36; 64] = [32, -32; 18], \quad B_4 = [52, 26]$$

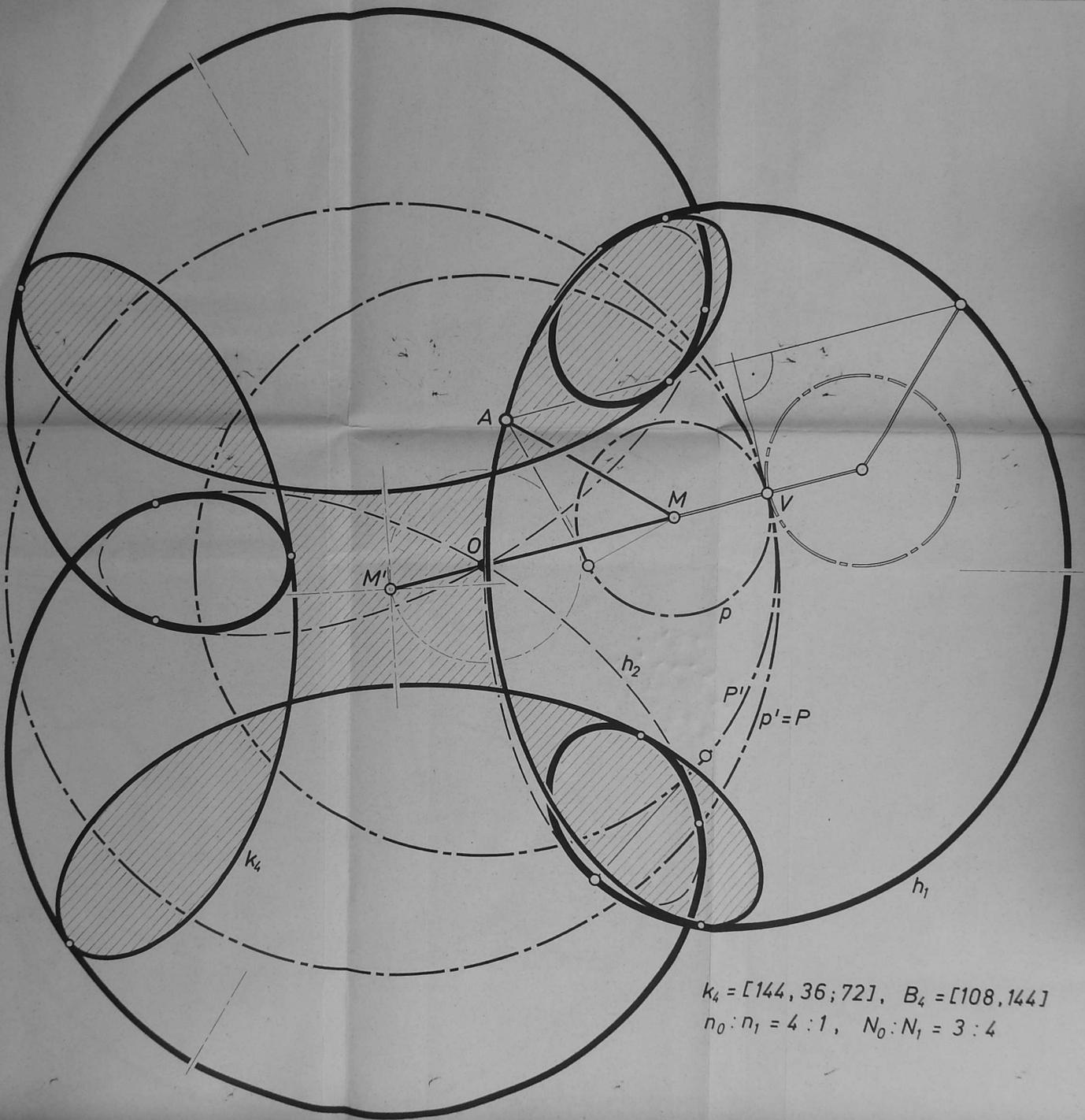
$$n_0 : n_1 = 1 : 2, \quad N_0 : N_1 = 2 : 1$$

