

Mathematisches zur Sonnenreflexionsuhr

Hellmuth Stachel



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
WIEN



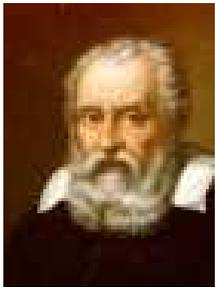
stachel@dmg.tuwien.ac.at — <http://www.geometrie.tuwien.ac.at/stachel>

Zur Präsentation des Buches F. Mayrhofer, G. Liechtenstein (Hrsg.):
Die Sonnenreflexionsuhr im Stift Heiligenkreuz, Be&Be-Verlag, am 24. Februar 2017



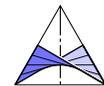
Inhalt

1. Allgemeines über Sonnenuhren
2. Spiegelung und Schatten
3. Pläne für die Handwerker
4. Zur Genauigkeit der Sonnenuhren



Galileo Galilei:

“Wer die Geometrie begreift, vermag in dieser Welt alles zu verstehen”

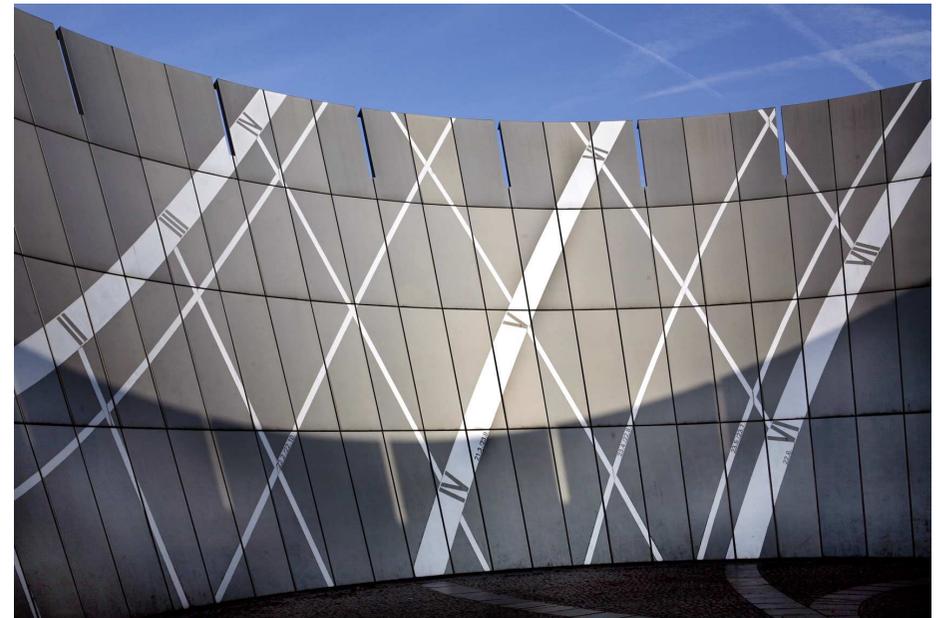


Allgemeines über Sonnenuhren



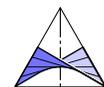
Třeboň, Tschechien

Traditionelle Sonnenuhr mit Stunden- und Datumslinien

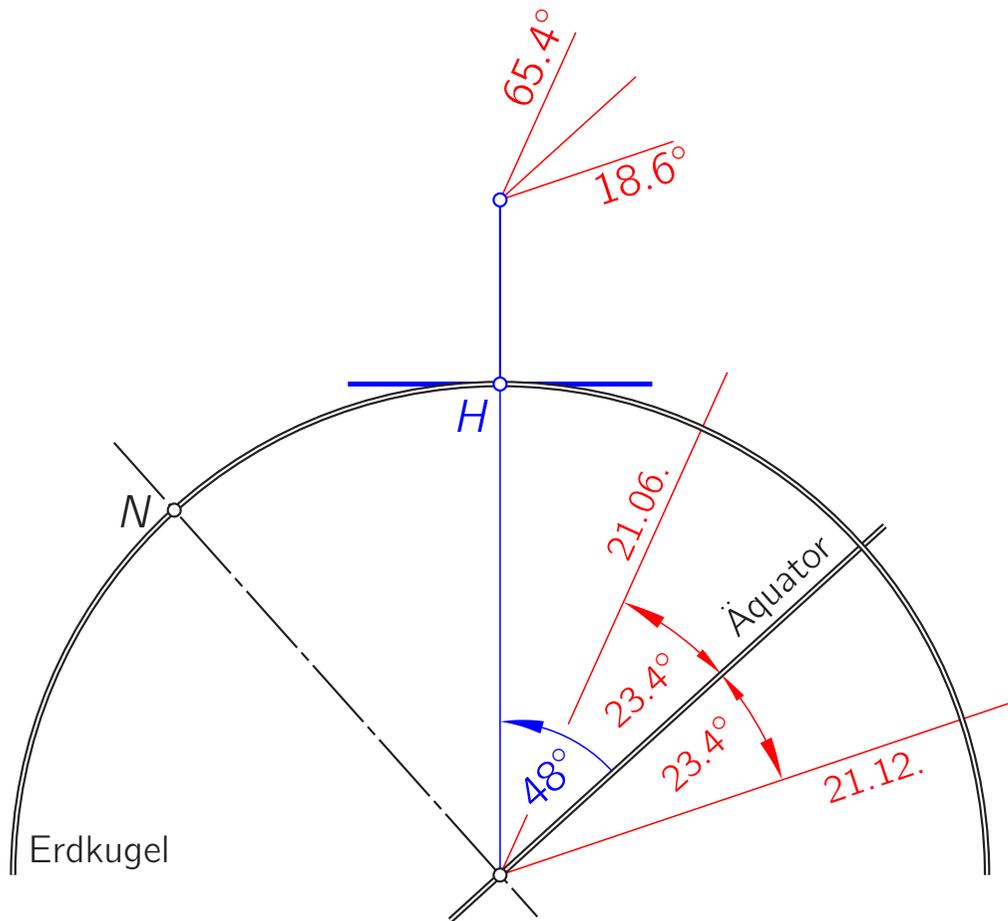


Endbahnhof der U2 in München

Nur bei Kenntnis des Datums kann die Uhrzeit abgelesen werden.



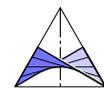
Allgemeines über Sonnenuhren



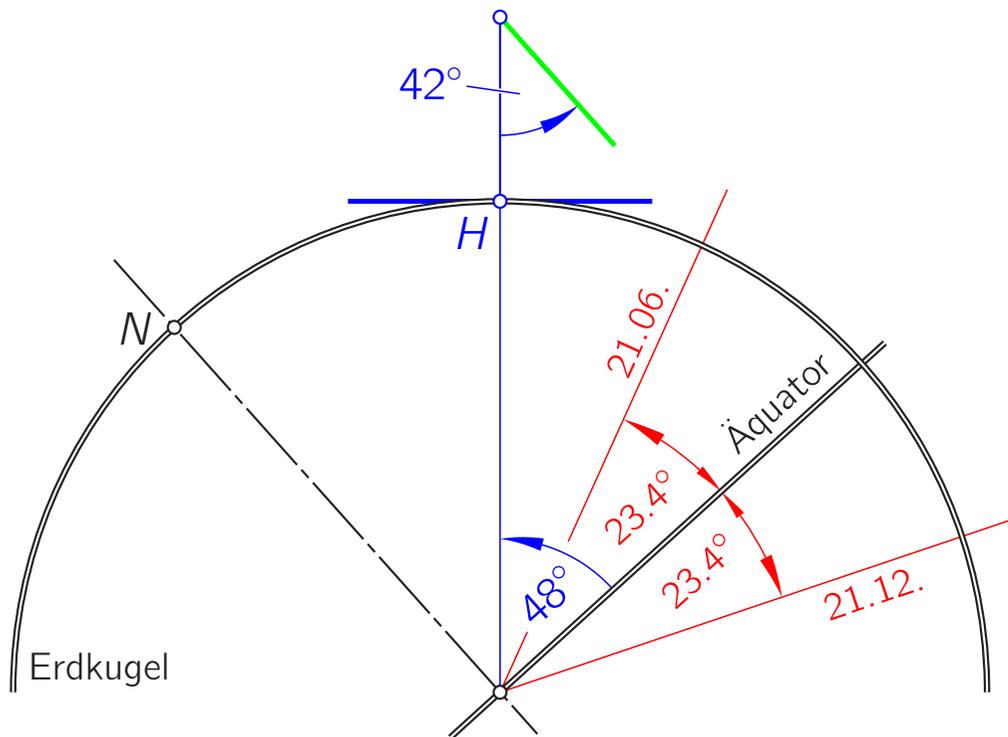
Während der Bewegung der Erde um die Sonne variiert der **Erhebungswinkel der Sonne** gegenüber der Äquatorebene um $\pm = 23.44^\circ$ (Schiefe der Ekliptik).

Das bedeutet für Heiligenkreuz (geogr. Breite 48.055°) maximale Erhebungswinkel der Sonne **zwischen 18.6° und 65.4°** .

Zu gleicher Tageszeit ('Sonnenzeit') liegt die Sonne in derselben Meridianebene der Erde.



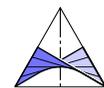
Allgemeines über Sonnenuhren



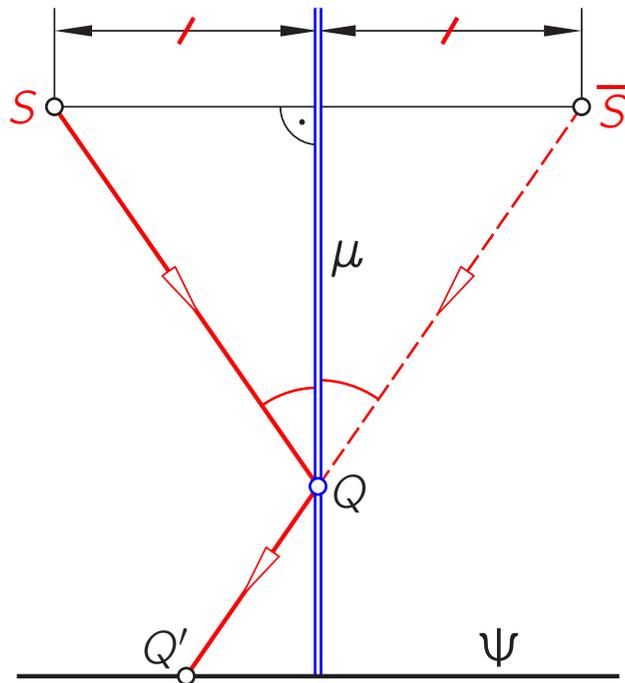
Der Schatten eines Stabes fällt genau dann zur selben Tageszeit auf dieselbe Gerade, wenn die Schattenebene parallel zur zugehörigen Meridianebene ist.

⇒ der Schattenstab muss parallel zur Erdachse sein.

Eine Parallele zur Erdachse ragt in Heiligenkreuz unter 42° aus einer nach Süden weisenden Hauswand.

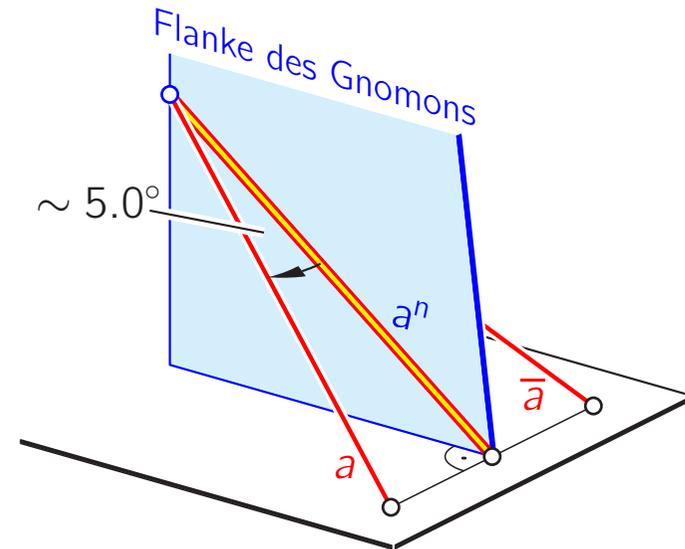


2. Spiegelung und Schatten

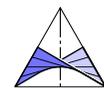


Jede Reflexion wirkt wie ein Schatten zu der an der Ost- bzw. Westwand **gespiegelten Sonne**.

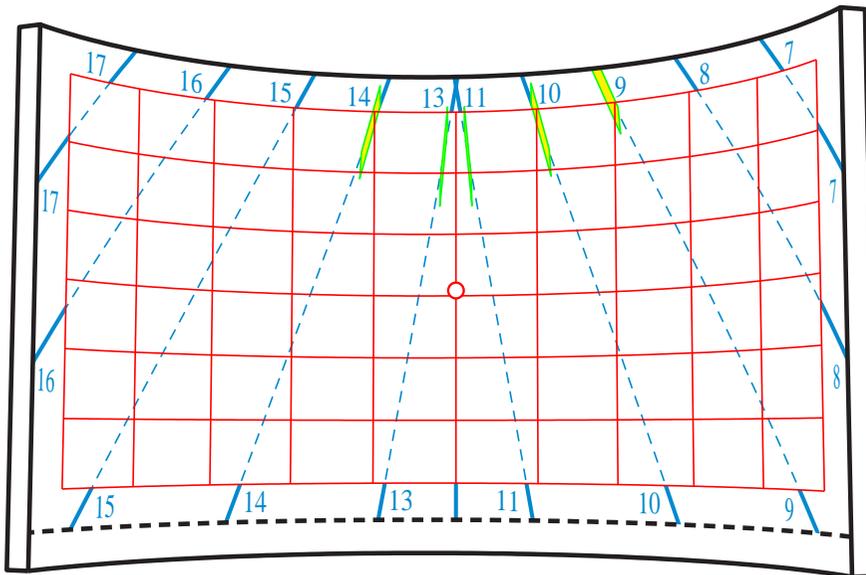
Die zu gleicher Tageszeit (Sonnenzeit) gespiegelten Sonnenstrahlen liegen in derselben Ebene durch die **gespiegelte Erdachse \bar{a}** .