# TAFEL III

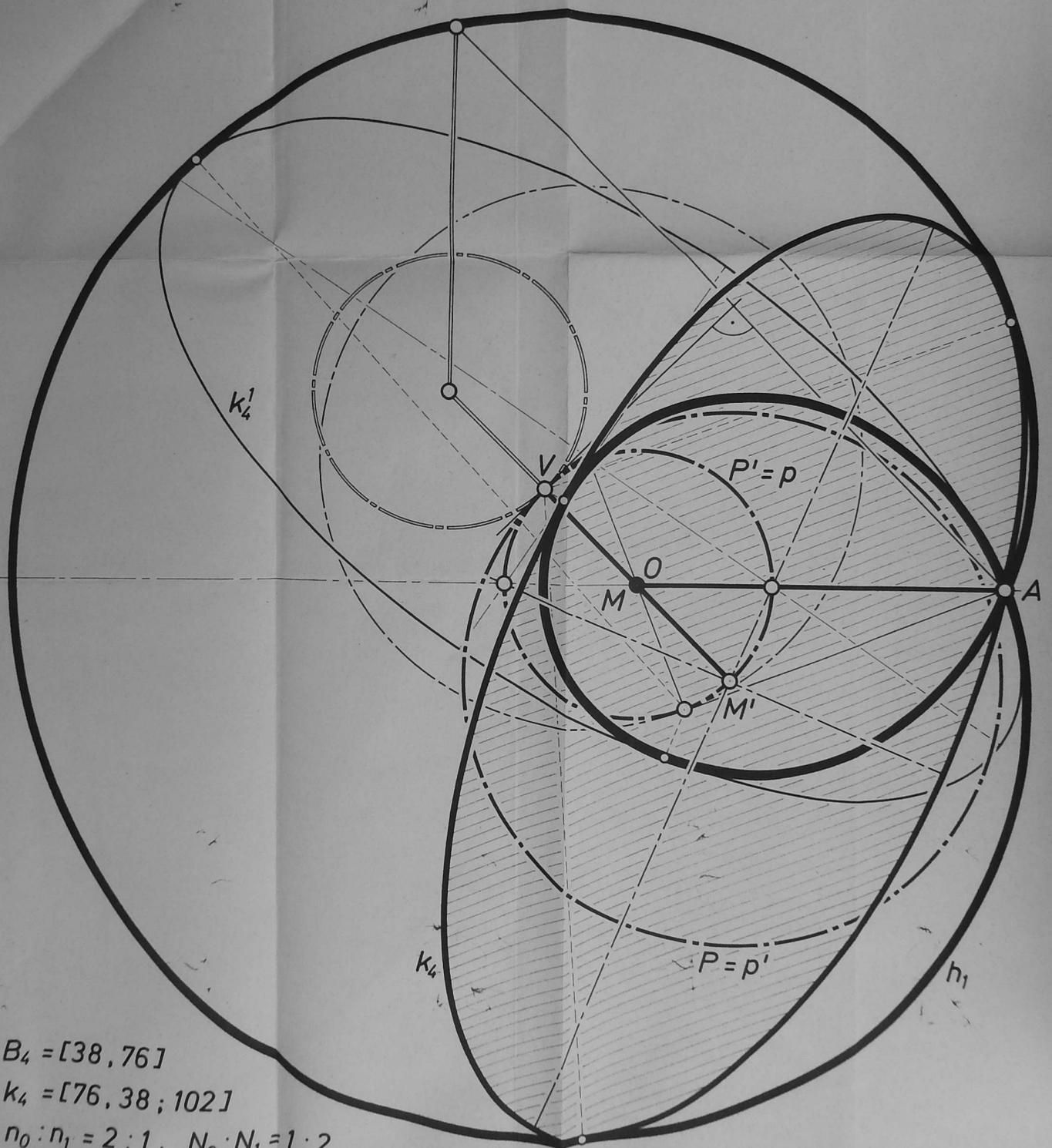


$$h_2 = [60, 40; 80] = [120, 40; 20], B_1^{-1} = [80, 60]; n_0 : n_1 = 3 : 2, N_0 : N_1 = 4 : 3$$