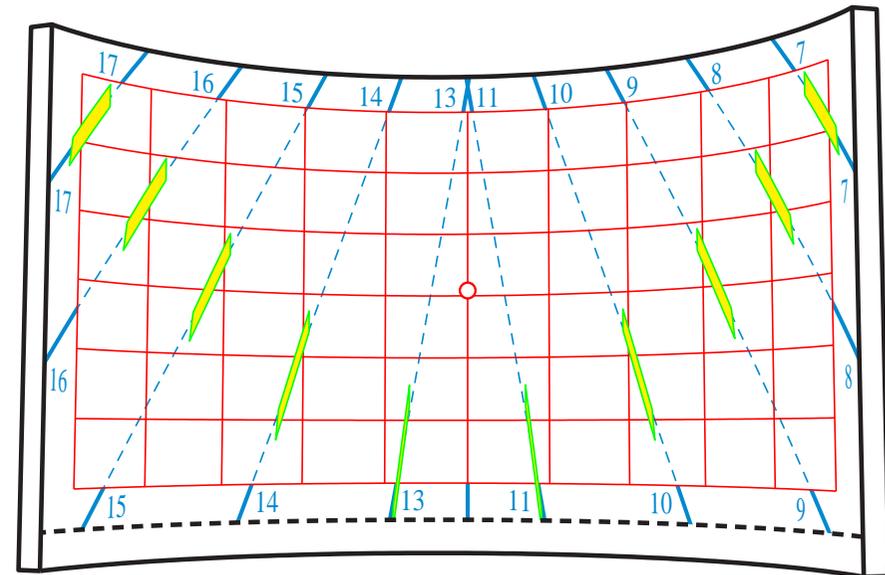
Die **bestmögliche Näherung** für die gespiegelte Erdachse \bar{a} innerhalb der Flanke des Gnomons ist der **Normalriss a^n** der Erdachse a in dieser Wand.



2. Spiegelung und Schatten

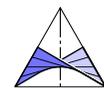


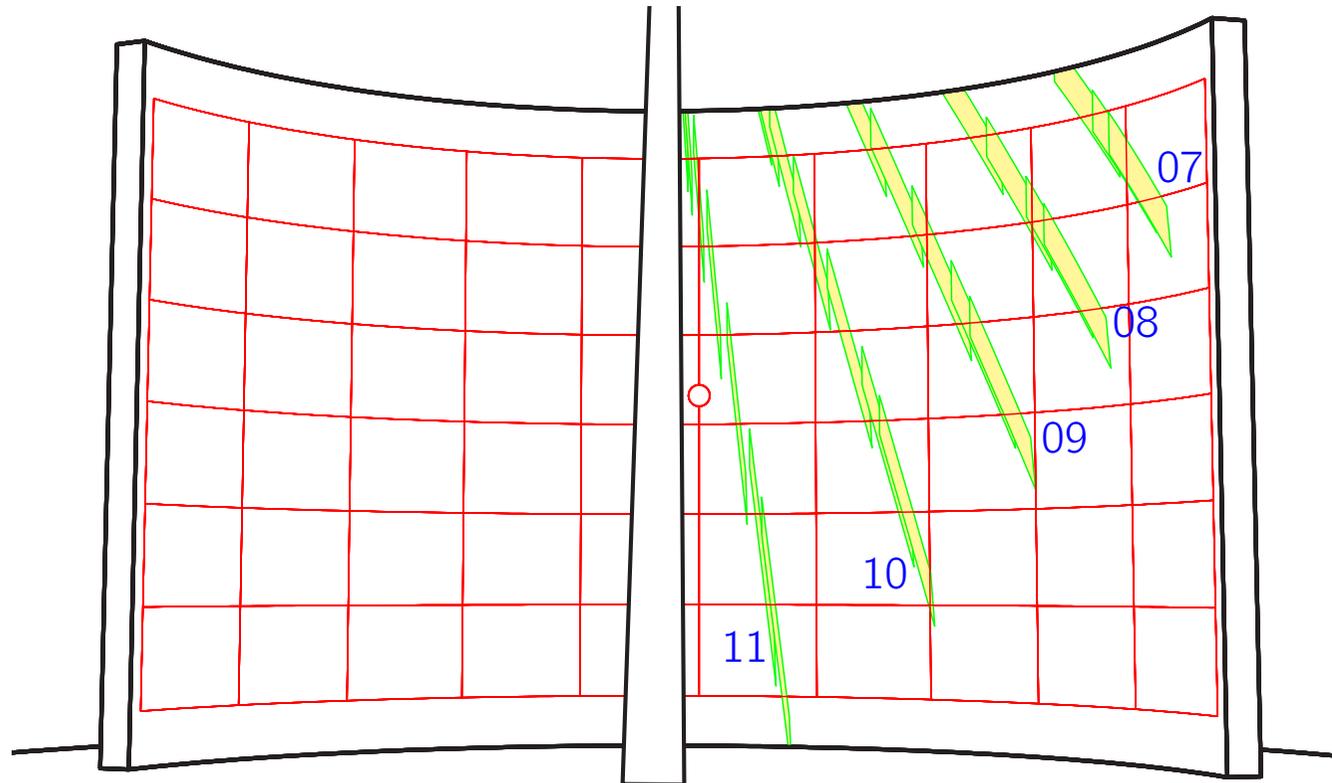
21.2., 21.10.



21.5., 21.7.

Die Höhe der reflektierenden Streifen wurde derart gewählt, dass selbst zur Winter- und Sommersonnenwende die Reflexionen auf die Rundwand fallen.





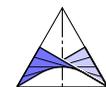
Ein **zur Erdachse annähernd paralleler Streifen** auf Ost- und Westwand bewirkt helle Streifen auf der Rundwand wie bei Sonnenuhr. Das Bild zeigt den Verlauf der Reflexionen über die Monate.

2. Spiegelung und Schatten

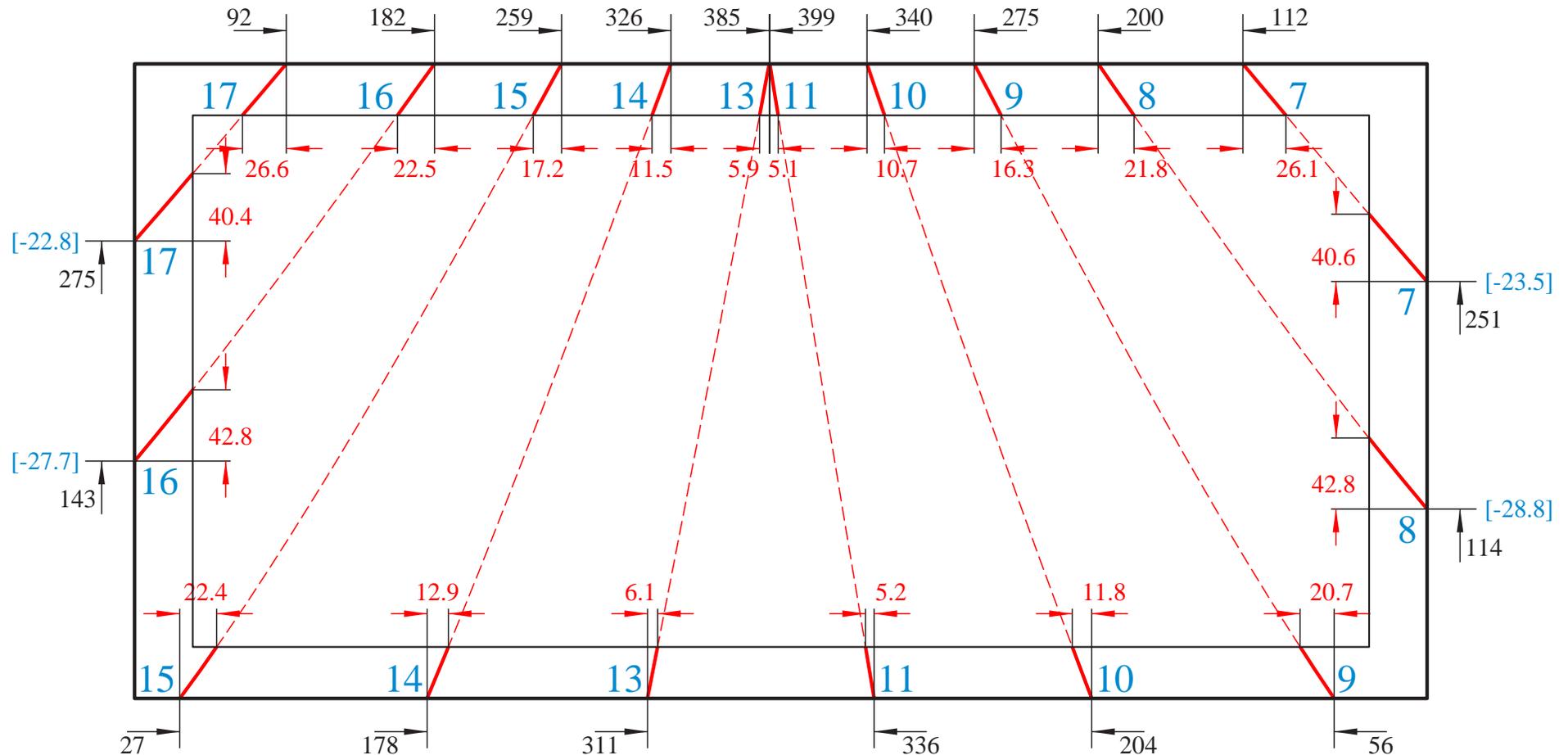


Fotomontage: Gnomon mit reflektierendem Streifen und den zugehörigen Reflexionen für den 9. September.

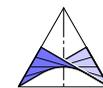
(Foto aus 2011)



3. Pläne für die Handwerker



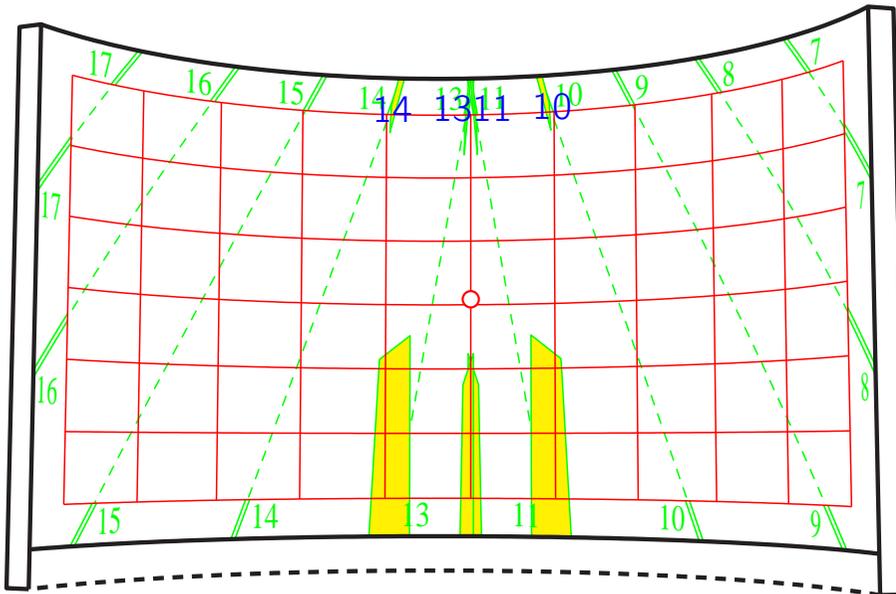
Plan für Stundenlinien (unter Berücksichtigung der geographischen Länge 16.049°)



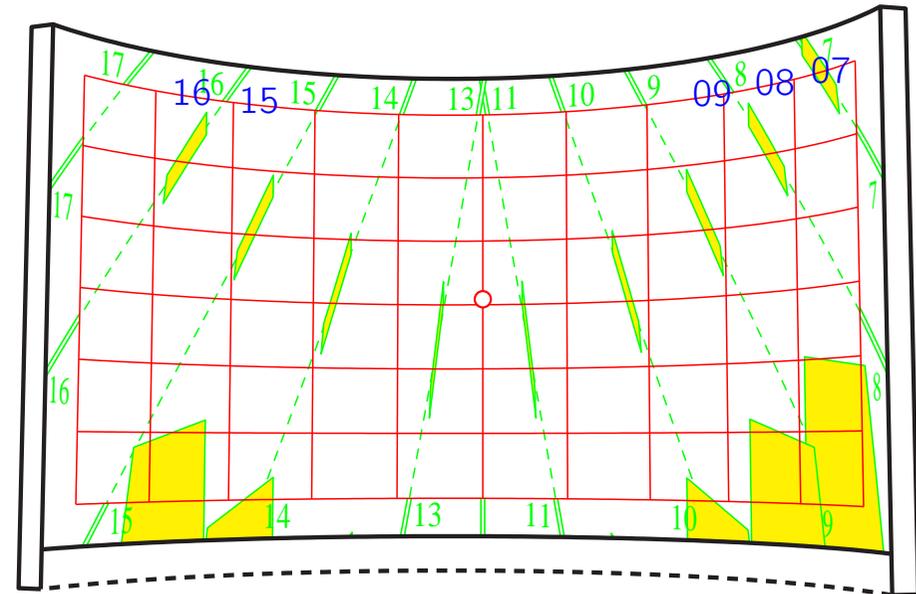


Die untere Hälften der Gnomonflanken sind herstellungs- und temperaturbedingt leicht gewölbt und stören die Zeitablesungen durch **unregelmäßige Reflexionskaustiken**

3. Pläne für die Handwerker

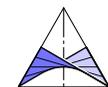


21.1., 21.11.



21.4., 21.8.

Eine **Senkung der Abmattungsgrenze** um 50 cm verbesserte die Situation etwas, aber behinderte die Absicht des Künstlers, der **Besucher** möge sich durch die Spiegelung am Gnomon inmitten der auf dem Mosaik dargestellten Menschengruppe **wiedererkennen**.