TAFEL IV



# TAFEL V

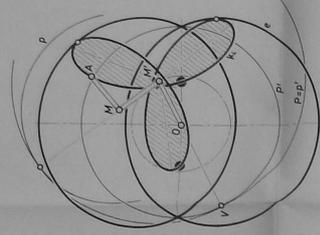


$$B_4 = [38, 76]$$

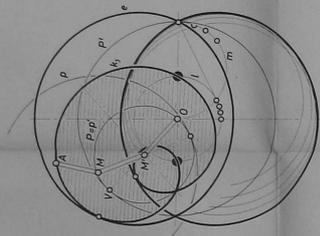
$$k_4 = [76, 38; 102]$$

$$n_0 : n_1 = 2 : 1, N_0 : N_1 = 1 : 2$$

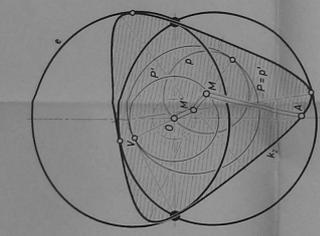
TAFEL VI



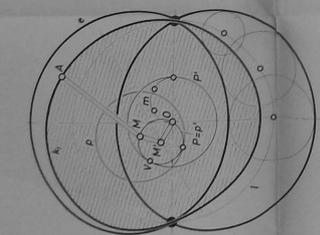
$K_1 = [11, 22, 50], B_1 = [22, 11]$   
 $n_0, n_1 = 1:2, N_0, N_1 = 2:1$



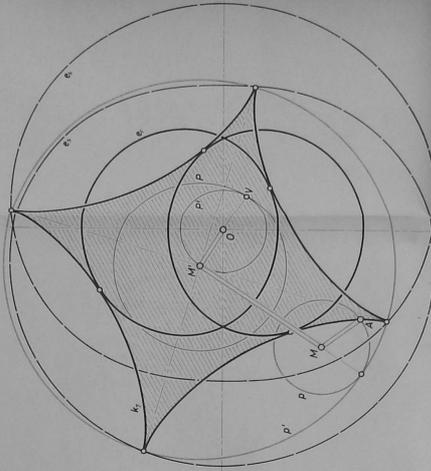
$K_2 = [33, 22, 50], B_2 = [22, 33]$   
 $n_0, n_1 = 3:2, N_0, N_1 = 2:3$



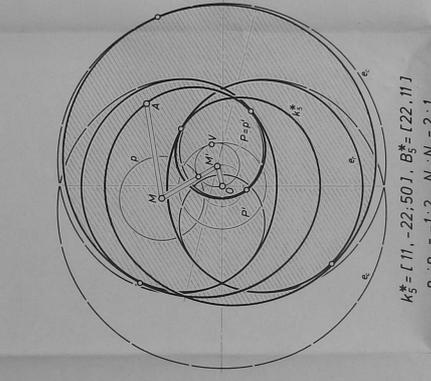
$K_3 = [25, 50, 22], B_3 = [50, 25]$   
 $n_0, n_1 = 1:2, N_0, N_1 = 2:1$



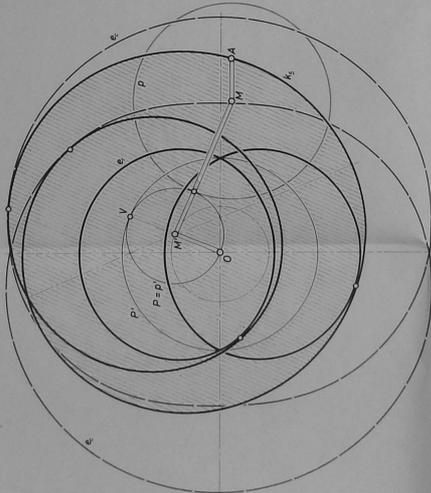
$K_4 = [75, 50, 22], B_4 = [50, 75]$   
 $n_0, n_1 = 3:2, N_0, N_1 = 2:3$



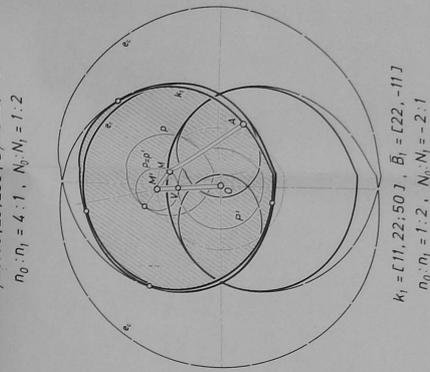
$K_5 = [100, 25, 25], B_5 = [22, 44]$   
 $n_0, n_1 = 4:1, N_0, N_1 = 1:2$