4. Zur Genauigkeit der Sonnenuhren

Stadtturm in Innsbruck

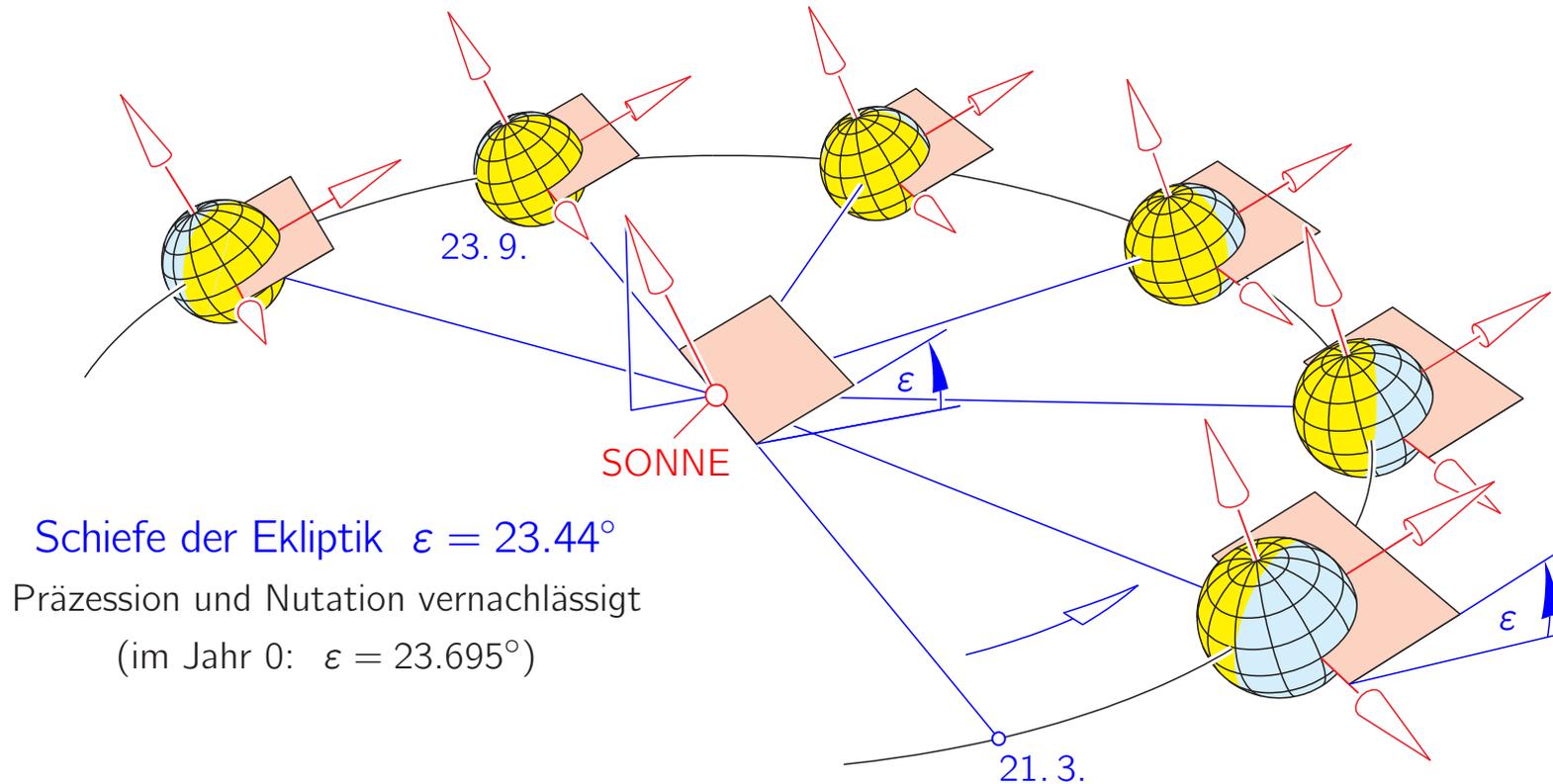
Es gibt eine **mittlere Zeit = Uhrzeit**

und eine **wahre Zeit = Sonnenzeit**,

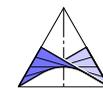
und diese unterscheiden sich im Laufe eines Jahres um bis zu 15 Minuten!

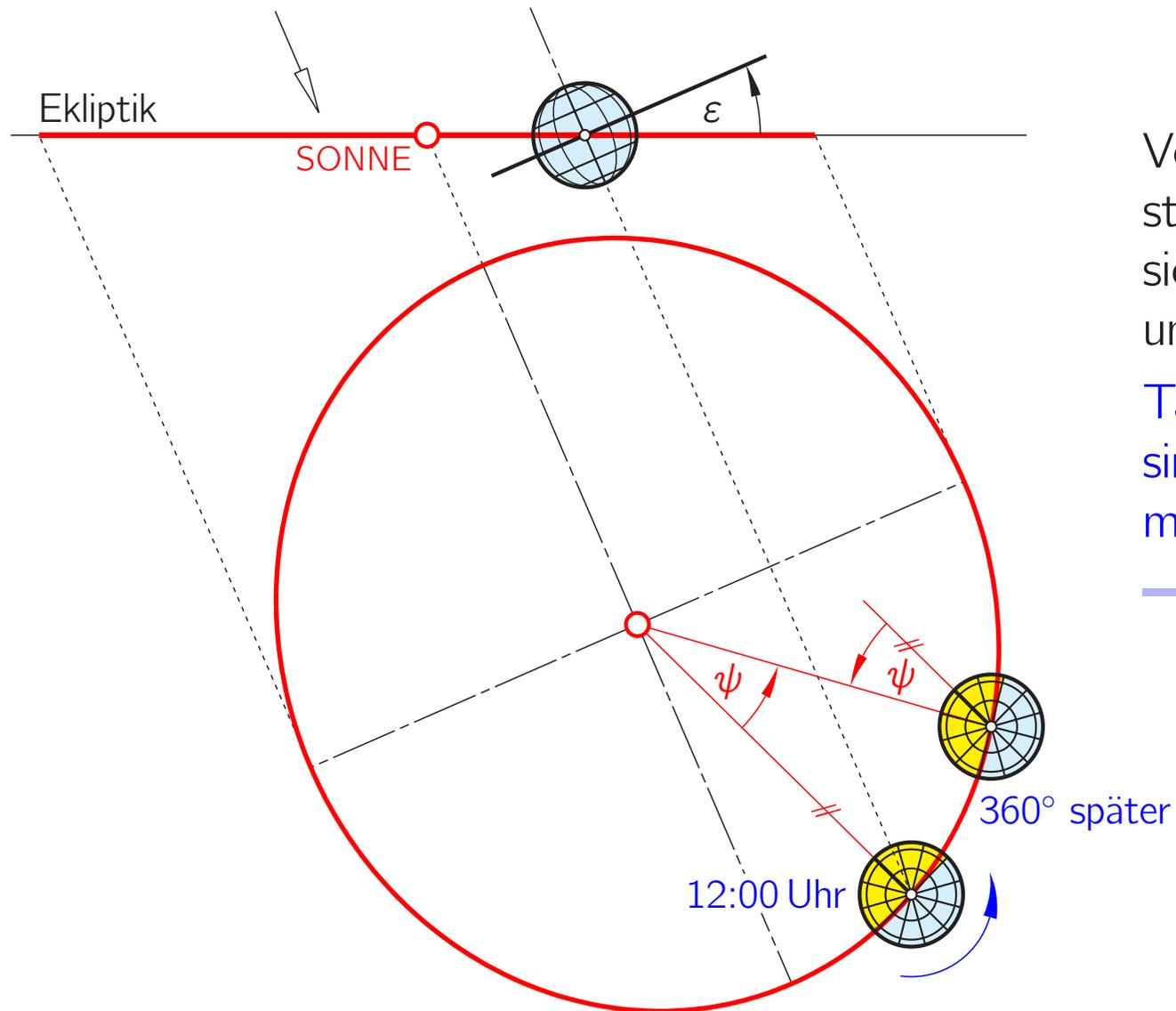


4. Zur Genauigkeit der Sonnenuhren



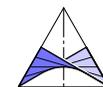
Wir projizieren die Bahn der Erde orthogonal in eine Äquatorebene, um die Drehung der Erde um ihre Achse in wahrer Größe zu sehen.

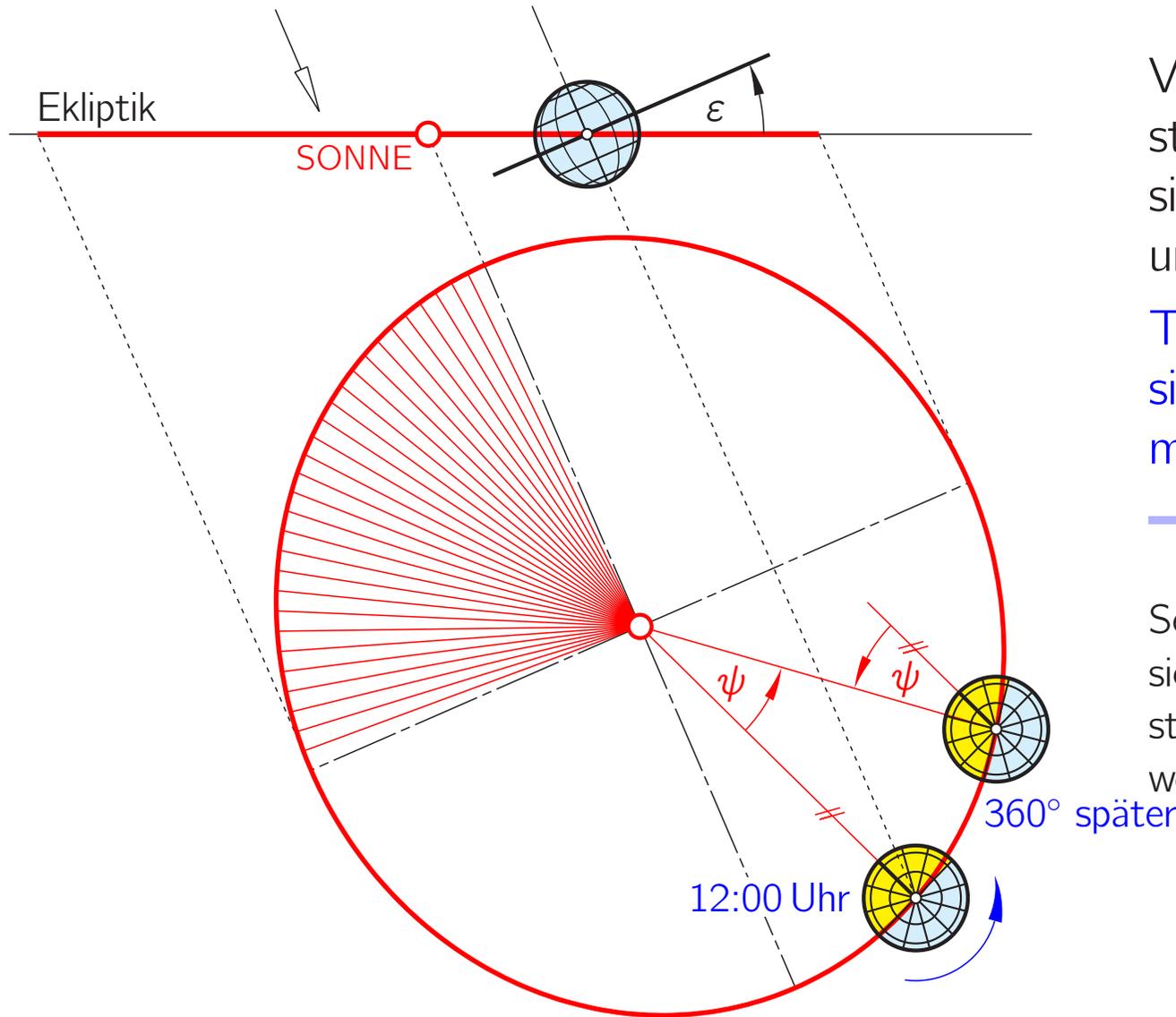




Von einem Sonnenhöchststand zum nächsten muss sich die Erde durch $360^\circ + \psi$ um ihre Achse drehen \implies Tage (gemäß Sonnenzeit) sind verschieden lang (bzgl. mittlerer Zeit)!

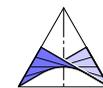
(Bild nicht maßstabstreu)

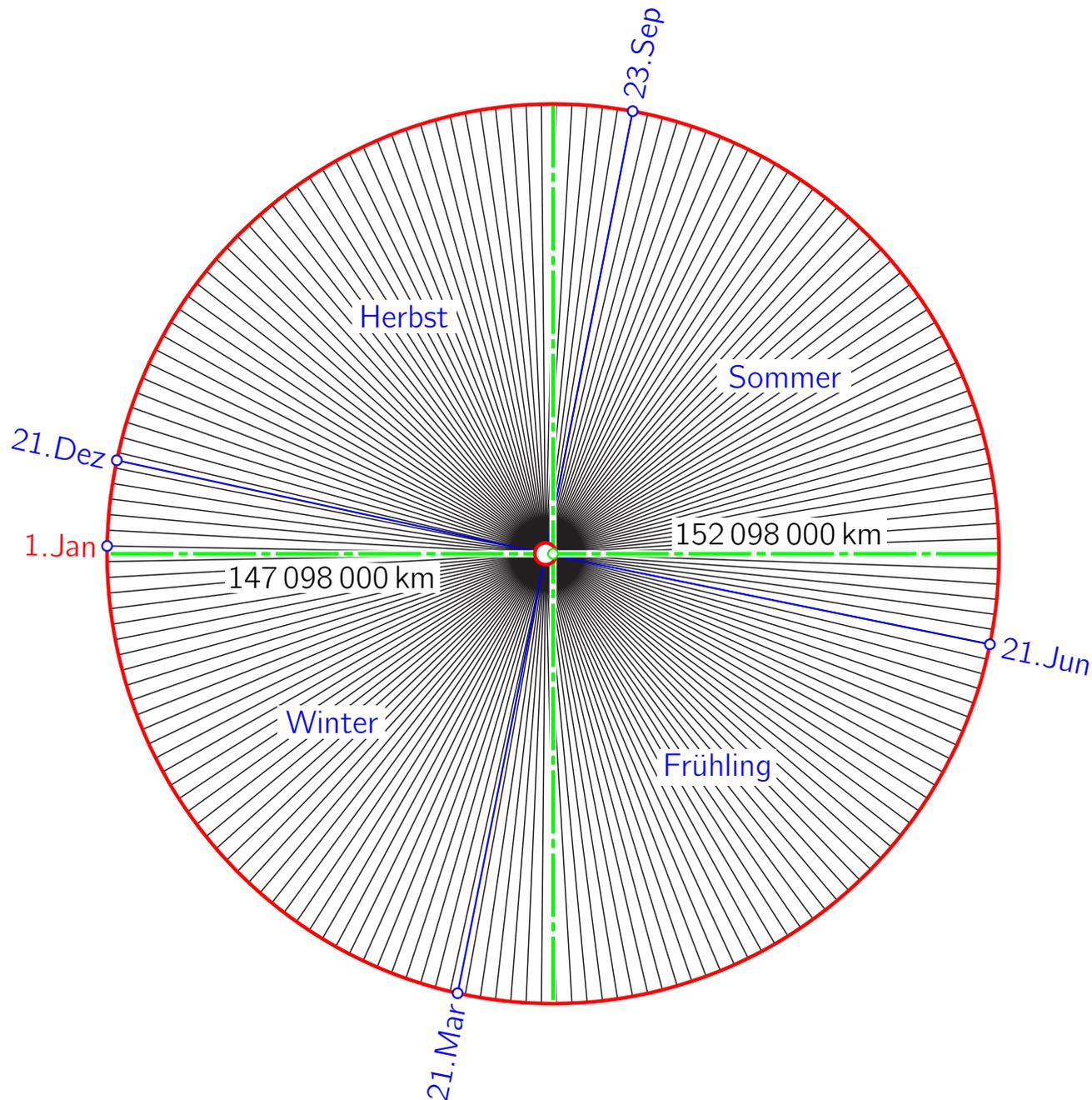




Von einem Sonnenhöchststand zum nächsten muss sich die Erde durch $360^\circ + \psi$ um ihre Achse drehen \implies Tage (gemäß Sonnenzeit) sind verschieden lang (bzgl. mittlerer Zeit)!