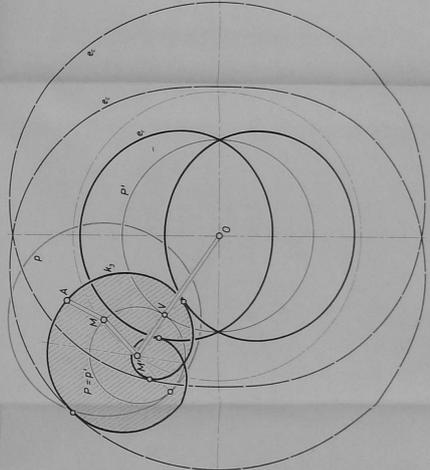
$K_6 = [11, -22, 50], B_6 = [22, 11]$   
 $n_0, n_1 = -1:2, N_0, N_1 = 2:1$



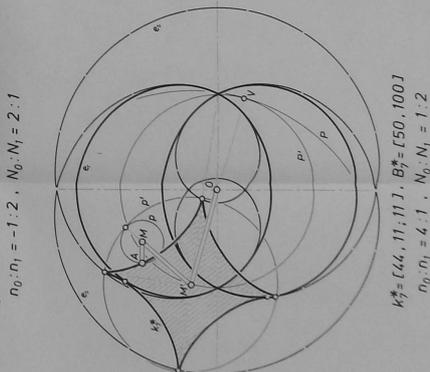
$K_7 = [25, -50, 22], B_7 = [50, 25]$   
 $n_0, n_1 = -1:2, N_0, N_1 = 2:1$



$K_8 = [11, 22, 50], B_8 = [22, -11]$   
 $n_0, n_1 = 1:2, N_0, N_1 = -2:1$

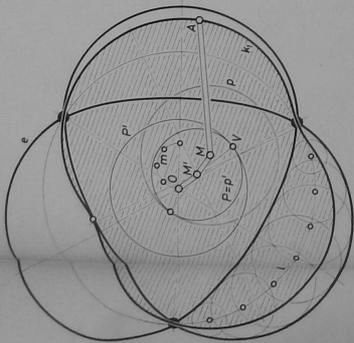


$K_9 = [25, 50, 22], B_9 = [50, -25]$   
 $n_0, n_1 = 1:2, N_0, N_1 = -2:1$

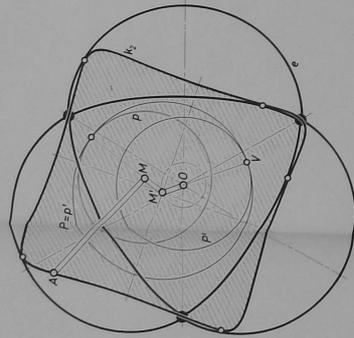


$K_{10} = [44, 11, 11], B_{10} = [50, 100]$   
 $n_0, n_1 = 4:1, N_0, N_1 = 1:2$

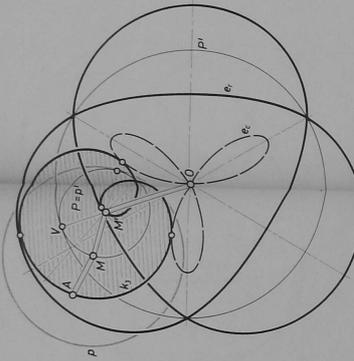
TAFEL VII



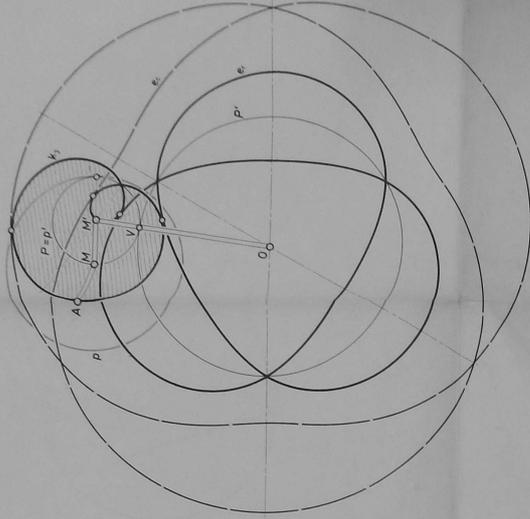
$k_1 = [20, 30; 60], B_1 = [30, 20]$   
 $n_0 : n_1 = 2 : 3, N_0 : N_1 = 3 : 2$