Selbst bei einer **Kreisbahn** ändert sich der in 24 Stunden überstrichene Zentriwinkel ψ ständig wegen der verzerrten Ansicht.



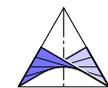


Die Bahn der Erde um die Sonne ist eine **Ellipse**, die mit konstanter **Flächengeschwindigkeit** durchlaufen wird.

(2 Tage Zeitintervall zwischen den Teilungsstrichen).

Bahndaten:

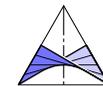
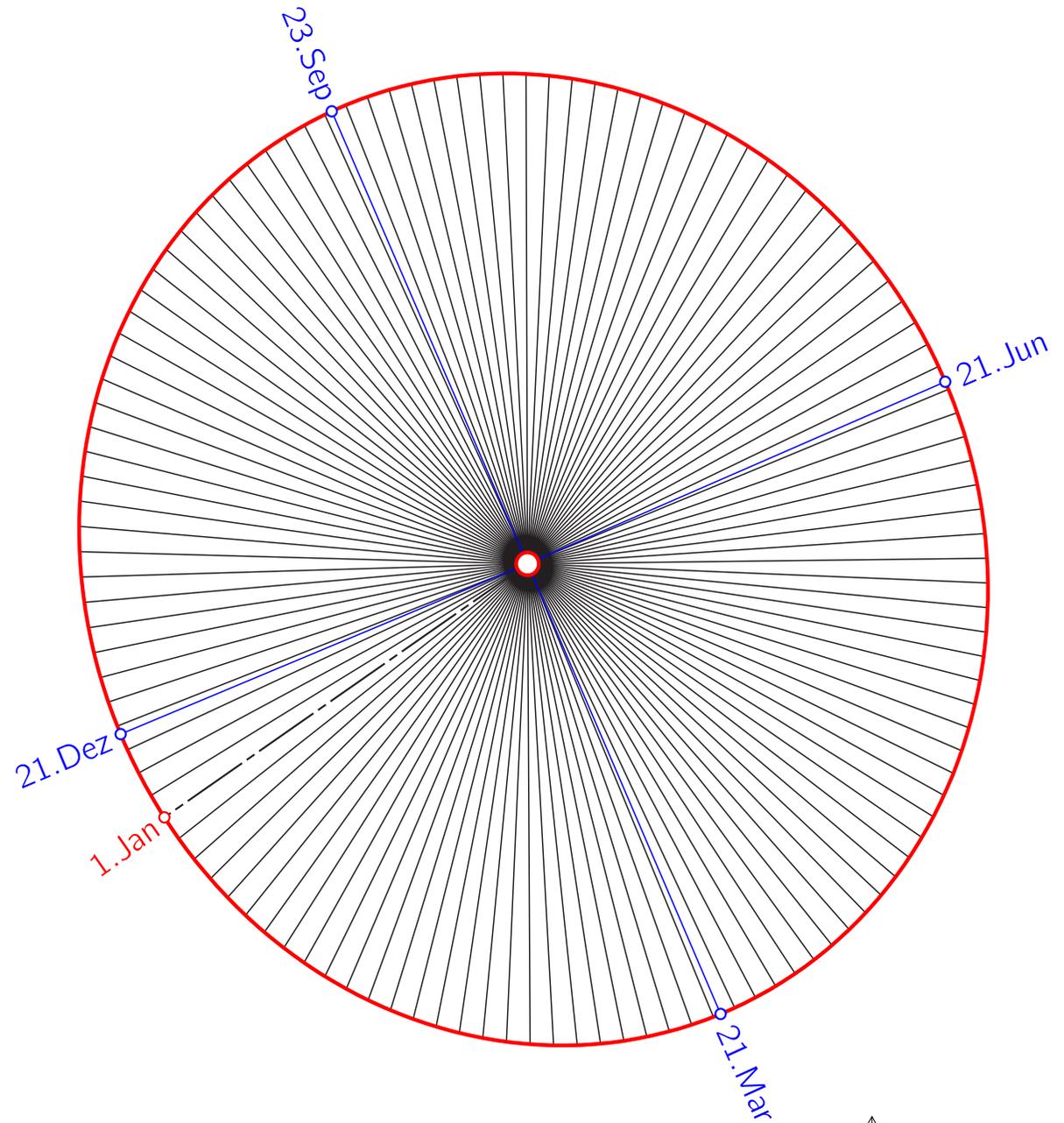
$$\begin{aligned}
 a &= 149.598 \cdot 10^6 \text{ km} \\
 b &= 149.577 \cdot 10^6 \text{ km} \\
 e &= 2.500 \cdot 10^6 \text{ km} \\
 \varepsilon &= e/a = 0.01671
 \end{aligned}$$



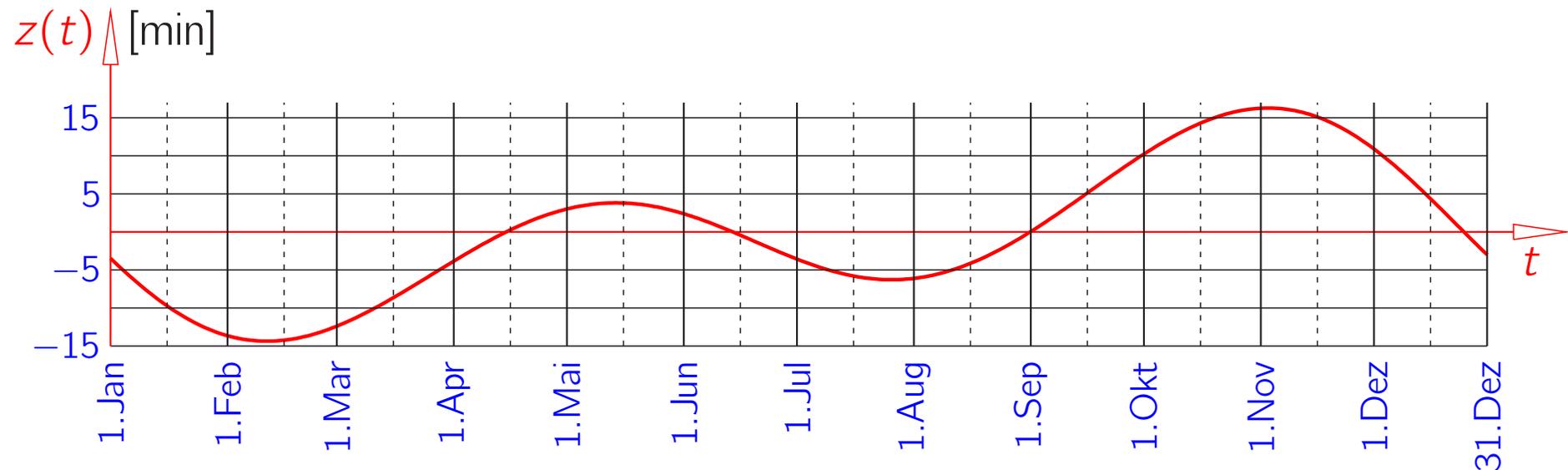
Das ist die **Projection der elliptischen Erdbahn**. Auch diese wird mit **konstanter Flächengeschwindigkeit** durchlaufen.