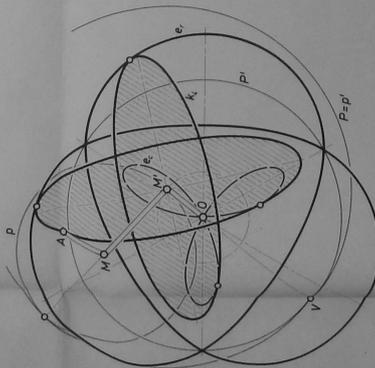
$k_2 = [40, 30; 60], B_2 = [30, 40]$   
 $n_0 : n_1 = 4 : 3, N_0 : N_1 = 3 : 4$



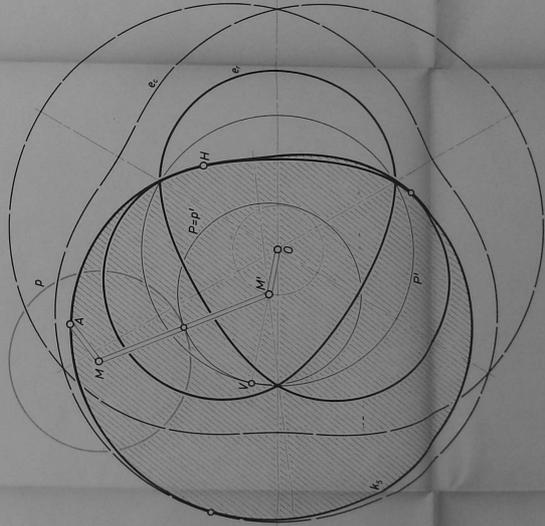
$k_3 = [20, 40; 20], B_3 = [60, 20]$   
 $n_0 : n_1 = 1 : 2, N_0 : N_1 = 3 : 1$



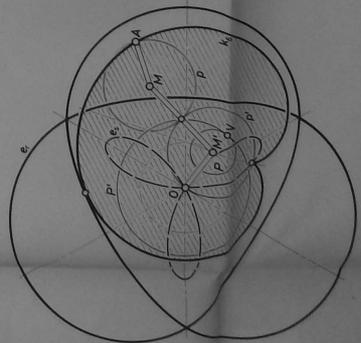
$k_5 = [20, 40; 20], B_5 = [60, -20]$   
 $n_0 : n_1 = 1 : 2, N_0 : N_1 = -3 : 1$



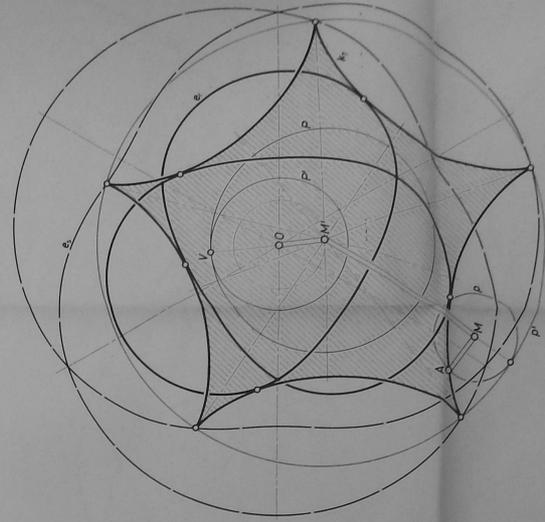
$k_2 = [80, 40; 20], B_2 = [60, 80]$   
 $n_0 : n_1 = 2 : 1, N_0 : N_1 = 3 : 4$



$k_5 = [40, -40; 20], B_5 = [60, 40]$   
 $n_0 : n_1 = -1 : 1, N_0 : N_1 = 3 : 2$