3 Tage Zeitintervall zwischen den Teilungsstrichen (mittlerer Zeit).

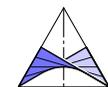
Die Abweichungen der Zentriwinkel vom Durchschnittswert $360/365.2425^\circ$ sind die Ursache für die **Zeitgleichung**.



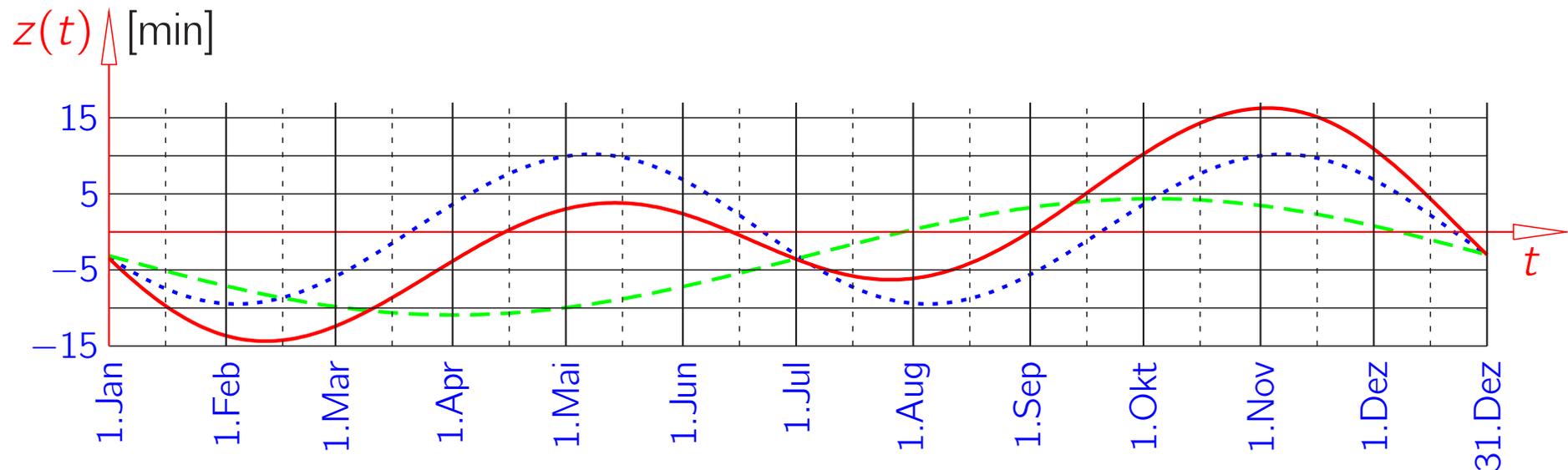
4. Zur Genauigkeit der Sonnenuhren



Zeitgleichung: wahre Zeit = Sonnenzeit = mittlere Zeit + $z(t)$



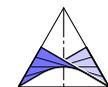
4. Zur Genauigkeit der Sonnenuhren



Zeitgleichung: wahre Zeit = Sonnenzeit = mittlere Zeit + $z(t)$

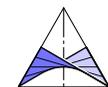
..... Zeitgleichung im Falle einer Kreisbahn ($e = 0$)

- - - - - Zeitgleichung ohne Schiefe der Ekliptik ($\epsilon = 0$)





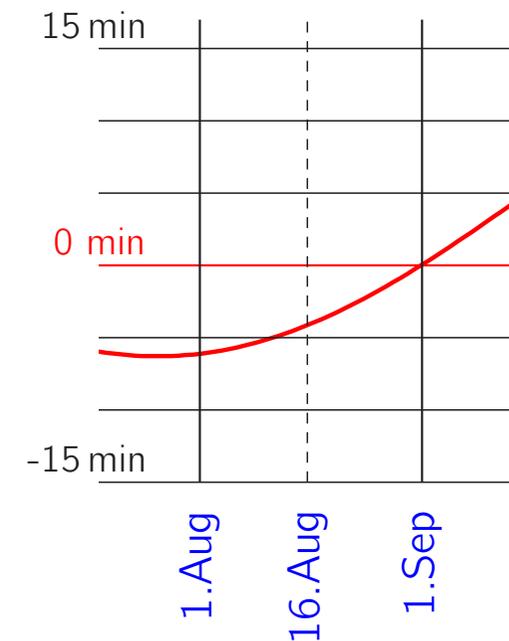
Stadtturm 'Alter Michel' in München:
Diese Sonnenuhr berücksichtigt die Zeitgleichung. Nicht der Schatten des Stabes, sondern nur jener des Stabendes zeigt die genaue (mittlere) Zeit.



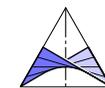
4. Zur Genauigkeit der Sonnenuhren



Zeitgleichung:



Ablesebeispiel, 15. August: Die Reflexion zeigt $\sim 8:05$; es ist Sommerzeit, die Zeitgleichung ergibt $z = -5 \text{ min} = (\text{Sonnenszeit} - \text{mittl. Zeit}) \implies \text{Resultat: } \sim 9:10 \text{ Uhr}$



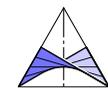


Es war mir eine **besondere Ehre**, bei der Realisierung dieses beeindruckenden Denkmals mitwirken zu dürfen.

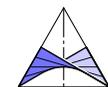
**Danke für Ihre
Aufmerksamkeit!**

Literatur

- G. Glaeser: *Geometry and its Applications in Arts, Nature and Technology*. Springer Wien, New York, 2012.
- G. Glaeser G., W. Hofmann: *About minute-precise sundials for mean time*. IBDG (Informationsblätter der Geometrie) **23**/2, 40–46 (2004).
- F. Hohenberg: *Konstruktive Geometrie in der Technik*. 3. Aufl., Springer-Verlag, Wien 1966.
- F. Mayrhofer, G. Liechtenstein (Hrsg.): *Die Sonnenreflexionsuhr im Stift Heiligenkreuz, als Denkmal für Gewissens und Religionsfreiheit*. Be&Be-Verlag, Heiligenkreuz 2016.



- K. Schwarzingler: *Katalog der ortsfesten Sonnenuhren in Österreich*. CD, Österreichischer Astronomischer Verein, 2011.
- H. Stachel: *Spiegelung und Brechnung im DG-Unterricht*. Informationsblätter der Geometrie **2/1**, 23–29 (1983).
- H. Stachel: *The Design of the New Sun-Reflection-Dial in Heiligenkreuz/Austria*. Proceedings moNGeometrija 2014 (ISBN 978-86-88601-13-9), Vlasina/Serbia, pp. 285–296.
- S. Wetzel: *Die Heiligenkreuz-Reflex-Sonnenuhr*. <<http://www.swetzel.ch/sonnenuhren/heilkreu/heilkreu.html>>, 2016.



DIE SONNEN REFLEXIONS UHR

FELIX MAYRHOFER
GUNDAKAR LIECHTENSTEIN (HG.)

IM STIFT
HEILIGENKREUZ

ALS DENKMAL FÜR GEWISSENS- UND RELIGIONSFREIHEIT



Be&Be

MIT GRUNDSÄTZLICHEN ÜBERLEGUNGEN ZU DER ERKLÄRUNG
„DIGNITATIS HUMANAЕ“ DES 2. VATIKANISCHEN KONZILS