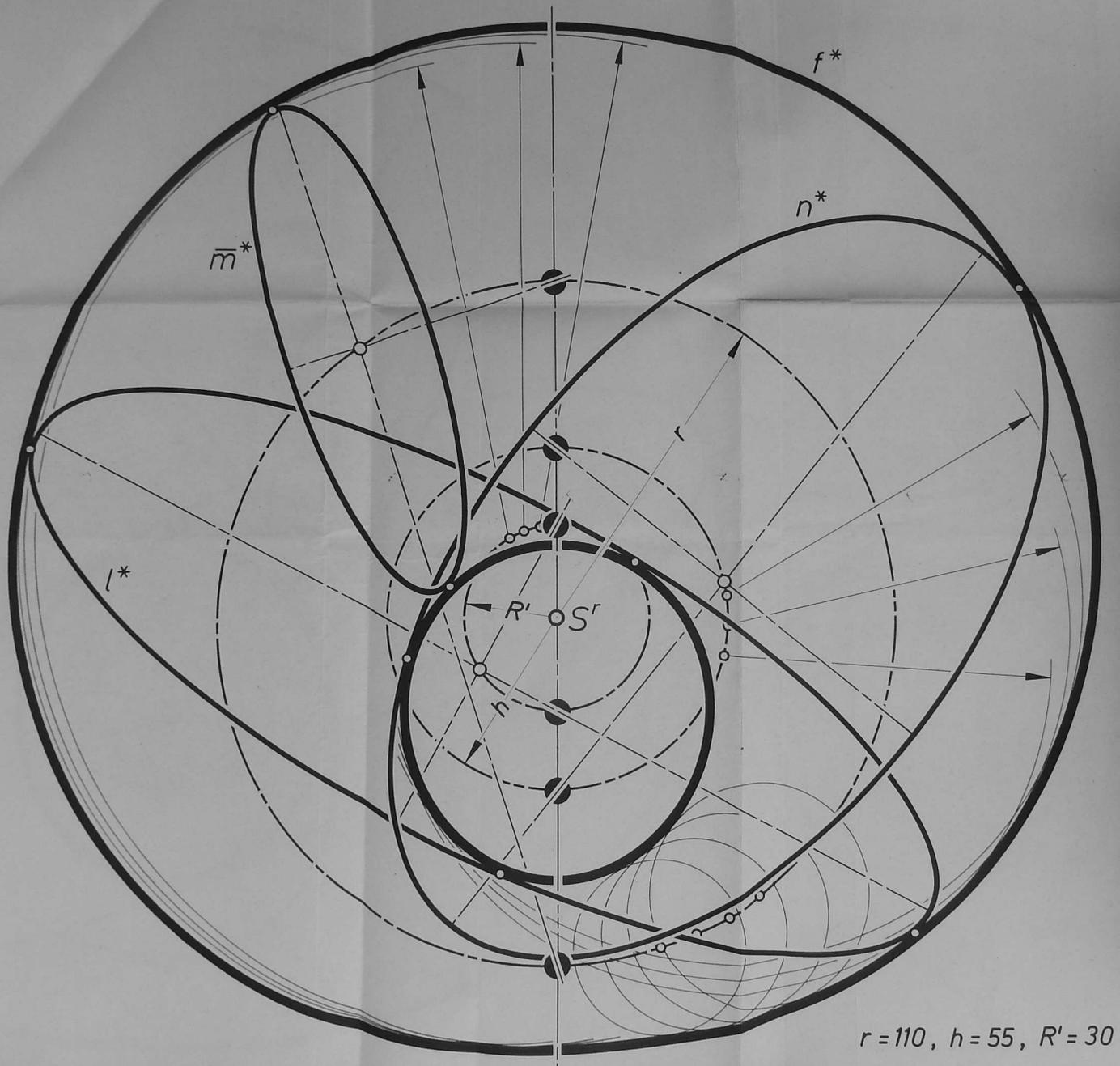


$k_6 = [2, -2; 2], B_6 = [30, 10]$   
 $n_0 : n_1 = -1 : 1, N_0 : N_1 = 3 : 1$



$k_7 = [100, 20; 20], B_7 = [30, 50]$   
 $n_0 : n_1 = 5 : 1, N_0 : N_1 = 3 : 5$

TAFEL VIII



$r = 110, h = 55, R' = 30$

Halbachsenlängen:  $l^*(165, 55), \bar{m}^*(85, 25), n^*(140, 80)$ .